文章编号:1005-0523(2010)03-0083-05

拟常曲率空间中具常平均曲率的闭超曲面

吴泽九

(华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要:设(N^{n+1},g)是$n+1$维单连通完备黎曼流形,其黎曼曲率张量取如下形式:$K_{ABCD}=a(g_{AC}g_{BD}-g_{AD}g_{BC})+b(g_{AC}\lambda_B\lambda_D-g_{AD}\lambda_B\lambda_C+g_{BD}\lambda_A\lambda_C-g_{BC}\lambda_A\lambda_D)$,则称$N^{n+1}$为拟常曲率空间。又设$M$是$N^{n+1}$中具常平均曲率的连通闭超曲面,$S$为$M$的第二基本形式模长的平方。若$N^{n+1}$的生成元切于$M$,则(1)当$S<2\sqrt{n-1}(a+b-|b|)$时,$M$是全脐超曲面;(2)当$S=2\sqrt{n-1}(a+b-|b|)$时,$M$是全脐超曲面或球面$S^{n+1}(a)$中的$H(r)$-环面$S^1(r)\times S^{n-1}(t)$。若$N^{n+1}$的生成元法于$M$,则(1)当$S=2\sqrt{n-1}a$时,$M$是全脐超曲面;(2)当$S=2\sqrt{n-1}a$时,$M$是全脐超曲面或$N^{n+1}$中的$H(r)$-环面$S^1(r)\times S^{n-1}(t)$。

关 键 词:拟常曲率空间;常平均曲率;超曲面;全脐
中图分类号:O186.12 **文献标识码**:A

设N^{n+1}是$n+1$维单连通完备黎曼流形,其黎曼曲率张量分量取如下形式

$$K_{ABCD}=a(g_{AC}g_{BD}-g_{AD}g_{BC})+b(g_{AC}\lambda_B\lambda_D-g_{AD}\lambda_B\lambda_C+g_{BD}\lambda_A\lambda_C-g_{BC}\lambda_A\lambda_D),\sum g^{AB}\lambda_A\lambda_B=1 \tag{1}$$

则称N^{n+1}为拟常曲率空间,其中a,b是N^{n+1}上的C^∞-函数,g是N^{n+1}的黎曼度量,$\boldsymbol{\lambda}$是N^{n+1}上的单位向量函数,称它为N^{n+1}的生成元。显然,当a为常数且$b=0$时,拟常曲率空间即为常曲率空间。对于拟常曲率空间中具常平均曲率的超曲面M,文[2,3]得到关于 M 第二基本形式模长平方 S 的积分不等式及 S 的值域估计等结果。本文讨论 S 满足一定条件下超曲面 M 的分类,推广文[4]中相应结论。

1 预备知识

文中各种指标范围规定如下:$1\leqslant A,B,C\cdots\leqslant n+1$;$1\leqslant i,j,k\cdots\leqslant n$;不特别说明时,$\sum$表示对重复指标求和。设$M$是拟常曲率空间$N^{n+1}$的闭超曲面,在$N^{n+1}$上选取局部标准正交标架场$\{e_A\}$,使得限制在$M$上,$\{e_i\}$与$M$相切。设$\{\omega_A\}$是关于$\{e_A\}$的对偶标架场,$\{\omega_{AB}\}$是$N^{n+1}$的联络形式。限制在$M$上,有

$$\omega_{n+1}=0,\ \omega_{n+1\,i}=\sum h_{ij}\omega_j \tag{2}$$

$$\mathrm{d}\,\omega_i=-\sum\omega_{ij}\wedge\omega_j,\ \omega_{ij}+\omega_{ji}=0 \tag{3}$$

$$\mathrm{d}\,\omega_{ij}=-\sum\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}+\frac{1}{2}\sum R_{ijkl}\omega_k\wedge\omega_l \tag{4}$$

$$R_{ijkl}=K_{ijkl}+(h_{ik}h_{jl}-h_{il}h_{jk}) \tag{5}$$

其中:R_{ijkl}与K_{ijkl}分别是M与N^{n+1}的曲率张量分量。M的第二基本形式模长的平方S与平均曲率H分别是

$$S=\sum_{i,j}(h_{ij})^2,\ H=\frac{1}{n}\sum_i h_{ii} \tag{6}$$

用h_{ijk}及h_{ijkl}分别表示h_{ij}的共变导数,则

$$\sum h_{ijk}\omega_k=\mathrm{d}\,h_{ij}-\sum h_{ki}\omega_{kj}-\sum h_{jk}\omega_{ki} \tag{7}$$

$$\sum h_{ijkl}\omega_l=\mathrm{d}\,h_{ijk}-\sum h_{ljk}\omega_{li}-\sum h_{ilk}\omega_{lj}-\sum h_{ijl}\omega_{lk} \tag{8}$$

所以

收稿日期:2009-12-14
基金项目:江西省教育厅科研项目(GJJ453);华东交通大学科学技术研究基金项目(06ZKJC04)

作者简介:吴泽九(1976-),男,硕士,讲师,研究方向为微分几何。

$$h_{ijk}-h_{ikj}=-K_{n+1ijk} \tag{9}$$
$$h_{ijkl}-h_{ijlk}=\sum h_{mi}R_{mjkl}+\sum h_{mj}R_{mikl} \tag{10}$$
由于 N^{n+1}的生成元 $\boldsymbol{\lambda}$ 切于 M,则
$$\lambda_{n+1}=0,\sum_i\lambda_i^2=1 \tag{11}$$
由(1)(11),对任意 i,j,k 有
$$K_{n+1ijk}=0 \tag{12}$$
从而(9)式变为
$$h_{ijk}=h_{ikj} \tag{13}$$
于是 h_{ij}的 Laplacian$\Delta h_{ij}=\sum h_{ijkk}$为
$$\Delta h_{ij}=\sum h_{kkij}+\sum h_{mk}R_{mijk}+\sum h_{im}R_{mkjk} \tag{14}$$
又假设 M 的平均曲率为常数,从而$\sum h_{kkij}=0$,由(5)式有
$$\sum h_{ij}\Delta h_{ij}=\sum h_{ij}h_{mk}K_{mijk}+\sum h_{ij}h_{im}K_{mkjk}+nH\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^3-S^2 \tag{15}$$
其中 $\boldsymbol{A}$ 表示矩阵(h_{ij}).选取适当的$\{e_i\}$,使得 $h_{ij}=k_i\delta_{ij}$,则
$$\sum h_{ij}\Delta h_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{i,j}(k_i-k_j)^2K_{ijij}+nH\sum k_i^3-S^2 \tag{16}$$
引理1 设$\{a_i|1\leqslant i\leqslant n\}$是满足条件$\sum_i a_i=0$ 的 n 个实数,则
$$\left|\sum a_i^3\right|\leqslant\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\left(\sum_i a_i^2\right)^{3/2}$$
等式成立当且仅当 $a_1,\cdots,a_n$ 中至少有 $n-1$ 个彼此相等。

2 主要结果及证明

定理1 设 M 是拟常曲率空间 N^{n+1}具常平均曲率的连通闭超曲面,N^{n+1}的生成元 $\boldsymbol{\lambda}$ 切于 M,则
(1) 当 $S<2\sqrt{n-1}(a+b-|b|)$时,M 是全脐超曲面。
(2) 当 $S=2\sqrt{n-1}(a+b-|b|)$时,M 是全脐超曲面或球面 $S^{n+1}(a)$中的 $H(r)$-环面 $S^1(r)\times S^{n-1}(t)$,其中 $r^2=\dfrac{1}{(\sqrt{n-1}+1)a}$,$t^2=\dfrac{\sqrt{n-1}}{(\sqrt{n-1}+1)a}$。

证明:不失一般性,假定 M 的平均曲率 H 非负。令 $f^2=S-nH^2$,由(1)有
$$\frac{1}{2}\sum_{i,j}(k_i-k_j)^2K_{ijij}=\frac{1}{2}\sum_{i,j}(k_i-k_j)^2[\mathrm{a}(\delta_{ii}\delta_{jj}-\delta_{ij}^2)+b(\delta_{ii}\lambda_j^2+\delta_{jj}\lambda_i^2-\delta_{ij}^2\lambda_i\lambda_j)]$$
$$=\frac{a}{2}\sum_{i,j}(k_i-k_j)^2+b\sum_{i,j}(k_i-k_j)^2\lambda_i^2 \tag{17}$$
由于
$$0\leqslant\sum_{i,j}(k_i-k_j)^2\lambda_i^2\leqslant\sum_{i,j}(k_i-k_j)^2\sum_i\lambda_i^2=\sum_{i,j}(k_i-k_j)^2=2nf^2 \tag{18}$$
所以当 $b\geqslant0$ 时
$$\frac{1}{2}\sum_{i,j}(k_i-k_j)^2K_{ijij}=\frac{a}{2}\sum_{i,j}(k_i-k_j)^2+b\sum_{i,j}(k_i-k_j)^2\lambda_i^2$$
$$\geqslant\frac{a}{2}\sum_{i,j}(k_i-k_j)^2$$
$$=anf^2 \tag{19}$$
当 $b<0$ 时
$$\frac{1}{2}\sum_{i,j}(k_i-k_j)^2K_{ijij}=\frac{a}{2}\sum_{i,j}(k_i-k_j)^2+b\sum_{i,j}(k_i-k_j)^2\lambda_i^2$$
$$\geqslant anf^2+2bnf^2$$
$$=(a+2b)nf^2 \tag{20}$$

联合(19)(20)得

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j}(k_i-k_j)^2K_{ijij}\geqslant(a+b-|b|)nf^2 \tag{21}$$

因为$\sum_i(k_i-H)=0,\sum_i(k_i-H)^2=f^2,\sum_i(k_i-H)^3=\sum_i k_i^3-3Hf^2-nH^3$,由引理1有

$$-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}f^3\leqslant\sum_i k_i^3-3Hf^2-nH^3 \tag{22}$$

则

$$nH\sum_i k_i^3\geqslant-nH\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}f^3+3nH^2f^2+n^2H^4 \tag{23}$$

由(16)(21) (23)有

$$\sum h_{ij}\Delta h_{ij}\geqslant f^2[\mathrm{n}(\mathrm{a}+b-|b|)+nH^2-\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}Hf-f^2] \tag{24}$$

因为

$$\begin{aligned}&n(a+b-|b|)+nH^2-\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}Hf-f^2\\&=n(a+b-|b|)-\frac{n}{2\sqrt{n-1}}S+\frac{1}{2\sqrt{n-1}}[(\sqrt{n-1}-1)f-(\sqrt{n-1}+1)\sqrt{n}H]^2\\&\geqslant n(a+b-|b|)-\frac{n}{2\sqrt{n-1}}S\end{aligned} \tag{25}$$

则(24)式变为

$$\sum h_{ij}\Delta h_{ij}\geqslant f^2[\mathrm{n}(\mathrm{a}+b-|b|)-\frac{n}{2\sqrt{n-1}}S] \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta S&=\sum(h_{ijk})^2+\sum h_{ij}\Delta h_{ij}\\&\geqslant(S-nH^2)[\mathrm{n}(\mathrm{a}+b-|b|)-\frac{n}{2\sqrt{n-1}}S]\end{aligned} \tag{27}$$

由(27)式及 M 紧致无边得

$$\int_M(S-nH^2)[\mathrm{n}(\mathrm{a}+b-|b|)-\frac{n}{2\sqrt{n-1}}S]\leqslant0 \tag{28}$$

(1) 当 $S<2\sqrt{n-1}(a+b-|b|)$时,(28)式中被积的第二个因式大于0,故 $S=nH^2$,即 M 是全脐超曲面。

(2) 当 $S=2\sqrt{n-1}(a+b-|b|)$时,从(27)式,$\frac{1}{2}\Delta S\geqslant0$,由 M 紧致无边及 Hopf 极大原理,S 是常数,$\Delta S=0$,(27)式为等式,从而(21)(22)(26)全为等式。

由(26)(27)为等式,有

$$h_{ijk}=0,\ \forall\ \mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k},\sum h_{ij}\Delta h_{ij}=0 \tag{29}$$

由引理1及(22)为等式有,$k_1,k_2,\cdots,k_n$ 中至少有 $n-1$ 个相等,下分情况讨论。

当 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 全相等,即 $k_1=k_2=\cdots=k_n$ 时,M 是全脐超曲面。

当 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 不全相等时,不妨假设

$$k_1\neq k_2=\cdots=k_n \tag{30}$$

因为(21)式等号成立,即

$$b\sum_{i,j}(k_i-k_j)^2\lambda_i^2=(b-|b|)nf^2 \tag{31}$$

成立。事实上,此时 $b\equiv0$,这是因为

(i) 若存在某点使得 $b>0$,由(11)(30)(31)式,在该点有

$$(k_1-k_2)^2[(\mathrm{n}-2)\lambda_1^2+1]=0$$

所以 $k_1=k_2$,这与条件 $k_1\neq k_2=\cdots=k_n$ 矛盾。

(ii) 若存在某点使得 $b<0$,由(11)(30)(31)式,在该点有

$$(k_1-k_2)^2[(n-2)\lambda_1^2-2n+3]=0$$

所以有 $k_1=k_2$,与条件 $k_1\neq k_2=\cdots=k_n$ 矛盾。

因为 $S=2\sqrt{n-1}(a+b-|b|)$,$b=0$ 及 S 为常数,因此 a 为常数,此时 N^{n+1}变为球面 $S^{n+1}(a)$。在 $S^{n+1}(a)$上选取适当$\{e_i\}$,使得 $h_{ij}=k_i\delta_{ij}$。(7)式中,令 $i=j$,由(29)式有

$$0=\mathrm{d}k_i+2\sum_k h_{ki}\omega_{ki}=\mathrm{d}k_i+2k_i\omega_{ii}=\mathrm{d}k_i$$

所以 k_i 为常数。再由(7)有

$$0=k_i\omega_{ij}+k_j\omega_{ji}=(k_i-k_j)\omega_{ij} \tag{32}$$

因此由(30)(32)有

$$\omega_{12}=0 \tag{33}$$

由(4)(33)得

$$0=\mathrm{d}\,\omega_{12}=\sum\omega_{1k}\wedge\omega_{k2}-\frac{1}{2}\sum R_{12kl}\omega_k\wedge\omega_l$$

如果对某一 m 使得 $\omega_{1m}\neq 0$ 和 $\omega_{m2}\neq 0$,由(32)有 $k_1=k_m=k_2$,这与 $k_1\neq k_2$ 矛盾,因此$\sum R_{12kl}\omega_k\wedge\omega_l=0$,故

$$R_{1212}=0 \tag{34}$$

由(5)(34)及 $S=2\sqrt{n-1}\,a$ 有

$$k_1k_2=-a \tag{35}$$

$$k_1^2+(n-1)k_2^2=2\sqrt{n-1}\,a \tag{36}$$

由(35)(36)有

$$k_1^2=a\sqrt{n-1},\ k_2^2=a/\sqrt{n-1}$$

因此 M 是球面$S^{n+1}(a)$中具有二个不同主曲率的超曲面,其重数分别是 1 重和 $n-1$ 重。由 M 的连通性与紧致性,类似文[7]讨论一样,M 是球面 $S^{n+1}(a)$中的 $H(r)$-环面 $S^1(r)\times S^{n-1}(t)$,其中:$r^2=\dfrac{1}{(\sqrt{n-1}+1)a}$,$t^2=\dfrac{\sqrt{n-1}}{(\sqrt{n-1}+1)a}$。定理 1 得证。

类似定理 1 的证明,N^{n+1}的生成元 λ 法于 M 时,可得

定理 2 设 M 是拟常曲率空间 N^{n+1}具常平均曲率的连通闭超曲面,N^{n+1}的生成元 λ 法于 M,则

(1) 当 $S<2\sqrt{n-1}\,a$ 时,M 是全脐超曲面.

(2) 当 $S=2\sqrt{n-1}\,a$ 时,M 是全脐超曲面或 N^{n+1}中的 $H(r)$-环面 $S^1(r)\times S^{n-1}(t)$,其中:$r^2=\dfrac{1}{(\sqrt{n-1}+1)a}$,$t^2=\dfrac{\sqrt{n-1}}{(\sqrt{n-1}+1)a}$。

参考文献:

[1] 白正国.拟常曲率黎曼流形在常曲率空间中的等距嵌入[J].数学年刊,1986,7(4):445-449.

[2] 宋卫东,潘雪艳.关于拟常曲率空间中具有常平均曲率超曲面[J].安徽师范大学学报,2004,27(3):149-152.

[3] 徐旭峰,孙振祖.拟常曲率 Riemann 流形中具常中曲率的超曲面[J].郑州大学学报,1993,25(2):21-27.

[4] HOU Z H.Hypersurfaces in a sphere with constant mean curvature[J].Proc of Amer Math Soc,1997,125(4):1 193-1 196.

[5] 吴泽九.共形平坦流形的一类具常平均曲率的完备超曲面[J].华东交通大学学报,2008,25(4):59-63.

[6] ALENCAR H,DO CARMO M.Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres[J].Proc Amer Math Soc,1994,120:1 223-1 229.

[7] CHERN S S,DO CARMO M & KOBAYASHI S.Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length[C].Functional Analysis and Related Fields.New York:Springer-Verlag,1970:59-75.

Closed Hypersurfaces in Quasi-constant Curvature Space with Constant Mean Curvature

Wu Zejiu

(School of Basic Sciences, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: Assume that (N^{n+1}, g) be a n+1-dimensional complete and simple connected Riemannian manifold and its Riemannian curvature tensors $K_{ABCD}=a(g_{AC}g_{BD}-g_{AD}g_{BC})+b(g_{AC}\lambda_B\lambda_D-g_{AD}\lambda_B\lambda_C+g_{BD}\lambda_A\lambda_C-g_{BC}\lambda_A\lambda_D)$, then N^{n+1} is said to a quasi-constant curvature space. Let M be a connected and closed hypersurface in a quasi-constant curvature N^{n+1} with constant mean curvature, S be the square of the length of second fundamental form of M. If the generating elements of N^{n+1} are tangent to M, then (1) when $S<2\sqrt{n-1}(a+b-|b|)$, M is a umbilical hypersurface; (2) when $S=2\sqrt{n-1}(a+b-|b|)$, M is a umbilical hypersurface or a $H(r)$-torus $S^1(r)\times S^{n-1}(t)$ of $S^{n+1}(a)$. If the generating elements of N^{n+1} are normal to M, then (1) when $S<2\sqrt{n-1}a$, M is a umbilical hypersurface; (2) when $S<2\sqrt{n-1}a$, M is a umbilical hypersurface or a $H(r)$-torus $S^1(r)\times S^{n-1}(t)$ of N^{n+1}.

Key words: quasi-constant curvature space; constant mean curvature; hypersurface; totally umbilical

(责任编辑　王建华)

(上接第61页)

TopDisc Topology Algorithm Based on Energy and Power Control

Xie Xin, Zhang Heng, Yu Zhongping, Zhou Juan

(School of Information Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: Topology control is an important researching direction in wireless sensor networks. Selecting a good topology control mechanisms is good for improving the efficiency of network communication and prolonging the life cycle of network. Based on TopDisc algorithm, this thesis proposes a topology control algorithm based on energy and power control, which can generate a more suitable network topology through adjusting nodes transmission power under the guidance of the energy. Simulating results show that the improved algorithm can form the less overlap of the clusters and survival time on the net may become longer.

Key words: WSN; topology control; TopDisc algorithm; power control; energy

(责任编辑　王建华)