

文章编号:1005-0523(2009)05-0097-06

简单无向不同构图的计数通式

周学松,金衍义,邱灵素

(浙江工商大学 统计与数学学院,浙江 杭州 310015)

摘要:简单无向不同构图的计数问题是一个十分困难的问题,利用生成群对点集合的二元子集的作用所得的轨道数,给出了计算由点所组成的简单无向不同构图的总数的通解公式。

关键词:同构;对称群;Burnside 引理;轨道;不动点

中图分类号:O157.1

文献标识码:A

计数是组合数学的一个重要内容,而实际问题中有很多的计数问题是十分困难的^[1]。求计数的通解公式更是困难。文献[2]对项链问题和不同构图问题利用 Burnside 引理分别求了一个具体的计数问题。徐保根教授^[3]给出了项链问题的计数通解式,本文利用生成群对 n 点集合的二元子集作用所得的轨道数,给出了简单无向不同构图问题的计数通项公式。

1 预备知识

定义 1.1^{[2]104} 设 G 是一个群,单位元是 e , Ω 是一个集合,如果 $\forall g \in G$ 对应 Ω 上一变换,即对 $\forall x \in \Omega, g(x) \in \Omega$, 满足

- (1) $e(x) = x, \forall x \in \Omega$,
- (2) $g_1 g_2(x) = g_1(g_2(x)), \forall x \in \Omega, \forall g_1, g_2 \in G$,

则称 G 作用于 Ω 上, $g(x)$ 为 g 对 x 的作用。

定义 1.2^{[2]105} 设 Ω 为目标集,群 G 作用于 Ω 上, $a \in \Omega$, 集合 $\Omega_a = \{g(a) \mid g \in G\}$, 称为 Ω 在 G 作用下的一个轨道。

定义 1.3^{[2]119} 设 $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$ 为两个简单无向图,若存在双射

$$g: V_1 \rightarrow V_2$$

满足 $(v_i, v_j) \in E_1 \Leftrightarrow (g(v_i), g(v_j)) \in E_2$

则称 G_1 与 G_2 同构。

直观上看,两个同构图的唯一区别就是顶点的表示符号不同。下面来讨论如何计算简单无向不同构图的数目。为此我们需要进一步描述这个问题^{[2]20}。

简记 $V = \{1, 2, \dots, n\}$ 是 n 点的集合, $Y = \{(i, j) \mid i, j \in V, i \neq j, (i, j) = (j, i)\}$ 是 V 的二元子集, $A = \{0, 1\}$, 则每一个映射

$$f: Y \rightarrow A$$

对应一个简单无向图 $G = (V, E)$, 其中

$$E = \{(v_i, v_j) \mid (i, j) \in Y, f((i, j)) = 1\}$$

全部 Y 到 A 的映射的集合记为

$$\Omega = \{f \mid f: Y \rightarrow A\} = A^Y$$

收稿日期:2009-08-05

基金项目:浙江工商大学资助项目(3120XJ030307)

作者简介:周学松(1956-),男,湖北武汉市人,教授 研究方向为运筹学与组合数学。

我们用 Ω 同时表示 n 点上的全部简单无向图(Ω 中图的点都是有标号的), 则

$$|\Omega| = |A|^{|Y|} = 2^{C_n^2}$$

下面考虑简单无向不同构图的数目。设 S_n 是 n 次对称群, 定义 S_n 对简单无向图图的集合 Ω 的作用为^{[2]20}

$$\forall g \in S_n, \forall G = (V, E) \in \Omega, g(G) = (V, g(E)),$$

其中: $g(E) = \{(g(v_i), g(v_j)) \mid (v_i, v_j) \in E\}$ 。

显然 $g(G)$ 与 G 是同构的, 它们在同一轨道上。因此, 非同构的图的数目就是 S_n 作用于集合 Ω 的轨道数, 可用 Burnside 引理求得。下面的关键问题是求 $\forall g \in S_n$ 在 Ω 上的不动点数, 而这又与对称群 S_n 对 Y 的作用相关。定义 S_n 对 Y 的作用为: $\forall g \in S_n, \forall \varphi = (i, j) \in Y, g(\varphi) = g((i, j)) = (g(i), g(j))$

当 f 为 g 的不动点时, 则 $g(f) = f$ 。此时对 $\forall \varphi \in Y$, 有 $f(\varphi) = g(f(\varphi)) = f(g(\varphi))$, 而 φ 与 $g(\varphi)$ 在 S_n 对 Y 的作用的同一轨道上, 所以 g 的不动点与 S_n 对 Y 的作用有很大关系。下面定理具体揭示了这种关系。

2 主要结论

定理 n 次对称群 S_n 作用于简单无向图集合 $\Omega = \{f \mid f: Y \rightarrow A\} = A^Y$, 其中: $Y = \{(i, j) \mid i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j, (i, j) = (j, i)\}$, $A = \{0, 1\}$, 则其轨道数为

$$N = \frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} \frac{n!}{1^{\lambda_1} \cdot \lambda_1! \cdot 2^{\lambda_2} \cdot \lambda_2! \cdots n^{\lambda_n} \cdot \lambda_n!} \cdot 2^{N_g}$$

其中: g 的类型为 $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \cdots n^{\lambda_n}$, 和式是对 S_n 中所有可能的不同置换类型求和, 公式中 N_g 为

$$N_g = \frac{1}{o(g)} \sum_{k=1}^{o(g)} (C_{\lambda_{k1}}^2 + \lambda_{k2})$$

这里 g^k 的类型为 $1^{\lambda_{k1}} 2^{\lambda_{k2}} \cdots n^{\lambda_{kn}}$, $o(g)$ 为 g 的阶。

注: 若 $C_{\lambda_{k1}}^2$ 中 $\lambda_{k1} < 2$, 则 $C_{\lambda_{k1}}^2$ 取 0。公式中的 $\lambda_{k1}, \lambda_{k2}$ 来自 g^k 置换类型中相应的 $\lambda_{k1}, \lambda_{k2}$ 。

3 定理证明

在证明定理之前, 先来证明几个引理。

引理 3.1 若 $g \in S_n, Y = \{(i, j) \mid i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j, (i, j) = (j, i)\}$, 生成群 $\langle g \rangle$ 对 Y 作用的轨道数为 N_g , 则

$$N_g = \frac{1}{o(g)} \sum_{k=1}^{o(g)} (C_{\lambda_{k1}}^2 + \lambda_{k2})$$

其中 g^k 的类型为 $1^{\lambda_{k1}} 2^{\lambda_{k2}} \cdots n^{\lambda_{kn}}$, $o(g)$ 为 g 的阶。 $C_{\lambda_{k1}}^2$ 中 $\lambda_{k1} < 2$, 则 $C_{\lambda_{k1}}^2$ 取 0。

证 由 Burnside 定理知

$$N_g = \frac{1}{o(g)} \sum_{k=1}^{o(g)} \chi(g^k) \quad (1)$$

其中 $\chi(g^k)$ 为元素 g^k 在 Y 中的不动点数。若 $(i, j) \in Y$ 是 g^k 的不动点, 则

$$(i, j) = g^k((i, j)) = (g^k(i), g^k(j))$$

于是

(1) $g^k(i) = i$ 且 $g^k(j) = j$, i, j 包括在 g^k 中长度为 1 的轮换内。在这种情况下 g^k 在 Y 中的不动点数为 $C_{\lambda_{k1}}^2$;

(2) $g^k(i) = j$ 且 $g^k(j) = i$, 则此时 i, j 包括在 g^k 中长度为 2 的轮换内。其不动点数为 λ_{k2} 。

综上所述, 当 g^k 的置换类型为 $1^{\lambda_{k1}} 2^{\lambda_{k2}} \cdots n^{\lambda_{kn}}$ 时, 则 g^k 在 Y 中的不动点为 $C_{\lambda_{k1}}^2 + \lambda_{k2}$, 代入 (1), 结论得证。

例1 取 $n = 3$ 得 $Y = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$, 对于 $g = (13) \in S_3$,

则 g, g^2 的类型分别为 $1^1 2^1, 1^3$

于是不同的轨道数为

$$N_g = \frac{1}{2}((0+1) + (C_3^2 + 0)) = 2$$

两个轨道分别为

$$\Omega_1 = \Omega_{(12)} = \{g((1,2)) = (3,2), g^2((1,2)) = (1,2)\} = \{(2,3), (1,2)\},$$

$$\Omega_2 = \Omega_{(13)} = \{g((1,3)) = (3,1) = (1,3) = g^2((1,3))\} = \{(1,3)\}.$$

引理 3.2 n 次对称群 S_n 作用于简单无向图集 $\Omega = \{f \mid f: Y \rightarrow A\} = A^Y$, 其中

$$Y = \{(i,j) \mid i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j, (i,j) = (j,i)\}, A = \{0,1\}$$

则 $g(\in S_n)$ 在 Ω 中的不动点数为

$$\chi(g) = 2^{N_g}$$

其中 g 为 $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n}$ 型置换, N_g 见引理 4.1。

证 由引理 3.1, 设 $\Psi_1, \Psi_2 \dots \Psi_{N_g}$ 为生成群 $\langle g \rangle$ 对 Y 作用的不同轨道, 则 Ω 中的元素 f 只要满足在每个轨道上取值相等就是 g 的不动点。即 f 的集合

$$T = \{f \mid \forall \varphi_i \in \Psi_i, gf(\varphi_i) = f(g(\varphi_i)) = f(\varphi_i), i = 1, 2 \dots N_g\}$$

是 g 的不动点集。

这是因为对 $\forall \varphi \in Y$, 总存在一个轨道 Ψ_k , 使得 $\varphi \in \Psi_k$, 所以有 $g(\varphi) \in \Psi_k$, 由 f 的定义得

$$g(f(\varphi)) = f(g(\varphi)) = f(\varphi)$$

故

$$\forall f \in T, \text{ 都有 } g(f) = f$$

下面证明 g 的不动点都满足集合 T 的条件。

显然 $m = o(g)$ 是有限数。设 f 是 g 的不动点, 则 $g(f) = f, \forall \varphi \in Y$, 有

$$g(f(\varphi)) = f(g(\varphi)) = f(\varphi)$$

再由 $g(\varphi) \in Y$, 有

$$g(f(g(\varphi))) = g(f(\varphi)) = f(\varphi)$$

即

$$f(g^2(\varphi)) = f(g(\varphi)) = f(\varphi)$$

同理

$$f(g^m(\varphi)) = f(g^{m-1}(\varphi)) = \dots = f(g(\varphi)) = f(\varphi) \quad (2)$$

而

$$\{g^i(\varphi) \mid \varphi \in Y, i = 1, 2 \dots m\}$$

是生成群 $\langle g \rangle$ 对 Y 作用的一个轨道, 由(2)知不动点 f 满足: 在生成群 $\langle g \rangle$ 对 Y 作用的轨道上值都相等。

$\therefore$ 集合 T 中的元素就是 g 的全部不动点

$\therefore \chi(g) = |T| = 2^{N_g}$ 即结论成立。

例2 取 $n = 3$ 得 $Y = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$, 所以 $|A^Y| = 8$ 。这八个映射 $f_1, f_2, \dots, f_8$ 具体为

$$f_1((12)) = f_1((13)) = f_1((23)) = 0; f_2((12)) = f_2((13)) = f_2((23)) = 1;$$

$$f_3((12)) = f_3((13)) = 0, f_3((23)) = 1; f_4((12)) = 0, f_4((13)) = f_4((23)) = 1;$$

$$f_5((12)) = f_5((13)) = 1, f_5((23)) = 0; f_6((12)) = 1, f_6((13)) = f_6((23)) = 0;$$

$$f_7((12)) = 1, f_7((13)) = 0, f_7((23)) = 1; f_8((12)) = 0, f_8((13)) = 1, f_8((23)) = 0.$$

取 $g = (13) \in S_3 \Rightarrow N_g = 2 \Rightarrow \chi(g) = 4$ 。 g 的四个不动点为: f_1, f_2, f_7, f_8 。

引理 3.3 若 σ 与 τ 为 S_n 的元素, σ 与 τ 的类型相同, 且生成群 $\langle \sigma \rangle$ 与 $\langle \tau \rangle$ 作用在目标集 Y 上的轨道数分别为 N_σ 和 N_τ 则

$$N_\sigma = N_\tau$$

证 $\because \sigma$ 与 τ 的置换类型相同, $\therefore o(\sigma) = o(\tau)$ 。作对应

$$\Psi: \langle \sigma \rangle \rightarrow \langle \tau \rangle$$

定义为

$$\Psi: \sigma^k \rightarrow \tau^k \quad (\forall \sigma^k \in \langle \sigma \rangle)$$

则

$$\sigma^{k_1} = \sigma^{k_2} \Leftrightarrow \sigma^{k_1 - k_2} = e \Leftrightarrow o(\sigma) \mid k_1 - k_2 \Leftrightarrow o(\tau) \mid k_1 - k_2 \Leftrightarrow \tau^{k_1 - k_2} = e \Leftrightarrow \tau^{k_1} = \tau^{k_2}$$

$\therefore \Psi$ 为映射且为单射, 显然 Ψ 也为满射。

故 Ψ 为双射。

再由

$$\Psi(\sigma^{k_1} \cdot \sigma^{k_2}) = \Psi(\sigma^{k_1 + k_2}) = \tau^{k_1 + k_2} = \tau^{k_1} \cdot \tau^{k_2} = \Psi(\sigma^{k_1}) \cdot \Psi(\sigma^{k_2})$$

$\therefore \langle \sigma \rangle$ 与 $\langle \tau \rangle$ 同构。

由 Burnside 引理得

$$N_\sigma = N_\tau。$$

例 3 取 $n = 4$ 得 $Y = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$, 对于 $\sigma = (13)(24), \tau = (12)(34) \in S_4$, 则 σ, σ^2 的类型分别为 $2^2, 1^4$ 且 τ, τ^2 的类型分别也是 $2^2, 1^4$ 。

于是不同的轨道数为

$$N_\sigma = \frac{1}{2}((0 + 2) + C_4^2) = 4 = N_\tau$$

σ 的四个不同的轨道为

$$\Omega_1 = \Omega_{(12)} = \{\sigma((1, 2)) = (3, 4), \sigma^2((1, 2)) = (1, 2)\} = \{(3, 4), (1, 2)\},$$

$$\Omega_2 = \Omega_{(13)} = \{\sigma((1, 3)) = (3, 1) = (1, 3) = \sigma^2((1, 3))\} = \{(1, 3)\},$$

$$\Omega_3 = \Omega_{(14)} = \{\sigma((1, 4)) = (3, 2) = (2, 3), \sigma^2((1, 4)) = (1, 3)\} = \{(2, 3), (1, 3)\},$$

$$\Omega_4 = \Omega_{(2,4)} = \{\sigma((2, 4)) = (4, 2) = (2, 4) = \sigma^2((2, 4))\} = \{(2, 4)\}。$$

τ 的四个不同的轨道为

$$\Omega_1 = \Omega_{(12)} = \{\tau((1, 2)) = (2, 1) = (1, 2) = \tau^2((1, 2))\} = \{(1, 2)\},$$

$$\Omega_2 = \Omega_{(13)} = \{\tau((1, 3)) = (2, 4), \tau^2((1, 3)) = (1, 3)\} = \{(2, 4), (1, 3)\},$$

$$\Omega_3 = \Omega_{(14)} = \{\tau((1, 4)) = (2, 3), \tau^2((1, 4)) = (1, 4)\} = \{(2, 3), (1, 4)\},$$

$$\Omega_4 = \Omega_{(3,4)} = \{\tau((3, 4)) = (4, 3) = (3, 4) = \tau^2((3, 4))\} = \{(3, 4)\}。$$

下面给出定理的证明。

证 由 n 次对称群 S_n 对简单无向图集 Ω 作用及 Burnside 定理得

$$N = \frac{1}{|S_n|} \sum_{g \in S_n} \chi(g)$$

由引理 3.2 知

$$\chi(g) = 2^{N_g}$$

其中

$$N_g = \frac{1}{o(g)} \sum_{k=1}^{o(g)} (C_{\lambda_{k1}}^2 + \lambda_{k2})$$

当 g_1 与 g_2 置换类型相同时, 由引理 3.3 知 $N_{g_1} = N_{g_2}$, 由引理 3.2 得

$$\chi(g_1) = \chi(g_2)$$

而 S_n 中与 g 类型相同的置换个数为^{[2]93}

$$\varphi(g) = \frac{n!}{1^{\lambda_1} \cdot \lambda_1! \cdot 2^{\lambda_2} \cdot \lambda_2! \cdots n^{\lambda_n} \cdot \lambda_n!}$$

其中 g 的置换类型为 $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \cdots n^{\lambda_n}$, 将以上各式代入 Burnside 公式得证定理 1。

在求生成群 $\langle g \rangle$ 对 Y 作用的轨道数时, 要知道 g^k 的置换类型, 才能求 $\chi(g^k)$ 。下面给出一个求 g^k 的置换类型的方法。

引理 3.4 设 σ 的置换类型为 i^i 型, 则 σ^k 的置换类型为 $\left(\frac{i}{d}\right)^d$, 其中 $d = (i, k)$ 。

证 由 $d = (i, k) \Rightarrow k = d \cdot k'$ 。若 σ 的置换类型为 i^i 型, 则 $o(\sigma) = i$ 。设 $o(\sigma^k) = m$, 由

$$(\sigma^k)^{\frac{i}{d}} = (\sigma^i)^{\frac{k}{d}} = e^{\frac{d \cdot k'}{d}} = e^{k'} = e \Rightarrow m \mid \frac{i}{d} \quad (3)$$

又由 $\sigma^{mk} = (\sigma^k)^m = e \Rightarrow i \mid mk \Rightarrow \frac{i}{d} \mid mk'$

而 $\left(\frac{i}{d}, k'\right) = 1 \Rightarrow \frac{i}{d} \mid m \quad (4)$

由(3)(4)得

$$m = \frac{i}{d}$$

于是 σ^k 为 $\left(\frac{i}{d}\right)^d$ 型置换。

由该引理, 若 g 为 $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \cdots n^{\lambda_n}$ 型置换, 则 g^k 为

$$\left(\frac{1}{d_1}\right)^{d_1 \lambda_1} \left(\frac{2}{d_2}\right)^{d_2 \lambda_2} \cdots \left(\frac{i}{d_i}\right)^{d_i \lambda_i} \cdots \left(\frac{n}{d_n}\right)^{d_n \lambda_n}$$

型置换, 其中 $d_i = (i, k)$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 。

例 4 若 $\sigma = (13)(24)(5789)(6101112) \in S_{12}$, 即 σ 的型为 $2^2 4^2$, 于是

$$\sigma^2 = (1)(2)(3)(4)(58)(79)(611)(1012) \text{ 的型为 } 1^4 2^4 = \left(\frac{2}{d_2}\right)^{d_2 \lambda_2} \left(\frac{4}{d_4}\right)^{d_4 \lambda_4}$$

此处 $d_2 = (2, 2) = 2, \lambda_2 = 2; d_4 = (4, 2) = 2, \lambda_4 = 2$

$$\sigma^3 = (13)(24)(5987)(6121110) \text{ 的型为 } 2^2 4^2 = \left(\frac{2}{d_2}\right)^{d_2 \lambda_2} \left(\frac{4}{d_4}\right)^{d_4 \lambda_4}$$

此处 $d_2 = (2, 3) = 1, \lambda_2 = 2; d_4 = (4, 3) = 1, \lambda_4 = 2$

4 应用

问: 由 5 个点可以组成多少个非同构的简单无向图。

解: 在群 S_5 中, 不同的置换类型有七种, 分别是 $1^5, 1^3 2^1, 1^2 3^1, 1^4 1^1, 1^1 2^2, 2^1 3^1, 5^1$, 在 S_5 中与 $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \cdots 5^{\lambda_5}$ 类型相同的置换有 $\frac{5!}{1^{\lambda_1} \cdot \lambda_1! \cdot 2^{\lambda_2} \cdot \lambda_2! \cdots 5^{\lambda_5} \cdot \lambda_5!}$ 个, 所以依此可求各种类型置换在 S_5 中的个数, 见表 1。

下面分别求这 7 类置换的生成群对 Y 作用的轨道数 N_g 。

若 g 为 $2^1 3^1$ 型置换, 则 $|\langle g \rangle| = 6$, 由引理 4.4 得: g^2 为 $\left(\frac{2}{(2,2)}\right)^{(2,2) \cdot 1} \left(\frac{3}{(3,2)}\right)^{(3,2) \cdot 1}$ 型置换, 即为 $1^2 3^1$ 型; g^3 为 $1^3 2^1$ 型, g^4 为 $1^2 3^1$ 型, g^5 为 $2^1 3^1$ 型, g^6 为 1^5 型。所以 $\langle g \rangle$ 中有 1 个 1^5 型; 1 个 $1^3 2^1$ 型; 2 个 $2^1 3^1$ 型; 2 个 $1^2 3^1$ 型, 共 6 个置换。

由引理 4.1 得:

$$N_g = \frac{1}{o(g)} \sum_{k=1}^{o(g)} (C_{\lambda_{k1}}^2 + \lambda_{k2}) = \frac{1}{6} [C_3^2 + (C_3^2 + 1) + 2 \times 1 + 2 \times 1] = 3;$$

同理,当 g 为 1^5 型置换时,则 $N_g = 10$;当 g 为 $1^3 2^1$ 型置换时,则 $N_g = 7$;
当 g 为 $1^1 2^2$ 型置换时,则 $N_g = 6$;当 g 为 $1^1 4^1$ 型置换时,则 $N_g = 3$;
当 g 为 5^1 型置换时,则 $N_g = 2$;当 g 为 $1^2 3^1$ 型置换时,则 $N_g = 4$ 。
最后由定理 1 得

$$N = \frac{1}{120}(1 \times 2^{10} + 10 \times 2^7 + 20 \times 2^4 + 30 \times 2^3 + 15 \times 2^6 + 20 \times 2^3 + 24 \times 2^2) = 34$$

所以,由 5 个点可构成 34 个非同构的简单无向图。

表 1 各类型置换在 S_5 中的个数

序号	类型	个数
1	1^5	1
2	$1^3 2^1$	10
3	$1^1 2^2$	15
4	$2^1 3^1$	20
5	$1^1 4^1$	30
6	5^1	24
7	$1^2 3^1$	20

5 结束语

文献[2] 中计算了 4 个点的简单无向图的情况,本文给出了非同构图的通解公式,每一步骤的目标明确,计算上取得很好的效果。本文方法还可求得许多其它问题的计数通式,将另文叙述。

参考文献:

[1] 理查德·A·布鲁迪.组合数学[M].北京:机械工业出版社,2005.
[2] 胡冠章.应用近世代数[M].北京:清华大学出版社,2006.37-101.
[3] 徐保根.关于项链问题的计算公式[J].华东交通大学学报,2003,20(5):23-25.

A General Method for Counting Different Isomorphic Graphs

ZHOU Xue-song, JIN Yan-yi, QIU Ling-su

(College of Statistics and Computing Science, Zhejiang Gongshang University Hangzhou, 310015, China)

Abstract: It is difficult to count different isomorphic graph. In this paper, the effect of generated subgroup on the state set of dualistic point subset of n points is studied and then used to solve the number of orbits, which finally helps formulate the number of different isomorphic graphs composed of n points.

Key words: isomorphic; symmetric group; Burnside Lemma; orbits; fixed points

(责任编辑:王建华 吴泽九)