

文章编号:1005-0523(2009)05-0001-06

异形夹杂角端部局部奇异场杂交有限元分析

平学成, 陈梦成

(华东交通大学 载运工具与装备省部共建教育部重点实验室, 江西 南昌 330013)

摘要:首先利用一维有限元特征分析方法计算所得到的异形夹杂角端部应力奇异指数和奇异应力场、位移场角分布函数,并依据 Hellinger-Reissner 原理,开发出一个特殊的、能够反映夹杂角端部局部弹性现象的 n 边形超级角端部单元,然后将该超级单元与标准的 4 节点杂交应力单元耦合在一起构建了一种分析异形夹杂角端部奇异弹性场的新型特殊杂交应力有限元方法。文中给出了两个应用算例,算例结果表明:该文方法不仅使用单元少、计算结果精度高,而且适用范围广,可拓展应用于分析复合材料微结构组织与力学行为关系。

关键词:夹杂角端部;应力奇异性;广义应力强度因子;杂交应力有限元

中图分类号: O346.1

文献标识码: A

工程复合材料中有很多是利用颗粒、短纤维或晶须进行增强的。这些增强相(或称夹杂)提高了复合材料的机械性能,但同时也带来了新的力学问题,其中一个重要问题就是夹杂角端部的应力奇异性^[1]。由于应力奇异性的存在,复合材料在承受外部载荷时,往往会从夹杂角端部积累损伤,进而形成裂纹等缺陷导致复合材料的破坏。过去,在求解夹杂弹性问题时,通常将夹杂形状视为椭圆形^[2],实际上,工程复合材料中夹杂形状多为非椭圆形或称异形。对于异形夹杂弹性问题求解,刘一华和许金泉^[3]用应力函数解析法研究了短纤维界面裂纹尖端奇异性,但并未得到反映裂纹尖端奇异场强度的应力强度系数;Chen^[1]以及 Dong 等人^[4]采用奇异积分方程方法分析了异形夹杂角端部的应力奇异性 and 奇异应力场;还有一些相关异形夹杂问题研究成果,限于篇幅,不一一列举。解析法只适用于简单问题、简单材料和简单几何构形;积分方程方法需要弹性问题基本解和对每个夹杂周界进行单元划分,使用起来不方便。有限元使用方便,但由于有限元法需要在域内进行单元网格划分,特别是在分析局部应力梯度变化较快之处,为了确保数值结果精度,往往还需要进一步细分单元网格,因此,有关用有限元方法分析异形夹杂问题的报道,据作者所知,目前尚未见到。

基于上述背景,本文拟将作者^[5]以前提出的求解楔形切口角端部奇异弹性场的杂交应力有限元方法进一步拓展,楔形切口内空腔用弹性夹杂填充,最终导出求解异形夹杂端部奇异弹性场的杂交应力有限元方法。这里问题的关键是如何构造一个能够反映夹杂角端部局部弹性现象的超级 n 边形角端部单元。为此,将 n 边形超级角端部单元求解问题,分解为夹杂域内和基体域内两个角端部单元问题,进行单独求解,然后通过夹杂和基体之间界面上力与位移的连续关系,将夹杂域内角端部单元解和基体域内角端部单元解联系起来,最终形成超级 n 边多边形角端部单元解。本文最后应用算例表明:夹杂角端部只需要一个超级单元替代传统细分单元,即可得到同样精度的数值结果;本文提出的方法应用范围广,可应用于非均匀复合材料微结构组织与力学行为关系研究以及智能材料力学行为研究。

1 Hellinger-Reissner 泛函表达式与 n 边形超级角端部单元刚度

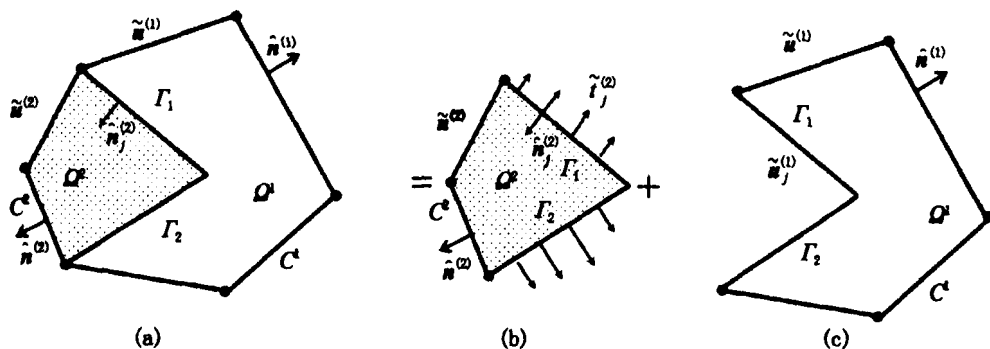
杂交元法最早是由卞学璜^[6]于 1964 年提出的,目前该方法在求解含单个或多个奇异点的弹性力学问题方面已被公认为具有独特优势,使用简便^[5,7,8]。与用杂交应力有限元法计算裂纹问题的 Hellinger-Reissner 泛函表达式不同,为了使用杂交应力有限元法分析异形夹杂角端部奇异应力场,我们需构造另一个如图 1(a)所示的、能够反映夹杂角端部局部弹性现象的 n 边形超级角端部单元。该单元刚度矩阵的建

收稿日期:2009-05-27

基金项目:江西省自然科学基金项目(2007GZW0862);载运工具与装备省部共建教育部重点实验室开放基金

作者简介:平学成(1975-),男,黑龙江延寿人,博士,副教授,研究方向为结构强度与动力学。

立依赖于单元节点力与位移之间的关系。为此,将如图 1(a)所示的原始边值问题分解为图 1(b)和图 1(c)所示的两个不同子边值问题,即:(1) 基体 Ω^1 在其边界 C^1 、 Γ_1 和 Γ_2 上已知位移的边值问题;(2) 夹杂 Ω^2 在其边界 C^2 、 Γ_1 和 Γ_2 上已知力和位移的混合边值问题。这里 C^1 和 C^2 是基体和夹杂角端部外边界,构成超级单元边界,由 n 个依次相邻的边界单元组成; Γ_1 和 Γ_2 为基体和夹杂之间结合界面。依据 Hellinger-Reissner 原理和作者工作^[9],对两个子边值问题分别独立定义两个泛函,见式(1)和(2)。



(a) 超级单元边值原问题;(b) 夹杂域子边值问题;(c) 基体域子边值问题

图 1 超级单元边值问题分解

对于子边值问题 1

$$\pi_M^e = \int_{\Omega^1} \left(\frac{1}{2} \sigma_M^T S_M \sigma_M - \sigma_M^T D u_M \right) d\Omega - \int_{C^1} t_M^T (\tilde{u}^{(1)} - u_M) dS - \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} t_M^T (\tilde{u}_j^{(1)} - u_M) dS \quad (1)$$

对于子边值问题 2

$$\pi_I^e = \int_{\Omega^2} \left(\frac{1}{2} \sigma_I^T S_I \sigma_I - \sigma_I^T D u_I \right) d\Omega - \int_{C^2} t_I^T (\tilde{u}^{(2)} - u_I) dS + \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} (\tilde{t}_j^{(2)})^T u_I dS \quad (2)$$

式中: u, σ, t 和 S 分别是应力、位移、边界张力和弹性柔度矩阵; D 表示应变与位移之间的微分矩阵算子;符号 $\sim$ 为已知量;下标 I 和 M 表示夹杂域和基体域。根据杂交应力元定义^[6],边界位移 $\tilde{u}^{(1)}, \tilde{u}_j^{(1)}$ 和 $\tilde{u}^{(2)}$ 与 u 不同,它们由超级单元的边界单元节点位移内插得到。子边值问题 1 中的边界位移 $\tilde{u}_j^{(1)}$ 和子边值问题 2 中的边界张力 $\tilde{t}^{(2)}$ 假定为已知的,但实际上是未知的。

为使两个泛函取得最小值,分别对方程(1)和(2)进行变分,得到以下两个方程组

对于子边值问题 1

$$D^T \sigma_M = 0, S_M \sigma_M = D u_M, \quad \text{位于基体域 } \Omega^1 \text{ 内} \quad (3)$$

$$t_M = n^{(1)} \sigma_M, \text{ 位于基体边界 } C^1 \text{ 上、结合界面 } \Gamma_1 \text{ 和 } \Gamma_2 \text{ 上} \quad (4)$$

$$u_M = \tilde{u}^{(1)}, \text{ 位于基体边界 } C^1 \text{ 上}; u_M = \tilde{u}_j^{(1)}, \text{ 位于结合界面 } \Gamma_1 \text{ 和 } \Gamma_2 \text{ 上} \quad (5)$$

对于子边值问题 2

$$D^T \sigma_I = 0, S_I \sigma_I = D u_I, \quad \text{位于夹杂域 } \Omega^2 \text{ 内} \quad (6)$$

$$t_I = n^{(2)} \sigma_I, \text{ 位于夹杂边界 } C^2 \text{ 上、结合界面 } \Gamma_1 \text{ 和 } \Gamma_2 \text{ 上} \quad (7)$$

$$u_I = \tilde{u}^{(2)}, \text{ 位于夹杂边界 } C^2 \text{ 上}; \tilde{t}_j^{(2)} = -n_j^{(2)} \sigma_I, \text{ 位于结合界面 } \Gamma_1 \text{ 和 } \Gamma_2 \text{ 上} \quad (8)$$

式中: $n^{(1)}, n^{(2)}$ 和 $n_j^{(2)}$ 分别是对应于边界 C^1, C^2 和结合界面 Γ_1, Γ_2 单位外法线 2×3 矩阵。上面两组方程足以使子边值问题 1 和 2 分别获得解决。假定方程(3)(4)在基体域 Ω^1 内和方程(6)(7)在夹杂域 Ω^2 内均自动满足,则泛函(1)和(2)分别使用散度定理后,有

$$\pi_M^e = \frac{1}{2} \int_{C^1} t_M^T u_M dS + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} t_M^T u_M dS - \int_{C^1} t_M^T \tilde{u}^{(1)} dS - \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} t_M^T \tilde{u}_j^{(1)} dS \quad (9)$$

$$\pi_1^e = \frac{1}{2} \int_{C^2} t_1^T u_1 dS - \int_{C^2} t_1^T \tilde{u}^{(2)} dS + \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} (\tilde{t}_j^{(2)})^T u_1 dS - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} t_1^T u_1 dS \quad (10)$$

将以上夹杂域和基体域两个子边值问题解进行叠加后即获得超级角端部单元原问题解,但夹杂和基体之间结合界面上的力和位移必须满足连续条件,即

$$u_1 = u_M = \tilde{u}_j^{(1)} \quad \text{位于结合界面 } \Gamma_1 \text{ 和 } \Gamma_2 \text{ 上} \quad (11)$$

$$\mathbf{n}^{(1)} = \mathbf{n}^{(2)} = -\hat{\mathbf{n}}_j^{(2)}, \sigma_1 = \sigma_M \quad \text{位于结合界面 } \Gamma_1 \text{ 和 } \Gamma_2 \text{ 上} \quad (12)$$

将方程(9)和(10)相加,并注意到条件(11)和(12),得到原问题解为

$$\pi^e = \pi_M^e + \pi_1^e = \frac{1}{2} \int_{C^1} t_M^T u_M dS + \frac{1}{2} \int_{C^2} t_1^T u_1 dS - \int_{C^1} t_M^T \tilde{u}^{(1)} dS - \int_{C^2} t_1^T \tilde{u}^{(2)} dS \quad (13)$$

将 t_M 和 t_1 统一记为 t , u_M 和 u_1 统一记为 u , $\tilde{u}^{(1)}$ 和 $\tilde{u}^{(2)}$ 统一记为 $\tilde{u}$, 则方程(13)改写为

$$\pi^e = \frac{1}{2} \int_C t^T u dS - \int_C t^T \tilde{u} dS \quad (14)$$

式中: $C = C^1 + C^2$. 方程(14)即为我们用杂交应力有限元法分析异形夹杂角端部问题所需要的 Hellinger-Reissner 泛函表达式。

对方程(14)进行变分,并令 $\delta\pi^e = 0$, 则有

$$\pi^e = \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{U}}^e)^T \mathbf{K}_{\text{super}}^e (\tilde{\mathbf{U}}^e) \quad (15)$$

式中

$$\tilde{\mathbf{U}}^e = [\tilde{\mathbf{U}}_1^e, \dots, \tilde{\mathbf{U}}_m^e]^T \quad (16)$$

式中: $\tilde{\mathbf{U}}_m^e$ 为超级角端部单元边界上节点向量; m (图2中 $m=8$) 为超级角端部单元边界上节点数;

$$\mathbf{K}_{\text{super}}^e = (\mathbf{G}^e)^T (\mathbf{H}^e)^{-1} (\mathbf{G}^e) \quad (17)$$

式中: $\mathbf{H}^e$ 和 $\mathbf{G}^e$ 是如图2所示的沿着超级角端部单元边界进行积分的一维积分,即

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \int_C [(\mathbf{n}\mathbf{Y}(x, y))^T \mathbf{W}(x, y) + (\mathbf{W}(x, y))^T (\mathbf{n}\mathbf{Y}(x, y))] dS,$$

$$\mathbf{G} = \int_C (\mathbf{n}\mathbf{Y}(x, y))^T \mathbf{L} dS,$$

$$\mathbf{L} = \left[\left(1 - \frac{s}{l}\right) \mathbf{I}_2 \quad \frac{s}{l} \mathbf{I}_2 \right]$$

式中: $\mathbf{n}$ 是边界 C 单位外法线 2×3 矩阵; $\mathbf{W}(x, y)$ 和 $\mathbf{Y}(x, y)$ 可由作者过去所建议的一维有限元特征分析方法^[5,8]计算得到,它们分别与异形夹杂角端部应力奇异指数、位移和奇异应力角分布函数有关; $\mathbf{L}$ 为线性插值函数; s 是图2中边界积分单元的始点到边界积分单元上 p 的距离; l 为边界积分单元两点间的距离; $\mathbf{I}_2$ 为二阶恒等单位矩阵。

将以上模拟夹杂角端部近场的 n 边形超级角端部单元与反映夹杂远场的标准4节点杂交应力元耦合在一起,即可构造出一种分析夹杂角端部局部奇异弹性场问题的特殊新型杂交应力有限元方法。

2 应力强度系数定义与确定方法

对于平面问题而言,任何夹杂角端部附近位移和奇异应力场在极坐标 (r, θ) 底下可以表示为

$$u_i = \sum_{k=1}^N K_k r^{\lambda_k+1} h_{ik}(\theta), \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^N K_k r^{\lambda_k} f_{ijk}(\theta), i, j = r, \theta \quad (18)$$

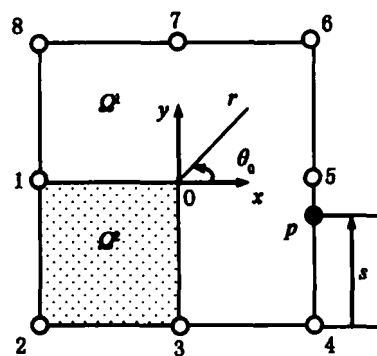


图2 n 边形超级角端部单元示意图

式中: N 为角端部应力奇异指数个数; K_k 为角端部应力强度系数, 反映了角端部附近强度的大小; λ_k 意指角端部应力奇异指数, $-1 < \lambda_k < 0$; $h_{ik}(\theta)$ 和 $f_{ik}(\theta)$ 分别是位移和奇异应力角分布函数。应力奇异指数和角分布函数均可由作者曾提出的一维有限元特征分析方法^[5,8]计算得到。

若材料为均质材料, 当夹杂材料与基体材料的弹性刚度比满足一定范围时^[1], 夹杂角端部局部弹性场主要由两个实应力奇异指数控制, 即

$$\sigma_{ij} = K_1 r^{\lambda_1} f_{ij1}(\theta) + K_2 r^{\lambda_2} f_{ij2}(\theta) \quad (19)$$

若应力强度系数 K_1 和 K_2 是根据 $\theta = \theta_0$ (参见图 2) 上的 $\sigma_{\theta\theta}$ 和 $\sigma_{r\theta}$ 来定义的, 即

$$\sigma_{\theta_0\theta_0} = \sigma_{\theta\theta}|_{\theta=\theta_0} = K_1 r^{\lambda_1} + K_2 r^{\lambda_2} f_{\theta_0\theta_0,2}(\theta_0) \quad (20)$$

$$\sigma_{r\theta_0} = \sigma_{r\theta}|_{\theta=\theta_0} = K_1 r^{\lambda_1} f_{r\theta_0,1}(\theta_0) + K_2 r^{\lambda_2} \quad (21)$$

上面应力强度系数定义意旨角分布函数 $f_{\theta_0\theta_0,1}(\theta_0)$ 和 $f_{r\theta_0,2}(\theta_0)$ 在 $\theta = \theta_0$ 射线上归一化, 即有: $f_{\theta_0\theta_0,1}(\theta) = 1$ 和 $f_{r\theta_0,2}(\theta) = 1$ 。求解方程(20)和(21), 我们得到以下形式的两个新方程:

$$K_1 [1 - f_{r\theta_0,1}(\theta_0) f_{\theta_0\theta_0,2}(\theta_0)] = [\sigma_{\theta_0\theta_0} - f_{\theta_0\theta_0,2}(\theta_0) \sigma_{r\theta_0}] r^{-\lambda_1} \quad (22)$$

$$K_2 [1 - f_{r\theta_0,1}(\theta_0) f_{\theta_0\theta_0,2}(\theta_0)] = [\sigma_{r\theta_0} - \sigma_{\theta_0\theta_0} f_{r\theta_0,1}(\theta_0)] r^{-\lambda_2} \quad (23)$$

因此, 按照裂纹尖端应力强度因子的定义, 夹杂角端部应力强度系数可定义如下

$$K_{I,\lambda_1} = \frac{1}{[1 - f_{r\theta_0,1}(\theta_0) f_{\theta_0\theta_0,2}(\theta_0)]} \lim_{r \rightarrow 0} r^{-\lambda_1} [\sigma_{\theta_0\theta_0} - f_{\theta_0\theta_0,2}(\theta_0) \sigma_{r\theta_0}] \quad (24)$$

$$K_{II,\lambda_2} = \frac{1}{[1 - f_{r\theta_0,1}(\theta_0) f_{\theta_0\theta_0,2}(\theta_0)]} \lim_{r \rightarrow 0} r^{-\lambda_2} [\sigma_{r\theta_0} - \sigma_{\theta_0\theta_0} f_{r\theta_0,1}(\theta_0)] \quad (25)$$

对方程(22)和(23)两边取对数, 应力强度系数 K_{I,λ_1} 和 K_{II,λ_2} 则可按照线性外插或最小二乘法得到。具体做法详见许金泉和刘一华等人^[10,11]以及作者^[12]工作。

3 数值算例与讨论

本文应用以上方法计算了如图 3 所示外载作用下的两个夹杂问题。第一个夹杂问题作为考核算例, 和现有解比较; 第二个夹杂问题作为新算例, 考察内置金属基压电智能传感器对金属强度和变形的影响。

为便于比较, 使用以下形式的无量纲应力强度系数:

菱形夹杂:

$$F_{I,\lambda_1} = \frac{K_{I,\lambda_1}}{\sigma_{yy}^\infty l^{-\lambda_1}}, F_{II,\lambda_2} = \frac{K_{II,\lambda_2}}{\tau_{xy}^\infty l^{-\lambda_2}} \quad (26)$$

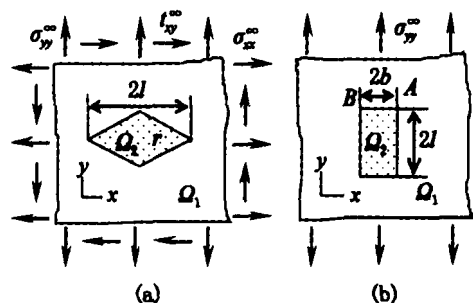
矩形夹杂:

$$F_{I,\lambda_1} = \frac{K_{I,\lambda_1}}{\sigma_{yy}^\infty b^{-\lambda_1}}, F_{II,\lambda_2} = \frac{K_{II,\lambda_2}}{\tau_{xy}^\infty b^{-\lambda_2}} \quad (27)$$

式中: l 为菱形夹杂半宽度 (见图 3(a)); b 为矩形夹杂半宽度 (见图 3(b)); σ_{yy}^∞ 和 τ_{xy}^∞ 分别为远场拉伸载荷和剪切载荷。

3.1 各向同性材料中单个菱形夹杂问题

作为考核算例, 考虑图 3(a) 所示远场载荷 σ_{yy}^∞ 、 σ_{xx}^∞ 和 τ_{xy}^∞ 作用下无限大各向同性板在内含一个菱形夹杂问题。假定问题为平面应力问题, 分析夹杂角端部 A 处附近奇异应力场。为模拟无限大板效果, 我们在计算中分别取板宽 $w = 40l$ 、板高 $h = 40l$ 。另外, 考虑到问题的几何与载荷的对称性, 只对图 3(a) 所示的板右半部分进行有限元网格划分, 计算中一共使用了 508 个 4 节点杂交应力单元和 1 个 4 边形 10 节点



(a) 菱形夹杂; (b) 矩形夹杂

图 3 两个异形夹杂算例示意图

超级夹杂角端部单元,单元划分见图 4。表 1 给出了无量纲应力强度系数 F_{I,λ_1} 和 $F_{II,\lambda_2}(\theta_0=0^\circ)$ 随材料剪切刚度变化的本文计算结果和 Chen^[1] 的数值解。从表 1 可以看出,本文计算结果与 Chen^[1] 的数值解,吻合很好,说明当前解是非常精确的(图中黑体字数据引起最大误差)。

3.2 各向同性材料中单个矩形压电夹杂问题

在智能结构中,压电材料作为传感器或驱动器常常粘贴或直接植入主体材料中。内置的压电传感器或驱动器对主体材料强度和变形影响问题在力学模型上可以按一块板材包含一个矩形压电夹杂问题来处理。图 3(b)描述了远场单向拉伸载荷作用下一块无限大各向同性板包含一个矩形压电夹杂的问题。假定各向同性板为金属铝材,压电材料为 PZT4 或 PZT5H,问题为平面应变问题,铝材内部和夹杂结合界面电势为零。为模拟无限大板,计算中取板宽 $w=20b$ 、板高 $h=10l$ 。另外,由于问题的对称性,计算中我们对图 3(b)中右上角四分之一域内进行有限元网格划分,8 结点超级单元

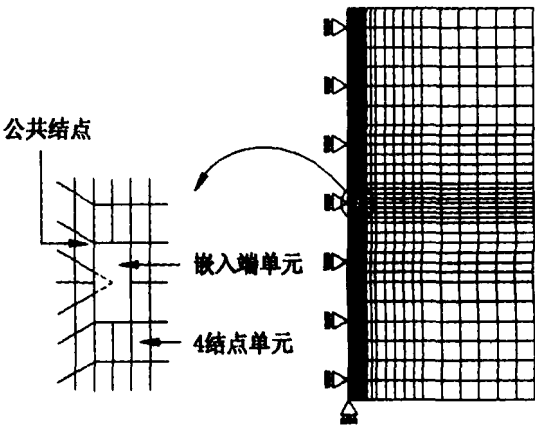


图 4 取右边 1/2 模型的单元划分

如图 2 所示,其余部分采用传统 4 结点单元。我们用以上的方法计算了沿压电夹杂界面($\theta_0=180^\circ$)角端部 A 处无量纲应力强度系数 F_{I,λ_1} 和 F_{II,λ_2} 。当前计算所使用的单元数较少,只采用几百个单元就能得到收敛解。表 2 给出了对应于压电 PZT4 和 PZT5H 的计算结果和采用的单元数。计算结果表明应力强度系数 F_{I,λ_1} 和 F_{II,λ_2} 均随夹杂几何尺寸比 l/b 增大而减少,并且当 $l/b>10$, F_{I,λ_1} 和 F_{II,λ_2} 均趋于稳定值。这意味着当 $l/b>10$ 以后,几何尺寸比 l/b 对 F_{I,λ_1} 和 F_{II,λ_2} 的影响消失。

表 1 无量纲应力强度系数 F_{I,λ_1} 和 F_{II,λ_2} 本文结果与现有 Chen 解^[1] 比较

Angle γ	μ_2/μ_1	$F_{I,\lambda_1}(\sigma^\infty \cap \sigma_y^\infty)$		$F_{I,\lambda_1}(\sigma_x^\infty \cap \sigma_y^\infty)$		$F_{II,\lambda_2}(\sigma_y^\infty)$	
		Present	Chen ^[1]	Present	Chen ^[1]	Present	Chen ^[1]
60°	0.000 1	1.148	1.146	1.031	1.033	1.595	1.602
	0.1	0.713	0.710	0.651	0.654	1.499	1.502
	10	-0.106	-0.103	0.311	0.318	-	-
	10 000	-0.111	-0.112	0.349	0.355	-0.556	-0.562
120°	0.000 1	1.462	1.464	1.044	0.892	-	-
	0.1	1.048	1.053	0.637	0.665	-	-
	10	-0.006	-0.003	0.662	0.677	-1.058	-1.052
	10 000	-0.012	-0.012	0.700	0.705	-0.827	-0.825

表 2 铝基 PZT4 和 PZT5H 压电夹杂角端部 A 处应力强度系数

l/b	单元数	铝基 PZT4 压电夹杂		铝基 PZT5H 压电夹杂	
		$K_1 b^{1/2} / \sigma_y^\infty$	$K_2 b^{1/2} / \sigma_y^\infty$	$K_1 b^{1/2} / \sigma_y^\infty$	$K_2 b^{1/2} / \sigma_y^\infty$
1	222	1.401 8	1.613 4	1.670 2	0.399 5
3.162	327	1.327 5	1.028 2	1.267 7	0.223 1
10	372	1.265 9	1.001 6	1.192 6	0.205 7
31.62	507	1.259 3	0.991 2	1.133 9	0.181 5
100	507	1.253 5	0.982 1	1.113 6	0.179

3 结论

开发了一种能反映异形夹杂角端部局部弹性现象的多边形超级夹杂角端部单元,将该超级单元与标

准的4节点杂交应力单元耦合在一起,即建立了一个求解异形夹杂问题的特殊新型杂交应力有限元方法。

通过文中给出的数值算例,我们可以得出以下结论:

- (1) 本文给出的方法不但精度高,而且使用单元数少;
- (2) 适用范围广,可以肯定,本文方法在求解复合材料细观力学问题方面将显示巨大的吸引力和应用前景;
- (3) 对于各向同性材料中含有单个矩形夹杂的问题,当几何尺寸比 $l/b > 10$ 时, l/b 对 F_{I,λ_1} 和 F_{II,λ_2} 的影响可以忽略不计,此时夹杂可以处理为一根纤维。

参考文献:

- [1] Chen DH. Analysis of singular stress field around the inclusion corner tip[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1994, 49(4): 533 - 546.
- [2] Eshelby JD. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems[J]. Proceeding of the Royal Society of London, 1957, A241(1226): 376 - 396.
- [3] 刘一华, 许金泉, 丁皓江. 纤维端部的界面裂纹分析[J]. 力学学报, 1999, 31(3): 285 - 291.
- [4] Dong CY, Lo SH, Cheung YK. Stress analysis of inclusion problems of various shapes in an infinite anisotropic elastic medium[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2003, 192(5 - 6): 683 - 696.
- [5] Chen MC, Sze KY. A novel hybrid finite element analysis of bimaterial wedge problems[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2001, 68(13): 1 463 - 1 476.
- [6] Pian THH. Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions[J]. The American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 1964, 2(7): 1 333 - 1 336.
- [7] Tong P, Pian THH, Lasry SJ. A hybrid-element approach to crack problems in plane elasticity[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1973, 7(3): 297 - 308.
- [8] 平学成, 陈梦成, 谢基龙, 李强. 基于新型裂尖杂交元的压电材料断裂力学研究[J]. 力学学报, 2006, 38(3): 407 - 413.
- [9] Chen MC, Ping XC. A novel hybrid finite element analysis of inplane singular elastic field around inclusion corners in elastic media[J]. International Journal of Solids and Structures, 2009, 46(15): 2 527 - 2 538.
- [10] Xu JQ, Liu YH, Wang XG. Numerical methods for the determination of multiple stress singularities and related stress intensity coefficients[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1999, 63(6): 775 - 790.
- [11] Liu YH, Wu ZG, Liang YC, Liu XM. Numerical methods for determination of stress intensity factors of singular stress fields[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2008, 75(16): 4 793 - 4 803.
- [12] Chen MC, Yu HQ. Three-dimensional surface crack analysis of elastic half-space under rolling contact load[J]. International Journal of Computational Mechanics, 2009, 6(2): 317 - 332.

A Hybrid Finite Element Analysis of Singular Stress Fields around an Irregular Inclusion Corner

PING Xue-cheng, CHEN Meng-cheng

(Key Laboratory of Conveyance and Equipment of Chinese Ministry of Education, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: Firstly, a super n-sided polygonal element is developed to simulate local elastic behavior around an inclusion corner by a one-dimensional finite element method-based eigenanalysis and Hellinger-Reissner principle. The super element is then incorporated with standard four-node hybrid-stress elements to constitute a hybrid-stress finite element method for the analysis of local singular stress fields arising from inclusion corners. Two numerical examples are finally given, which indicates that the method has good calculating accuracy and wide-range application in analyzing compound materials and relationship of mechanical behavior.

Key words: inclusion corner; singular elastic field; stress intensity coefficient; hybrid finite element method

(责任编辑:王全金)