第27卷第2期 华东交通大学学报 Vol. 27 No. 2
2010年4月 Journal of East China Jiaotong University Apr. ,2010

文章编号:1005－0523(2010)02－0086－05

强奇异积分算子及其交换子在 Hardy 型空间上的有界性

刁俊东,叶晓峰,陈跃辉

(华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要: 当核 $K(x,y)$ 在 $x=y$ 附近满足较高的奇性时,得到强奇异 Calderón－zygmund 积分算子 $Tf(x)=\int K(x,y)f(y)\mathrm{d}y$ 的有界性及它与 Lipschitz 函数 $b\in \mathrm{Lip}_\beta(R^n)$ 生成的交换子 $[b,T]$ 在某类 Hardy 型空间 $H^p_{b^m,s}(R^n)$ 上的有界性。

关 键 词: 强奇异 Calderón－zygmund 算子; Lipschitz 函数; 交换子; Hardy 型空间。
中图分类号: O174.2 **文献标识码:** A

对于强奇异 Calderón－Zygmund 算子 T 来说,它是 Calderón－Zygmund 奇异积分算子的推广,其核函数在原处具有更强的奇性。它的模型是一类乘子算子 $T_{\alpha,\beta}$,其定义为: $(T_{\alpha,\beta})^{\xi}=\dfrac{e^{i|\xi|^\alpha}}{|\xi|^\beta}$其中 $0<\alpha<1$ 和 $\beta>0$。Fefferman 和 Stein 在文献[1]中把乘子算子扩充到一类卷子算子上,从而得到它的弱(1,1)和相关空间的有界性,Hirschman[2],Wainger[3]得到了它在 $L^q(1<q<\infty)$ 上的有界性。Alvarez[4]又进一步的研究了非卷积型奇异积分算子,使奇性核更强,从而广泛的应用到数学的众多分支和相关领域,并取得了大量的成果,这篇文章是进一步拓展了它在特殊空间的有界性。

1 定义及主要结果

定义1 $T:S\to S'$是有界的线性算子,称 T 是 Calderón－Zygmund 型强奇异积分算子,是指 T 满足以下3个条件:

(1) T 可以连续扩张为 $L^2\to L^2$ 上的有界算子;

(2) 存在一个在$\{(x,y):x\neq y\}$上的连续函数 $K(x,y)$,当 $2|y-z|^\alpha\leqslant|x-z|$时,满足

$$|K(x,y)-K(x,z)|+|K(y,x)-K(z,x)|\leqslant C\frac{|y-z|^\delta}{|x-z|^{n+\delta/\alpha}},$$

其中: $0<\delta\leqslant1$, $0<\alpha<1$,且还满足

$$\langle Tf,g\rangle=\int K(x,y)f(y)g(x)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x,\text{对任意的 } g,f\in S\ \mathrm{supp}f\cap\mathrm{suup}g\neq\varphi;$$

(3) 对某一β, $n(1-\alpha)/2\leqslant\beta<n/2$, T 和它的共轭算子 T^* 可以连续扩充为 L^q 到 L^2 上的有界算子,其中: $1/q=1/2+\beta/n$。

Alvarez[4]等证明了强奇异 Calderón－Zygmund 算子 T 的(L^∞,BMO)的有界性和弱(L^1,L^1)有界性;并且由插值定理可以得到 T 是 $L^p(R^n)$ 有界的, $1<p<\infty$。Lin Yan[5]得到强奇异 Calderón－Zygmund 算子与 Lipschitz 函数 b 生成的交换子$[b,T]$在 morrey 空间是有界的; Li Junfeng[6]得到了强奇异 Calderón－Zygmund 算子与 Lipschitz 函数 b 生成的交换子$[b,T]$从 $L^p(R^n)$ 到 $L^q(R^n)$ 上的有界性。这里涉及到 *Lipschitz* 函数 b,它是一类特殊函数,能够和算子结合构成交换子,扩大了算子的作用。

定义2 当$0<\beta_0<1$时,Lipschitz 空间$\dot\Lambda_{\beta_0}$是满足下列条件的函数组成的空间

收稿日期:2009－11－17
作者简介:刁俊东(1983－),男,硕士研究生,研究方向为调和分析。

$$\|f\|_{\Lambda_{\beta_0}} = \sup_{x,h\in R^n,h\neq 0} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|^{\beta_0}} < \infty,\quad 0<\beta_0<1。$$

定义 3　$b\in \mathrm{Lip}_\beta(R^n)(0<\beta<1)$，$m\in N$ 和 $0<p\leqslant 1$，$1\leqslant r\leqslant\infty$，$1<s<\infty$，一个函数 $a(x)$ 被称作 $(p,s;b^m)$ 原子，如果它满足以下条件：

(1) $\mathrm{suup} a\subset B(x_0,r)=\{x\in R^n:|x-x_0|<r\}$，对一些 $x_0\in R^n$ 和一些 $r>0$；

(2) $\|a\|_s\leqslant |B(x_0,r)|^{1/s-1/p}$；

(3) $\int_{R^n} a(x)b(x)^{m-i}\mathrm{d}x=0$，这里 $i=1,2,\cdots,m$。

定义 5　当 $0<p\leqslant 1$ 时称函数 f 属于 $H^p_{b^m,s}(R^n)$ 在 R^n 上，当且仅当在广义意义下 $f=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\lambda_j a$，这里每一个 a_j 是一个 $a(p,s;b^m)$ 原子且 $\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|^p<\infty$，此外

$$\|f\|_{H^p_{b^m,s}} \sim \inf\left\{\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|^p\right)^{1/p}\right\},$$

这里的下确界对一切 $f=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\lambda_j a$ 分解而取。

根据以上结论，想到它在 Hardy 型空间上是否有界呢？其次文献 [3] 得到了强奇异 Calderón – Zygmund 算子与 Lipschitz 函数 b 生成的交换子 $[b,T]$ 从 $L^p(R^n)$ 到 $L^q(R^n)$ 上的有界性，那么它在 Hardy 型空间上是否有界呢？本文将得到。

定理 1　T 是一个 Calderón – Zygmund 型强奇异积分算子，$n\geqslant 2$，α,β,δ 如定义 1 所述

$$\frac{1}{p}\geqslant 1+\frac{\delta}{n},q>1;$$

则 T 是从 $H^p_{b^m,s}(R^n)$ 到 $L^q(R^n)$ 有界。

定理 2　T 是一个 Calderón – Zygmund 型强奇异积分算子，$n\geqslant 2$，$\alpha,\beta,\delta,\beta_0$ 如定义 1 和定义 4 所述

$$n(1-\alpha)/2<\beta<n/2,\ 0<\beta_0<\min\{1,\delta/\alpha\}$$

其中：

$$1/p=1/q+\beta_0/n,\ b\in\mathrm{Lip}_\beta(R^n),\ q>1;$$

则 $[b,T]$ 是从 $H^p_{b^m,s}(R^n)$ 到 $L^q(R^n)$ 有界。

2　定理的证明

定理 1 的证明

证明　设 a_j 是一个紧支集在 $B=B(x_0,r)$ 上的 $a(p,s;b^m)$ 原子，根据题意知，证明定理 1 只需要证明 $\|Ta(x)\|_q\leqslant C$，因为

$$\|Tf(x)\|_q=\left(\int_{R^n}\left|\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}\lambda_j Ta\right)(x)\right|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}\leqslant C\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|\left(\int_{R^n}|Ta(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q};$$

当 $r>1$ 时

$$\|Ta(x)\|_q\leqslant\left(\int_{2B}|Ta(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}+\left(\int_{(2B)^C}|Ta(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}=I_1+I_2;$$

$$I_1\leqslant C\left(\int_{R^n}|a(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}\leqslant C\left(\int_B|a(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}\leqslant C|\boldsymbol{B}|^{1/q-1/p}\leqslant Cr^{n(1/q-1/p)}\leqslant C;$$

因为 $r>1$，所以当 $x\in(2\boldsymbol{B})^c$，$y\in\boldsymbol{B}$ 时，有

$$2|y-x_0|^\alpha\leqslant 2r^\alpha<2r<|x-x_0|,$$

由 a 的消失性和 Minkowski 不等式以及定义 1 中条件(2)，得到 I_2 的估计

$$I_2=\left(\int_{(2B)^c}\left|\int_B|K(x,y)-K(x,x_0)||a(y)|\mathrm{d}y\right|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}$$

$$\leqslant C\int_B |a(y)| \left(\int_{(2B)^c} |K(x,y) - K(x,x_0)|^q dx\right)^{1/q} dy$$

$$\leqslant C\int_B |a(y)| \left|\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{K+1}B\backslash 2^kB}\frac{|y-x_0|^{\delta q}}{|x-x_0|^{(n+\delta/\alpha)q}}dx\right|^{1/q} dy$$

$$\leqslant C\int_B |a(y)| dy r^{(\delta-n-\delta/\alpha)}\sum_{k=1}^{\infty}2^{k(-n-\delta/\alpha)}\left(\int_{2^kB}dx\right)^{1/q}$$

$$\leqslant Cr^{(\delta-n-\delta/\alpha+n/q+n-n/p)}\sum_{k=1}^{\infty}2^{k(n/q-n-\delta/\alpha)}$$

$$\leqslant C;$$

现在来估计当 $0 < r \leqslant 1$ **时的情况**

令: $B = B(x_0, r^\sigma)$, $\sigma = \dfrac{1-1/p+\delta/n}{1+\delta/n\alpha-1/q}$**,这里可以得到** $\sigma \leqslant 0 < \alpha$**,运用** Høldder **不等式**

$$\|Ta(x)\|_q \leqslant \left(\int_{2\tilde{B}} |Ta(x)|^q dx\right)^{1/q} + \left(\int_{(2\tilde{B})^C} |Ta(x)|^q dx\right)^{1/q} = II_1 + II_2;$$

$$II_1 \leqslant C\left(\int_{R^n} |a(x)|^q dx\right)^{1/q} \leqslant C\left(\int_{\tilde{B}} |a(x)|^q dx\right)^{1/q} \leqslant C|\tilde{B}|^{1/q-1/p} \leqslant Cr^{\sigma n(1/q-1/p)} \leqslant C;$$

因为 $0 < r \leqslant 1$, $\sigma \leqslant 0 \leqslant \alpha$**,所以当** $x \in (2B)^c$, $y \in B$ **时,有**

$$2|y-x_0|^\alpha \leqslant 2r^\alpha \leqslant 2r^\sigma \leqslant |x-x_0|,$$

此时由 Minkowski **不等式和定义** 1 **中条件**(2) **和上述结果知**

$$II_2 = \left(\int_{(2B)^C} \left|\int_B |k(x,y) - k(x,x_0)| |a(y)| dy\right|^q dx\right)^{1/q}$$

$$\leqslant C\int_B |a(y)| \left(\int_{(2B)^C} |k(x,y) - k(x,x_0)|^q dx\right)^{1/q} dy$$

$$\leqslant C\int_B |a(y)| \left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{K+1}\tilde{B}\backslash 2^K\tilde{B}}\frac{|y-x_0|^{\delta q}}{|x-x_0|^{(n+\delta/\alpha)q}}dx\right)^{1/q} dy$$

$$\leqslant Cr^{n(1-\frac{1}{p}+\frac{\delta}{n}-\sigma-\frac{\delta\sigma}{\alpha n}+\frac{\sigma}{q})}\sum_{k=1}^{\infty}2^{k(\frac{n}{q}-n-\frac{\delta}{\alpha})}$$

$$\leqslant C;$$

由以上两种情况讨论可知

$$\|Tf(x)\|_q \leqslant C\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|^p\right)^{1/p} \leqslant C\|f\|_{H^p_{b^m,s}};$$

定理 2 **的证明**

证明 设 a_j **是一个紧支集在** $B = B(x_0, r)$ **上的** $a(p, s; b^m)$ **原子,根据题意,证明定理** 2 **只需要证明** $\|[b,T]a(x)\|_q \leqslant C\|b\|_{\dot{\Lambda}_{\beta_0}}$**,这是因为**

$$\|[b,T]f(x)\|_q = \left(\int_{R^n}\left|\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}\lambda_j[b,T]a\right)(x)\right|^q dx\right)^{1/q} \leqslant C\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|\left(\int_{R^n}|[b,T]a(x)|^q dx\right)^{1/q};$$

$$\left(\int_{R^n}|[b,T]a(x)|^q dx\right)^{1/q} \leqslant \left(\int_{R^n}|[b(x)-b(x_0)]Ta(x)|^q dx\right)^{1/q} +$$

$$\left(\int_{R^n}|T([b(x)-b(x_0)]a)(x)|^q dx\right)^{1/q} = I + II;$$

首先来估计 II**,在这里由于** $q > 1$**,根据** T **是** $L^p(R^n)$ **有界的,当** $1 < p < \infty$ **时,所以可以得到** T **在** $L^q(R^n)$ **是有界的。再结合** Hølder **不等式和** $1/p = 1/q + \beta_0/n$ **可得**

$$II \leqslant C\left(\int_{R^n}|[b(x)-b(x_0)]a(x)|^q dx\right)^{1/q}$$

$$\leqslant C \|b\|_{\dot\Lambda_{\beta_0}} \left(\int_B |x-x_0|^{\beta_0 q} |a(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{1/q}$$
$$\leqslant C \|b\|_{\dot\Lambda_{\beta_0}} r^{\beta_0} r^{n(1/q-1/p)}$$
$$\leqslant C \|b\|_{\dot\Lambda_{\beta_0}};$$

对于 I，下面分情况讨论。

当 $r > 1$ 时

$$I = \|[b(x) - b(x_0)]Ta(x)\|_q \leqslant \left(\int_{2B} |[b(x) - b(x_0)]Ta(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{1/q} +$$
$$\left(\int_{(2B)^C} |[b(x) - b(x_0)]Ta(x)|^q dx\right)^{1/q} = I_1 + I_2;$$

$$I_1 \leqslant C \|b\|_{\dot\Lambda_{\beta_0}} \left(\int_B |x-x_0|^{\beta_0 q} |a(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{1/q}$$
$$\leqslant C \|b\|_{\dot\Lambda_{\beta_0}} r^{\beta_0} \left(\int_B |a(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{1/q}$$
$$\leqslant C \|b\|_{\dot\Lambda_{\beta_0}} r^{\beta_0} r^{n(1/q-1/p)}$$
$$\leqslant C \|b\|_{\dot\Lambda_{\beta_0}};$$

因为 $r > 1$，所以当 $x \in (2B)^c$，$y \in B$ 时，有

$$2|y - x_0|^\alpha \leqslant 2r^\alpha < 2r < |x - x_0|,$$

由 a 的消失性和 Minkowski 不等式以及定义 1 中条件(2)，得到 I_2 的估计

$$I_2 = \left(\int_{(2B)^c} \left|\int_B |K(x,y) - K(x,x_0)|\,|[b(x) - b(x_0)]|\,|a(y)|dy\right|^q \mathrm{d}x\right)^{1/q}$$
$$\leqslant C \|b\|_{\dot\Lambda_{\beta_0}} \int_B |a(y)| \left(\int_{(2B)^c} |K(x,y) - K(x,x_0)|^q |x-x_0|^{\beta_0 q} \mathrm{d}x\right)^{1/q} \mathrm{d}y$$
$$\leqslant C \|b\|_{\dot\Lambda_{\beta_0}} \int_B |a(y)| \left|\sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^{K+1}B\setminus 2^k B} \frac{|y-x_0|^{\delta q}}{|x-x_0|^{(n+\delta/\alpha)q}} |x-x_0|^{\beta_0 q} \mathrm{d}x\right|^{1/q} \mathrm{d}y$$
$$\leqslant C \|b\|_{\dot\Lambda_{\beta_0}} r^{(\beta_0+\delta-n-\delta/\alpha+n/q+n-n/p)} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(n/q-n-\delta/\alpha+\beta_0)}$$
$$\leqslant C \|b\|_{\dot\Lambda_{\beta_0}};$$

现在来估计当 $0 < r \leqslant 1$ 时的情形

令 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(x_0, r^\sigma)$，$\sigma = \dfrac{1 - 1/p + \delta/n}{1 + \delta/n\alpha - 1/q - \beta_0/n}$，$\sigma \leqslant \alpha$；其中 $1/p = 1/q + \beta_0/n$，应用 Hølder 不等式

$$\|[b(x) - b(x_0)]Ta(x)\|_q \leqslant \left(\int_{2B} |b(x) - b(x_0)|^q |Ta(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{1/q}$$
$$+ \left(\int_{(2B)^C} |b(x) - b(x_0)|^q |Ta(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{1/q} = II_1 + II_2;$$

$$II_1 \leqslant C \|b\|_{\dot\Lambda_{\beta_0}} \left(\int_{\tilde B} |x-x_0|^{\beta_0 q} |a(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{1/q}$$
$$\leqslant C \|b\|_{\dot\Lambda_{\beta_0}} r^{\sigma\beta_0} \left(\int_{\tilde B} |a(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{1/q}$$
$$\leqslant C \|b\|_{\dot\Lambda_{\beta_0}} r^{\sigma\beta_0} r^{\sigma n(1/q-1/p)}$$
$$\leqslant C \|b\|_{\dot\Lambda_{\beta_0}};$$

因为 $0 < r \leqslant 1$，$\sigma \leqslant \alpha$；当 $x \in (2\tilde B)^c$，$y \in B$ 时，$2|y - x_0|^\alpha \leqslant 2r^\alpha \leqslant 2r^\sigma \leqslant |x - x_0|$，此时由 Minkowski 不等式和定义 1 中的条件(2) 和上述结果知

$$
\begin{aligned}
II_2 &= \left(\int_{(2B)^C}\left|\int_B |k(x,y)-k(x,x_0)|\,|[b(x)-b(x_0)]|\,|a(y)|\,\mathrm{d}y\right|^q \mathrm{d}x\right)^{1/q} \\
&\leqslant C\,\|b\|_{\dot{\Lambda}_{\beta_0}}\int_B |a(y)|\left(\int_{(2B)^C}|k(x,y)-k(x,x_0)|^q\,|x-x_0|^{q\beta_0}\mathrm{d}x\right)^{1/q}\mathrm{d}y \\
&\leqslant C\,\|b\|_{\dot{\Lambda}_{\beta_0}}\int_B |a(y)|\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{K+1}B\backslash 2^K B}\frac{|y-x_0|^{\delta q}}{|x-x_0|^{(n+\delta/\alpha)q}}\,|x-x_0|^{q\beta_0}\mathrm{d}x\right)^{1/q} \\
&\leqslant C\,\|b\|_{\dot{\Lambda}_{\beta_0}} r^{n\left(1-\frac{1}{p}+\frac{\delta}{n}-\sigma-\frac{\delta\sigma}{\alpha n}+\frac{\sigma}{q}+\frac{\sigma\beta_0}{n}\right)}\sum_{k=1}^{\infty}2^{k\left(\frac{n}{q}-n-\frac{\delta}{\alpha}+\beta_0\right)} \\
&\leqslant C\,\|b\|_{\dot{\Lambda}_{\beta_0}};
\end{aligned}
$$

由以上两种情况讨论可知

$$
\|[b,T]f(x)\|_q \leqslant C\,\|b\|_{\dot{\Lambda}_{\beta_0}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|^p\right)^{1/p} \leqslant C\,\|b\|_{\dot{\Lambda}_{\beta_0}}\,\|f\|_{H^p_{b^m,s}}。
$$

参考文献:

[1] HIRSCHMAN I I. On multiplier transformations [J]. Duke Math,1957(26):221-242.

[2] WAING S. Special trigonometric series in k-dimensions [J]. Mem Amer Math Soc,1965(59):1-102.

[3] FEFFERMAN C. STEIN E M. H^P space of several variables [J]. Acta Math,1972(129):137-193.

[4] ALVARZE J,MIHMAN. H^P continuous properties of Calderón-Zygmund operators [J]. Math Anal Appl,1986(118):63-79.

[5] LIN YAN. Strongly singular Calderón-Zygmund operator and commutator on morrey type space [J]. Acta Mathematica Sinica English Series,2007,23(11):2 097-2 110.

[6] LI J F,LU S Z. Strongly singular integral operators on weighted Hardy space [J]. Acta Math,2006,22(3):767-772.

Boundedness of Strongly Singular Calderón-Zygmund Operators and their Commutators in Hardy-type Spaces

Diao Jundong,Ye Xiaofeng,Chen Yuehui

(School of Basic Sciences,East China Jiaotong University,Nanchang 330013,China)

Abstract: When the kernel $K(x,y)$ satisfies much higher strongly near the $x=y$,it shows that the strongly singular Calderón-zygmund integral operator and its commutator $[b,T]$ are bounded in some kinds of Hardy-type space $H^p_{b^m,s}(R^n)$ where the b is a Lipschitz function.

Key words: strongly singular C-Z operator; Lipschitz functions; commutator; Hardy-type space

(责任编辑 王建华)