

文章编号: 1005-0523(2010)01-0078-04

关于图的 Grundy 着色

徐保根

(华东交通大学 基础科学学院 江西 南昌 330013)

摘要: 设 $G=(V, E)$ 为一个图, 函数 $f: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ 被称为图 G 的一个 Grundy k -着色函数, 如果 f 为图 G 的一个真 k -着色函数且对于任何两种颜色 i 和 j ($1 \leq i < j \leq k$), 每个 j 色点的邻域中至少有一个 i 色点。图 G 的 Grundy 色数定义为 $\Gamma(G) = \max \{k \mid \text{存在图 } G \text{ 的 Grundy } k\text{-着色函数}\}$ 。给出了图的 Grundy 色数的若干上界, 并确定了几类特殊图的 Grundy 色数。

关键词: 着色; 色数; Grundy 着色; Grundy 色数

中图分类号: O157.5

文献标识码: A

1 定义及引理

本文所指的图均为无向简单图, 文中未说明的符号、术语同于文献[1]。

设 $G=(V, E)$ 为一个图, 若 $u \in V(G)$ 则 $N_G(u)$ 表示 u 点在 G 中的邻域, $d(u) = |N_G(u)|$ 为 u 点在 G 中的度。若 $S \subseteq V(G)$ 则 $G[S]$ 表示 S 在 G 中的导出子图。若 $u \in V(G)$ 则 $G-u = G[V \setminus \{u\}]$ 。若 $M \subseteq V(G)$ 则 $G-M = G[V \setminus M]$ 。 $\bar{G}$ 表示 G 的补图, P_n 、 C_n 和 K_n 分别表示 n 阶路、 n 阶圈和 n 阶完全图。

若 G 和 H 为两个点不交的图, 则用 $G+H$ 表示图 G 与 H 的直和图, 即在 $G \cup H$ 中将图 G 的每个顶点与图 H 的所有顶点连接而成的图。

定义 1.1^[1] 设 $G=(V, E)$ 为一个图, 一个函数 $f: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ 被称为图 G 的一个真 k -着色函数, 如果对任意 $uv \in E(G)$ 均有 $f(u) \neq f(v)$ 。图 G 的(点)色数定义为 $\chi(G) = \min \{k \mid \text{存在图 } G \text{ 的真 } k\text{-着色函数}\}$ 。

近些年来, 随着离散型事物的数学模型应用性的日益广泛, 图的着色问题已不再是仅限于对图的点着色、边着色及全着色问题, 各式各样的特征着色概念相继产生, 如均匀着色、List 着色等, 从而使图的着色理论研究内容越来越丰富。Christen C A^[2] 等人引入了如下 Grundy 着色概念:

定义 1.2^[2] 对于一个图 $G=(V, E)$, 一个函数 $f: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ 如果满足条件:

(1) 对 G 中任意相邻的两个点 u 和 v 均有 $f(u) \neq f(v)$;

(2) 对任意两个整数 i 和 j ($1 \leq i < j \leq k$), 若 $f(u) = j$ 则 $N_G(u)$ 中必有一点 v 使得 $f(v) = i$, 则称函数 f 为图 G 的一个 Grundy k -着色函数。图 G 的 Grundy 色数定义为 $\Gamma(G) = \max \{k \mid \text{存在图 } G \text{ 的 Grundy } k\text{-着色函数}\}$ 。

由上述定义不难看出: $\Gamma(G) \geq \chi(G)$ 对任意图 G 成立, 且对任意两个点不交的图 G 和 H 均有 $\Gamma(G \cup H) = \max \{\Gamma(G), \Gamma(H)\}$, 因此本文中我们只考虑连通图。

引理 1.3^[3] 对于任意图 G , 若 $v \in V(G)$ 则 $\Gamma(G-v) \geq \Gamma(G) - 1$ 。

引理 1.4 对于任意图 G , 若 $\Delta = \Delta(G)$ 为图 G 的最大度, 则 $\Gamma(G) \leq \Delta + 1$ 。

证明: 由定义 1.2 知, 存在图 G 的一个 Grundy $\Gamma(G)$ -着色函数 f 及 $u \in V(G)$, 使得 $f(u) = \Gamma(G)$, 而对于每个 $i \in \{1, 2, 3, \dots, \Gamma(G) - 1\}$ 在 $N_G(u)$ 中必有 v_i 使得 $f(v_i) = i$, 即有 $\Delta \geq |N_G(u)| \geq \Gamma(G) - 1$,

收稿日期: 2009-10-28

基金项目: 国家自然科学基金项目(10661007); 江西省自然科学基金项目(2007GZS0715); 江西省教育厅科学研究项目(GJJ09215)

作者简介: 徐保根(1963-), 男, 教授, 研究方向为运筹学与控制论。

引理 1.4 证毕。

引理 1.5^[3] 对于任意图 G 均有 $\Gamma(G + K_1) = \Gamma(G) + 1$

Zaker M^[3] 研究了二部图补图的 Grundy 色数, 并探讨了一个图与其补图的 Grundy 色数的关系。在本文中我们主要给出图的 Grundy 色数的上界, 并确定几类特殊图的 Grundy 色数。

2 Grundy 色数的上界

我们首先分别给一般图、树和二部图的 Grundy 色数的上界。

定理 2.1 对于任意图 G 若 $|E(G)| = m$ 则有 $\Gamma(G) \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 8m}}{2}$ 。

证明: 设 $\Gamma(G) = k$ f 为图 G 的一个真 Grundy k -着色函数。令 $V_i = \{v \in V(G) \mid f(v) = i\}$, 显然 $V_i \neq \varnothing$ ($i = 1, 2, \dots, k$)。当 $1 \leq i \leq j \leq k$ 时, 记 $E(V_i, V_j) = \{uv \in E(G) \mid u \in V_i, v \in V_j\}$ 且 $a_{ij} = |E(V_i, V_j)|$, 由定义知 $a_{ij} \geq 1$, 即得 $\sum_{j=i+1}^k a_{ij} \geq k - i$, 从而有

$$m = |E(G)| \geq \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k a_{ij} \geq \sum_{i=1}^{k-1} (k - i) = \frac{k(k-1)}{2}, \text{ 因此 } \Gamma(G) = k \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 8m}}{2}, \text{ 证毕。}$$

定理 2.2 对于任意 n 阶树 T 均有 $\Gamma(T) \leq 1 + \log_2 n$

证明: 定理等价于命题: 对于任意树 T 均有 $|V(T)| \geq 2^{\Gamma(T)-1}$ 。对 $\Gamma(T)$ 用数学归纳法:

当 $1 \leq \Gamma(T) \leq 3$ 时, 由于 $1 \leq \Gamma(T) \leq 2$ 时命题显然成立。而且 3 阶树只有 P_3 , 且 $\Gamma(P_3) = 2$, 因此, 当 $\Gamma(T) = 3$ 时 $|V(T)| \geq 4$, 命题成立。

假若命题对于任何满足 $\Gamma(T_0) \leq k-1$ ($k \geq 4$) 的树 T_0 均成立, 即有: 若存在 T_0 的一个真 Grundy j -着色函数 ($j \leq k-1$), 则 $|V(T_0)| \geq 2^{j-1}$ 。

现考虑任意一棵满足 $\Gamma(T) = k$ 的树 T f 为 T 的一个真 Grundy k -着色函数。

令 $M = \{v \in V(T) \mid f(v) = k\}$, $F = T - M$, 注意到 $M \neq \varnothing$, 任取 $u \in M$, 由定义 1.2 知 $|N_T(u)| \geq k-1$, 从而 F 中至少有 $k-1$ 个分支 $F_1, F_2, \dots, F_{k-1}$, 使得存在 $v_i \in V(F_i)$ 且 $f(v_i) = i$ ($1 \leq i \leq k-1$)。将 f 限制在每个分支 F_i 上, 显然是 F_i 的一个真 Grundy i -着色函数 ($1 \leq i \leq k-1$)。由归纳假设得 $|V(F_i)| \geq 2^{i-1}$, 因此我们有

$$|V(T)| = |M| + \sum_{i=1}^{k-1} |V(F_i)| \geq 1 + 2^{1-1} + 2^{2-1} + \dots + 2^{k-1-1} = 2^{k-1} = 2^{\Gamma(T)-1}$$

即命题对于任何满足 $\Gamma(T) = k$ 的树 T 也成立。由归纳原理, 定理 2.2 证毕。

定理 2.3 对于任意 n 阶二部图 G ($n \geq 2$) 均有 $\Gamma(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, 且此上界是最好可能的。

证明: 设 $G = (V_1 \cup V_2, E)$ 为一个二部图, $\Gamma(G) = k$ f 为图 G 的一个真 Grundy k -着色函数。由定义知: 存在 $u \in V(G)$ 使得 $f(u) = k$ 。不妨设 $u \in V_1$, 由于 $|N_G(u)| \geq k-1$, 注意到 G 为二部图 $N_G(u) \subseteq V_2$, 即有 $|V_2| \geq k-1$ 。由定义知: 存在 $v \in V_2$ 使得 $f(v) = k-1$, 从而存在 $k-2$ 个点 $u_i \in V_1$ 使得 $f(u_i) = i$ ($i = 1, 2, \dots, k-2$)。注意到 $u \in V_1$ 且 $u \neq u_i$, 因此

$$|V_1| \geq k-1, \text{ 即有 } n = |V_1| + |V_2| \geq k-1 + k-1 = 2k-2, \Gamma(G) = k \leq \frac{n}{2} + 1, \text{ 由于 } \Gamma(G) \text{ 为整数, 从而}$$

$$\text{有 } \Gamma(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \quad (*)$$

下面证明此上界是最好可能的。对 n 为奇数和偶数分别构造二部图如下:

当 $n = 2$ 或 3 时, 显然有二部图 $K_{1,1}$ 和 $K_{1,2}$, 且 $\Gamma(K_{1,1}) = \Gamma(K_{1,2}) = 2$ 。下面设 $n \geq 4$ 。

(1) 当 $n = 2k$ ($k \geq 2$) 为偶数时, 令 $G = (V_1 \cup V_2, E)$ 为一个完全二部图 $K_{k,k}$ 去掉 $k-1$ 条独立边所得的图。记 $V_1 = \{u_i \mid 1 \leq i \leq k\}$, $V_2 = \{v_i \mid 1 \leq i \leq k\}$, 所去掉 $k-1$ 条独立边为 $u_i v_i$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$)。定义图 G

的一个真 Grundy $k+1$ -着色函数 f 如下:

$$f(u_i) = i \quad (1 \leq i \leq k-1) \quad f(u_k) = k+1 \quad f(v_j) = j \quad (1 \leq j \leq k)$$

因此 $\Gamma(G) \geq k+1 \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ 结合(*)式得 $\Gamma(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$

(2) $n = 2k+1$ ($k \geq 2$) 为奇数时,在上述定义的图 G 中增加一个新顶点 w ,并将 w 点邻接 V_2 中的所有顶点,所得的图记为 G_0 。定义 G_0 的一个真 Grundy $k+1$ -着色函数 f_0 如下:

$$f_0(w) = k+1, \text{ 当 } v \neq w \text{ 时 } f_0(v) = f(v) \text{ 这里 } f \text{ 的定义同(1)。}$$

由此可见

$$\Gamma(G_0) \geq k+1 \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \text{ 同样由(*)得 } \Gamma(G_0) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \text{ 定理 2.3 证毕。}$$

定理 2.4 对于任意两个点不交的图 G 和 H 均有 $\Gamma(G+H) \geq \Gamma(G) + \Gamma(H)$

证明: 设 $\Gamma(G) = k_1$, $\Gamma(H) = k_2$, f_1 和 f_2 分别为图 G 和图 H 的真 Grundy k_1 和 k_2 -着色函数,定义 $G+H$ 的一个 Grundy k_1+k_2 -着色函数 f 如下:

$$f(v) = \begin{cases} f_1(v) & \text{当 } v \in V(G) \text{ 时} \\ k_1 + f_2(v) & \text{当 } v \in V(H) \text{ 时} \end{cases}$$

不难验证: f 为图 $G+H$ 的一个 Grundy k_1+k_2 -着色函数,因此 $\Gamma(G+H) \geq \Gamma(G) + \Gamma(H)$ 。定理 2.4 证毕。

定理 2.5 设 n 阶图 G 的度序列为 $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \cdots \geq d_n$, 则有

$$\Gamma(G) \leq \min \{d_1 + 1, d_2 + 2, \cdots, d_n + n\}$$

证明: 设 $\Gamma(G) = k$, 用 $d_G(v)$ 表示 v 点在 G 中的度数。

(反证) 假设存在某个 j ($1 \leq j \leq n$) 使得 $\Gamma(G) = k \geq d_j + j + 1$ 。

令 $M = \{v \in V(G) \mid d_G(v) > d_j\}$, 由 G 的度序列可见 $|M| \leq j-1$ 。记 $H = G - M$, 可见 $\Delta(H) = d_j$, 则由引理 1.3 得知: $\Gamma(H) \geq \Gamma(G) - |M| \geq k - (j-1) \geq d_j + 2 = \Delta(H) + 2$, 这与引理 1.3 矛盾。定理 2.5 证毕。

推论 2.6 对于任意 n 阶图 G 若 $|E(G)| = m$, 则有 $\Gamma(G) \leq \frac{n+1}{2} + \frac{2m}{n}$

证明: 设 n 阶图 G 的度序列为 $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \cdots \geq d_n$, 由定理 2.5 知: 对每个 i ($1 \leq i \leq n$) 均有 $\Gamma(G) \leq d_i + i$, 从而有 $\Gamma(G) \leq \frac{1}{n} [(d_1 + 1) + (d_2 + 2) + \cdots + (d_n + n)] = \frac{n+1}{2} + \frac{2m}{n}$, 推论 2.6 证毕。

3 特殊图的 Grundy 色数

下面探讨几类特殊图的 Grundy 色数;

定理 3.1 设 P_n 、 C_n 和 W_n 分别表示 n 阶路、圈和轮图, 则有

$$(1) \text{ 当 } n \geq 2 \text{ 时 } \Gamma(P_n) = \begin{cases} 2 & 2 \leq n \leq 3 \\ 3 & n \geq 4 \end{cases};$$

$$(2) \text{ 当 } n \geq 3 \text{ 时 } \Gamma(C_n) = \begin{cases} 2 & n = 4 \\ 3 & n \neq 4 \text{ 时} \end{cases};$$

$$(3) \text{ 当 } n \geq 3 \text{ 时 } \Gamma(W_n) = \begin{cases} 3 & n = 5 \\ 4 & n \neq 5 \text{ 时} \end{cases}。$$

证明: (1) $n = 2, 3$ 时是显然的。当 $n \geq 4$ 时,一方面,由引理 1.4 知 $\Gamma(P_n) \leq 3$ 。另一方面,可定义 P_n 的一个真 Grundy 3-着色函数 f 如下: 记 $P_n = (v_1 v_2 v_3 v_4 \cdots v_n)$, 定义 $f(v_i) = i$ ($1 \leq i \leq 3$) $f(v_j) = \frac{3 - (-1)^j}{2}$ ($j \geq 4$)。由此可见: 当 $n \geq 4$ 时 $\Gamma(P_n) = 3$ 。

(2) $n=3$ 时是显然的。当 $n \geq 5$ 时,一方面,由引理 1.4 知 $\Gamma(C_n) \leq 3$ 。另一方面:

当 n 为奇数时,可同(1)中一样地定义 C_n 的一个真 Grundy 3-着色函数。

当 n 为偶数时,记 $C_n = (v_1 v_2 v_3 v_4 \cdots v_n)$ 。定义 f 如下:

$$f(v_n) = 3, f(v_i) = i \ (1 \leq i \leq 3), f(v_j) = \frac{3 - (-1)^j}{2} \ (4 \leq j \leq n-1)。$$

不难验证: f 为 C_n 的一个真 Grundy 3-着色函数,即当 $n \geq 5$ 时, $\Gamma(C_n) = 3$ 。

(3) 根据(2)及引理 1.5 即得,定理 3.1 证毕。

定理 3.2 对任意完全 t -部图 $K(m_1, m_2, \cdots, m_t)$ 均有 $\Gamma(K(m_1, m_2, \cdots, m_t)) = t$

证明: 令 $G = K(m_1, m_2, \cdots, m_t)$, $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_t$, 其中 $|V_i| = m_i \ (1 \leq i \leq t)$ 。一方面,显然有 $\Gamma(G) \geq \chi(G) = t$ 。

另一方面,假若 $\Gamma(G) = k \geq t+1$,由定义知:存在 G 的一个真 Grundy k -着色函数 f 及一点 $u \in V(G)$,使得 $f(u) = k$,从而在 $N_G(u)$ 中必有 $k-1 \geq t$ 个顶点 $u_i \ (1 \leq i \leq k-1)$,使得 $f(u_i) = i$ 。而 $N_G(u)$ 中点至多在 $t-1$ 部顶点集中,故必有某个 V_s 包含 u_i 和 $v_j \ (1 \leq i \leq k-1)$ 。由定义知: $N_G(u_j)$ 中必有某个顶点 v 使得 $f(v) = i = f(u_i)$,注意到 $v \notin V_s$,从而 $u_i v \in E(G)$ 这与 f 的定义矛盾。定理 3.2 证毕。

参考文献:

- [1] BONDY J A, MURTY V S R. Graph Theory with Applications [M]. Amsterdam: Elsevier, 1976.
- [2] CHRISTEN C A, SELKOW S M. Some perfect coloring properties of graphs [J]. J. Combin. Theory Ser. B, 1979, 27(1): 49 - 59.
- [3] ZAKER M. Results on the Grundy chromatic number of graphs [J]. Discrete Math. 2006, 306: 3 166 - 3 173.

On Grundy Colorings of Graphs

Xu Baogen

(School of Basic Sciences, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: Let $G = (V, E)$ be a graph, a function $f: V \rightarrow \{1, 2, \cdots, k\}$ is said to be a Grundy k -coloring function of G . If f is a proper k -coloring of vertices in G such that for any two colors i and $j \ (1 \leq i \leq j \leq k)$, the neighborhood of any vertex with color j contains a vertex with color i . The Grundy chromatic number of G is defined as $\Gamma(G) = \max \{k \mid \text{there exists a Grundy } k\text{-coloring function } f \text{ of } G\}$. In this paper, we give some upper bounds for Grundy chromatic number of a graph and determine the Grundy chromatic numbers for several classes of graphs.

Key words: coloring; chromatic number; Grundy coloring; Grundy chromatic number

(责任编辑 王全金 吴泽九)