

文章编号:1005-0523(2009)05-0093-04

对心碰撞过程的分析及一种新的解法

任才贵

(华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要:详细讨论了碰撞过程中两小球的相互作用、形变及能量交换过程,对比完全非弹性碰撞、一般非弹性碰撞和完全弹性碰撞中的形变及能量变化特点,引入弹性度 k 的概念,给出弹性度 k 与恢复系数 e 的对应关系,给出了碰撞的一种新解法。

关键词:碰撞;恢复系数;弹性度;弹性形变;塑性形变

中图分类号: O313

文献标识码: A

关于两体碰撞问题,现有的物理学教材和文献对此进行了大量的论述,并普遍应用恢复系数 e 来进行求解,但是,正如文献[1]所述“牛顿总结了各种碰撞实验的结果,引入恢复系数 e 的概念……”,恢复系数 e 只是对实验结果的总结,是经验的结果,其所对应的物理意义并不明显,物理机制并不清晰。本文仍以两小球为例,从碰撞的具体过程出发,详细讨论了碰撞中两小球之间的相互作用、形变及能量交换过程,引入了弹性度的概念,给出了碰撞的一种新的解法。

设有两小球,小球1质量为 m_1 ,半径为 R_1 ,小球2质量为 m_2 ,半径为 R_2 ,不失一般性,令小球2开始时静止,小球1以速度 v 运动,并与小球2发生对心碰撞,如图1所示。设碰撞后小球1速度为 v_1 ,小球2速度为 v_2 ,以下均以此两小球作为研究对象。

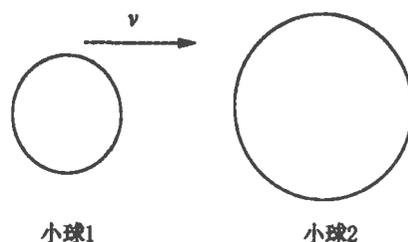


图1 两小球的对心碰撞

另外值得说明的一点是,本文以两小球碰撞后不发生破裂为前提进行讨论。

1 对形变的讨论

在两小球碰撞的过程中,两小球将产生一定量的形变。按照材料学的观点^[2],该形变可能包含两种情况:一种是可恢复的弹性形变,一种是不可恢复的永久形变或称为塑性形变。

1.1 弹性形变

为在小球中产生弹性形变,必须由外界提供一定的能量,这在碰撞中表现为两小球总动能的减少。这些能量转变成弹性形变势能存储在两小球的弹性形变中,在其后的过程中,小球中的弹性形变将逐渐恢复,其中的弹性形变势能也将随之释放出来。

1.2 塑性形变

为在小球中产生塑性形变,同样必须由外界提供一定的能量,这些能量在引起小球塑性形变的同时,将转变成热能等形式被消耗掉,而小球中的塑性形变将永久残留下来,不可恢复。为叙述方便,在此姑且将这部分能量称为塑性形变能,也即塑性形变能在引起物体塑性形变的同时,被转化成热能等其他形式的能量被消耗掉,而不是存储在物体的塑性形变中。

在一般情况下,当物体受外界作用而发生形变时,可能同时包含有可恢复的弹性形变和不可恢复的塑性形变两部分,两种形变在总形变量中所占的比例与构成物体的材料性能有密切的关系。在此,将物体发

收稿日期:2008-06-30

作者简介:任才贵(1971-),男,江西丰城人,副教授。

生形变时,存储在物体弹性形变中的弹性形变势能与被转化成热能等形式而被消耗的塑性形变能之和,称为总形变能。

2 碰撞中的形变及能量交换过程

在碰撞过程中,小球1的运动速度将由初速度 v 逐渐减小至末速度 v_1 ,小球2将由初速度 0 逐渐增大至末速度 v_2 ,由于碰撞后小球不破裂(也不击穿),故可知 $v_1 \leq v_2$,也即在碰撞过程中必存在一状态,此时两小球的运动速度相等且均为 u ,此状态对应于图2之中的 c 点^[3],以下简称为 c 状态。

结论1 在不发生破裂的碰撞中,必经过 c 状态。

当两球碰撞接触后,两球之间将存在正压力,此压力一方面将改变两小球的运动速度即动能,另一方面将在两小球内产生形变,图3描述了两小球碰撞时从刚接触(图3(a))到 c 状态(图3(b))再到两小球分离(图3(c))的过程。

(1) 在碰撞到达 c 状态前(即从图3(a)到图3(b)的过程中),小球1的运动速度大于小球2的运动速度,随着碰撞过程的进行,系统的总动能逐渐减小,两小球内的形变量逐渐增大。

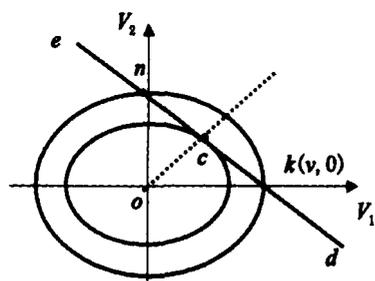


图2 碰撞能量图

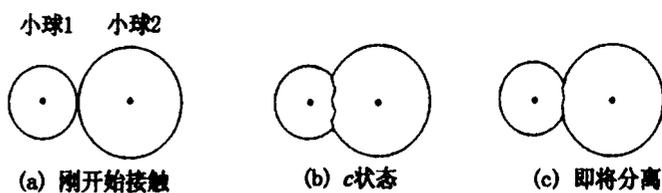


图3 碰撞过程分解

(2) 当系统到达 c 状态时,两小球具有相同的运动速度 u ,可以证明,此时系统的总动能达到最小可能值 E_{\min} ^[3],同时两小球中的形变量达到最大值,如前所述,此形变可能包含两部分,一部分是能够完全恢复的弹性形变,另一部分是不能恢复的永久形变或称塑性形变,两种形变在总形变量中所占的比例与构成两小球的材料性能有密切的关系。可见,在此过程中系统所损失的动能一部分转化成了弹性形变势能存储在两小球的弹性形变中,另一部分提供塑性形变能,在两小球中引起塑性形变的同时被转化成热能等形式的能量被消耗掉。

(3) 当碰撞到达 c 状态后,两小球中的形变量达到最大值,其中的塑性形变部分将残留下来,而弹性形变部分将在其后的过程中逐渐恢复,并释放出与之相对应的弹性形变势能,该势能的释放将使系统的动能逐渐增大,直至两小球分离,这对应于一般的非弹性碰撞。

两种特殊的情况是:如果两小球中的形变全部为塑性形变,则当两小球速度相等时,两球间将不再存在相互作用力,两小球将保持相同的速度一直运动下去,也既 c 状态就是碰撞的最后状态,这对应于完全非弹性碰撞;如果两小球中的形变全部为弹性形变,则在其后的过程中,该形变将完全恢复并释放相应的弹性形变势能,最后使系统的总动能达到碰撞前的水平,这对应于完全弹性碰撞的情形。

在此,对于两小球的对心碰撞过程,不加证明得出以下两个结论:

结论2 在完全弹性碰撞中,两小球碰撞后必须完全复原,不能残留有永久形变。

结论3 在非弹性碰撞中,小球中必残留有永久形变。

3 定量描述

仍以上述两小球为例,在碰撞前,系统的总动能为

$$E_0 = \frac{1}{2} m_1 v^2 \quad (1)$$

在 c 状态,两小球速度相同,均为 u ,由动量守恒定律有

$$m_1 v = (m_1 + m_2) u$$

$$u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v$$

由前述可知,此时系统的动能达到最小值

$$E_{\min} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) u^2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} E_0 \quad (2)$$

相应的有此时系统动能损失极大,记做 ΔE_{\max} ,损失的动能将在两小球中引起一定量的形变,易知:

$$\Delta E_{\max} = E_0 - E_{\min} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} E_0 \quad (3)$$

根据前面的分析可知, ΔE_{\max} 包含两部分,一部分被转化成弹性形变势能 ϵ 存储在两小球的弹性形变中,另一部分($\Delta E_{\max} - \epsilon$)提供塑性形变能,在小球中引起塑性形变的同时被转化成热能等形式被消耗。则碰撞完全结束后,由于弹性形变势能的释放,系统的总动能为

$$E_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = E_{\min} + \epsilon = \frac{m_1}{m_1 + m_2} E_0 + \epsilon \quad (4)$$

在此令 $k = \frac{\epsilon}{\Delta E_{\max}}$, k 为弹性形变势能占总形变能(包括弹性形变势能和塑性形变能)的比例,也既两小球中可恢复的形变占总形变的比例,姑且称之为弹性度。

则由(3)(4)式可知,碰撞结束后系统的总动能与碰撞前系统总动能的比为

$$E_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} E_0 + k \Delta E_{\max} = \frac{m_1 + km_2}{m_1 + m_2} E_0 \quad \frac{E_1}{E_0} = \frac{m_1 + km_2}{m_1 + m_2} \quad (5)$$

在此可根据动量守恒定律和(1)(4)(5)三式对碰撞进行求解:

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v \\ E_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \\ E_0 = \frac{1}{2} m_1 v^2 \\ \frac{E_1}{E_0} = \frac{m_1 + km_2}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

解得

$$v_1 = v - \frac{(1 + \sqrt{k}) m_2}{m_1 + m_2} v \quad (6)$$

$$v_2 = \frac{(1 + \sqrt{k}) m_1}{m_1 + m_2} v \quad (7)$$

4 k 与 e 的关系

对于上述两小球的碰撞问题,如果利用恢复系数 e 不难求得:

$$v_1 = v - \frac{(1 + e) m_2}{m_1 + m_2} v \quad (8)$$

$$v_2 = \frac{(1 + e) m_1}{m_1 + m_2} v \quad (9)$$

在碰撞前系统的总动能为

$$E_0 = \frac{1}{2} m_1 v^2$$

碰撞结束后系统的总动能为

$$E_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

则在碰撞结束后系统动能与碰撞前系统总动能之比为

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{m_1 + e^2 m_2}{m_1 + m_2} \quad (10)$$

对比(6)与(8)、(7)与(9)、(5)与(10)均可得

$$k = e^2 \quad (11)$$

5 总结

综上所述,当小球因碰撞而发生形变时,两小球中的总形变包含弹性形变和塑性形变两部分,弹性度 k 表示的是弹性形变势能占总形变能的比例,弹性度 k 所对应的物理意义明确,反映了碰撞过程中形变及能量交换的本质。

另外,根据 k 的物理意义可知, k 的取值范围应为 $0 \leq k \leq 1$, 其中

当 $k = 0$ 时,表示小球中的形变均为不可恢复的塑性形变,对应于完全非弹性碰撞。

当 $k = 1$ 时,表示小球中的形变均为可恢复的弹性形变,对应于完全弹性碰撞。

当 $0 < k < 1$ 时,表示的是一般非弹性碰撞。

可见,弹性度 k 与恢复系数 e 相比,在数值上对应关系简单,在物理意义上更加明确,可以证明,在某些特定的碰撞问题中,用恢复系数 e 来求解将很困难,但用弹性度 k 却可以很轻易的解出,关于这一点,限于篇幅,笔者将另行撰文说明,在此不再赘述。

参考文献:

- [1] 赵凯华, 罗蔚茵. 力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1995. 141 - 144.
- [2] 俞茂宏, 汪惠雄. 材料力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1986. 42 - 44.
- [3] 任才贵, 邱万英, 陈早生. 从总动能变化特点考察一维两体对心碰撞[J]. 大学物理, 2004, 23(5): 16 - 18.

An Analysis and New Algorithm for Central Collision Case

REN Cai-gui

(School of Basic Sciences, East China Jiaotong University, Nanchang, 330013, China)

Abstract: The paper discusses in detail the mutual action, deformation, and energy exchange of two pellets. By comparing the characteristics of completely inelastic collision, inelastic collision and completely elastic collision, the paper introduces the concept of elasticity degree k and gets relative corresponding relationship between elasticity degree and coefficient of restitution. It also presents an algorithm of the collision.

Key words: collision; coefficient of restitution; elasticity degree; elastic deformation; plastic deformation

(责任编辑:王全金 吴泽九)