文章编号:1005-0523(2009)05-0089-04

两类图的算术标号

刘二根,武 丹,蔡克文

(华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要:对于一个(p,q)图G,如果存在一个$V(G)$到非负整数集N_0的一个映射f(称为顶点标号)满足:(1) $f(u)\neq f(v)$,其中$u\neq v$,且$u,v\in V(G)$;(2) $\{f(u)+f(v)\mid uv\in E(G)\}=\{k,k+d,\cdots,k+(q-1)d\}$,称图$G$为$(k,d)$-算术图。证明了图$F_{m,4}$是$(d,2d)$-算术图和图$F_{m,6}$是$(d,3d)$-算术图。

关 键 词:算术图;标号;图$F_{m,4}$;图$F_{m,6}$

中图分类号:O157.5 **文献标识码**:A

本文所讨论的图都是无向、无重边和环的简单图,文中未加定义和说明的术语与符号参阅文献[1、2]。

图的标号通常分为两大类:一类是减性的,即边的标号用它的端点的标号之差得到;另一类是加性的,即边的标号用它的端点的标号之和得到。例如,众所周知的"优美标号"是减性的,"协调标号"是加性的。1990年,B.D.Achaya和S.M.Hegde引入了图的算术标号[1],它是一种较广泛的加性标号,对解决合资经营中权利和义务的分担问题有应用价值。

定义1[3] 对于一个(p,q)-图G,如果存在一个$V(G)$到非负整数集N_0的一个映射f(称为顶点标号)满足:

(1) $f(u)\neq f(v)$,其中$u\neq v$,且$u,v\in V(G)$;

(2) $\{f(u)+f(v)\mid uv\in E(G)\}=\{k,k+d,\cdots,k+(q-1)d\}$.

则称图G为(k,d)-算术图。

定义2[4] 我们把顺序有一个公共点的m个C_4的并图记作$F_{m,4}$,同理把顺序有一个公共点的m个C_6的并图记作$F_{m,6}$。

引理1[5] 设$x_1,x_2,\cdots,x_n\in N_0$且$x_i$两两不同,令$x'_i=x_i+\gamma$,其中$\gamma\in N_0$,若$x_i+x_j(i\neq j)$为等差数列,则$x'_i+x'_j$也为等差数列,$i,j=1,2,\cdots,n$。

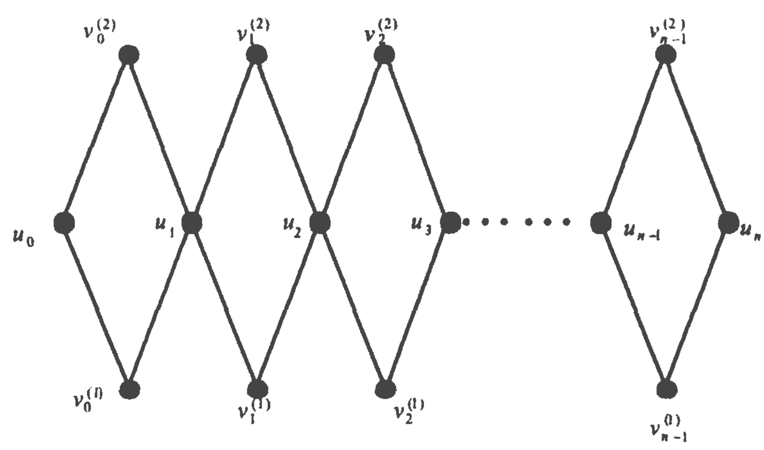

图1 图$F_{m,4}$

收稿日期:2009-05-22

基金项目:江西省自然科学基金(0611009);教育厅科研项目(GJJ08254)

作者简介:刘二根(1965-),男,江西省吉水县人,教授,主要从事应用数学研究。

1 主要结果及证明

定理1 图 $F_{m,4}$是$(d,2d)$-算术图。

证明 如图1所示

对图 $F_{m,4}$各点的标号如下:

$f(u_i)=2id, i=0,1,2,\cdots,n$;

$f(v_i^{(1)})=d+6id, i=0,1,2,\cdots,n$;

$f(v_i^{(2)})=5d+6id, i=0,1,2,\cdots,n$。

则标号 f 满足:$f(u)\neq f(v)$,其中 $u\neq v$ 且 $u,v\in V(F_{m,4})$。

下用数学归纳法证明$\{f(u)+f(v)\mid uv\in E(G)\}$为等差数列。事实上

当 $m=1$ 时,有

$$f(u_0)=0, f(u_1)=2d, f(v_0^{(1)})=d, f(v_0^{(2)})=5d,$$

故$\{f(u)+f(v)\mid uv\in E(F_{1,4})\}=\{d,3d,5d,7d\}$为等差数列,且公差为 $2d$。

假设对 $m=k-1$,有

$\{f(u)+f(v)\mid uv\in E(F_{k-1,4})=\{d,3d,5d,\cdots,8kd-9d\}$为等差数列,且公差为 $2d$。

则当 $m=k$ 时

$\{f(u)+f(v)\mid uv\in E(F_{k,4})\}=\{f(u)+f(v)\mid uv\in E(F_{k-1,4})\}\cup\{f(v_{k-1}^{(1)})+f(u_{k-1}),$

$f(v_{k-1}^{(2)})+f(u_{k-1}), f(u_k)+f(v_{k-1}^{(1)}), f(u_k)+f(v_{k-1}^{(2)})\}$

$=\{d,3d,5d,\cdots,8kd-9d\}\cup\{8kd-7d,8kd-3d,8kd-5d,8kd-d\}$

$=\{d,d+2d,d+4d,\cdots,d+(4k-1)\times 2d\}$,

故$\{f(u)+f(v)\mid uv\in E(F_{k,4})=\{d,d+2d,d+4d,\cdots,d+(4k-1)\times 2d\}$为等差数列,且公差为 $2d$。

由数学归纳法得,所以对于所有的 m 而言,函数 $f: V(F_{m,4})\longrightarrow N_0$ 满足:

(1) $f(u)\neq f(v)$,其中 $u\neq v$,且 $u,v\in V(G)$;

(2) $\{f(u)+f(v)\mid uv\in E(G)\}=\{d,3d,5d,\cdots,8md-d\}$。

即 $F_{m,4}$是$(d,2d)$-算术图。

进一步我们可以推知 $F_{m,4}$也是一个$(d,2nd)$-算术图。

定理2 图 $F_{m,6}$是一个$(d,3d)$-算术图,其中 $m=2n$。

证明 如图2所示

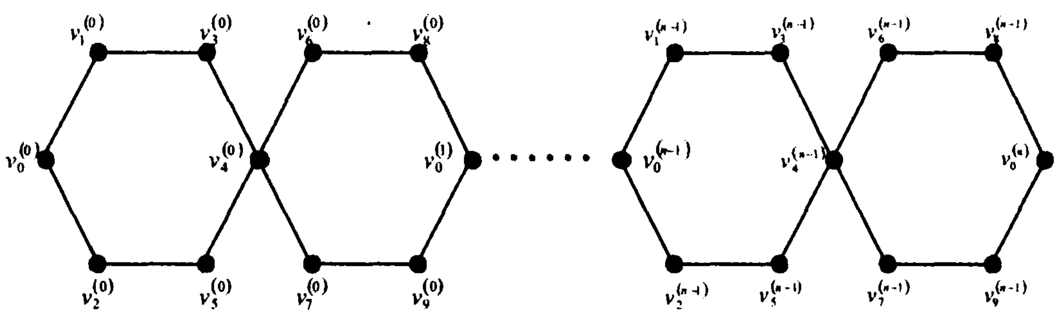

图2 图 $F_{m,6}$

当 $n=1$ 时,我们对图 $F_{2,6}$(如图3)进行如下算术标号:

即

$f(v_0^{(0)})=0, f(v_1^{(0)})=d, f(v_2^{(0)})=4d, f(v_3^{(0)})=9d, f(v_4^{(0)})=10d, f(v_5^{(0)})=3d$;

$f(v_6^{(0)})=6d, f(v_7^{(0)})=15d, f(v_8^{(0)})=16d, f(v_9^{(0)})=13d, f(v_0^{(1)})=18d$。

则 $f(u)\neq f(v)$,其中 $u\neq v$ 且 $u,v\in V(F_{m,6})$,

且 $\{f(u)+f(v)\mid uv\in E(F_{m,6})\}=\{d,4d,7d,10d,13d,16d,19d,22d,25d,28d,31d,34d\}$ 为等差数列,公差为 $3d$。

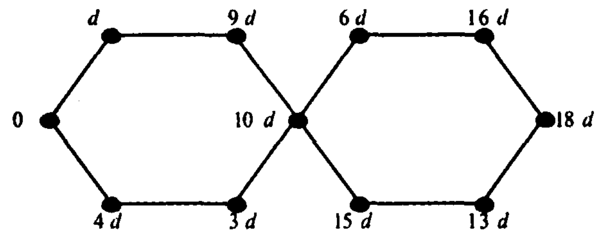

图3 图 $F_{2,6}$ 的标号

当 $n\geq 2$ 时,我们对 $F_{m,6}$ 的标号进行如下定义

设 $f: V(F_{m,6})\longrightarrow N_0$ 满足

$f(v_j^{(i)})=f(v_j^{(i-1)})+18d, i\geq 1, j=0,1,\cdots,9;\ i,j\in N_0$。

则 $f(u)\neq f(v)$,其中 $u\neq v$ 且 $u,v\in V(F_{m,6})$。

下证明 $\{f(u)+f(v)\mid uv\in E(F_{m,6})\}$ 为等差数列。事实上当 $n=1$ 时,$F_{2,6}$ 为 $(d,3d)$-算术图,且由上面的定义标号有 $f(v_j^{(i)})=f(v_j^{(i-1)})+18d, i\geq 1, j=0,1,\cdots,9;\ i,j\in N_0$。对于 $f(v_j^{(0)})$,$\{f(u)+f(v)\mid uv\in E(F_{m,6})\}$ 是一个公差为 $3d$ 的等差数列。由引理1可知 $f(v_j^{(1)})=f(v_j^{(0)})+18d$ 也是一个公差为 $3d$ 的等差数列。

同理对于每个单独的 i 而言,$f(v_j^{(i)})$ 都是一个公差为 $3d$ 的等差数列。

现在证明对于所有的 n,$\{f(u)+f(v)\mid uv\in E(F_{m,6})\}$ 为等差数列,即证明 $f(v_8^{(i-1)})+f(v_0^{(i)})$ 与 $f(v_0^{(i)})+f(v_1^{(i)})$ 相差 $3d$。

因为

$$f(v_8^{(i-1)})=f(v_8^{(0)})+(i-1)\times 18d=18id-2d,$$

$$f(v_0^{(i)})=f(v_0^{(0)})+18id=18id,$$

$$f(v_1^{(i)})=f(v_1^{(0)})+18id=18id+d,$$

$$f(v_8^{(i-1)})+f(v_0^{(i)})=36id-2d, f(v_0^{(i)})+f(v_1^{(i)})=36id+d。$$

所以 $f(v_8^{(i-1)})+f(v_0^{(i)})$ 与 $f(v_0^{(i)})+f(v_1^{(i)})$ 相差 $3d$,即公差为 $3d$。

又

$$f(v_8^{(n-1)})+f(v_0^{(n)})=36nd-2d=d+(2n\times 6-1)\times 3d=d+(6m-1)\times 3d。$$

所以对于所有的 n,$\{f(u)+f(v)\mid uv\in E(F_{m,6})\}=\{d,d+3d,d+6d,\cdots,d+(6m-1)\times 3d\}$ 为等差数列,且公差为 $3d$,即 $F_{m,6}$ 为 $(d,3d)$-算术图。

进一步我们可以推知 $F_{m,6}$ 亦是一个 $(d,3nd)$-算术图。

下面给出图 $F_{4,4}$ 和 $F_{4,6}$ 的具体标号。

(1) 图 $F_{4,4}$ 的标号如图4:

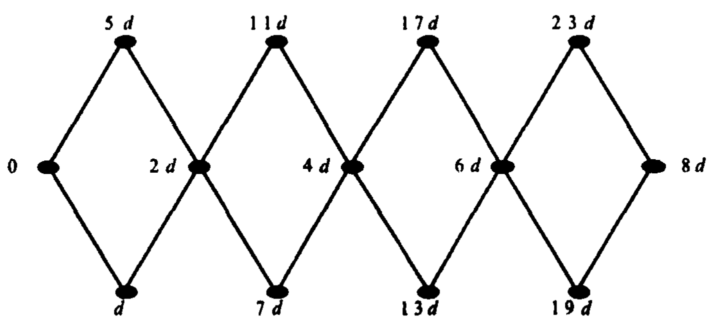

图4 图 $F_{4,4}$ 的标号

(2) 图 $F_{4,6}$ 的标号如图5:

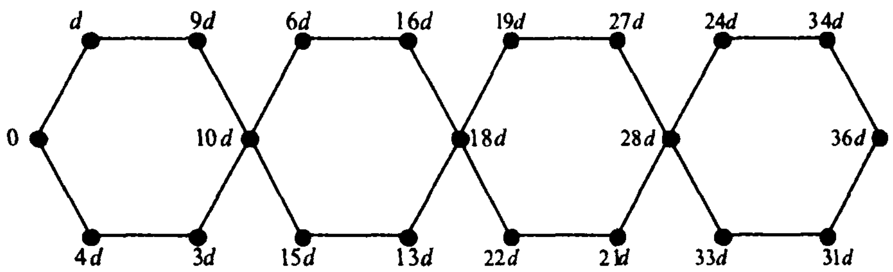

图5 图 $F_{4,6}$的标号

参考文献:

[1] Chartrand G, Lesniak L. Graphs and Digraphs[M]. Monterey: Wadsworth and Brooks \ Cole, 1996.

[2] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Applications[M]. Amsterdam: Elsevier North-Holland, 1976.

[3] Achaya B D and Hegde S M. Arithmetic graphs[J]. Journal of Graph Theory, 1990, 18(3) :275 - 299.

[4]马杰克.优美图[M].北京:科学技术出版社,1991.

[5]刘二根.关于算术图的一个注记[J].华东交通大学学报,2004,21(4):122 - 124.

Two Graphs Arithmetic Labeling

LIU Er-gen, WU Dan, CAI Ke-wen

(School of Basic Sciences, East China Jiaotong University, Nanchng 330013 China)

Abstract: For a (p, q) graph, if there is a non-negative integer set to a $V(G)$ to f (called the vertex label) to satisfy: (1) $f(u) \neq f(v)$, $u \neq v$ *and* $u, v \in V(G)$, (2) $\{f(u)+f(v) \mid uv \in E(G)\} = \{k, k+d, \cdots, k+(q-1)d\}$ then said graph G is called the (k, d)-arithmetic graph. In this paper, we get that the graph $F_{m,4}$ is $(d, 2d)$-arithmetic graph and the graph $F_{m,6}$ is $(d, 3d)$-arithmetic graph.

Key words: arithmetic graph; labeling; graph $F_{m,4}$; graph $F_{m,6}$

(责任编辑:王全金 吴泽九)