第 27 卷第 3 期
2010 年 6 月

华 东 交 通 大 学 学 报
Journal of East China Jiaotong University

Vol.27 No.3
Jun.,2010

文章编号:1005-0523(2010)03-0092-04

基于卡方分布的更新函数确定

田永涛,彭丽莉,周传斌

(重庆师范大学 数计学院,重庆 400047)

摘要:讨论当变动时间间隔是独立同服从卡方分布的随机变量时,建立 χ^2 更新过程模型,获得 χ^2 更新过程的更新函数,并介绍了其在交通方面的一个应用。

关 键 词:卡方分布;更新过程;更新函数

中图分类号:O211.6　　　　**文献标识码**:A

1 χ^2 更新过程

定义 1[1] 设 $\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\cdots$ 是独立同服从自由度为 k(k 为偶数)的 χ^2 分布,

$$\text{令}\begin{cases} S_0=0 \\ S_n=\sum_{i=1}^{n}\zeta_i & (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

并记

$$\begin{cases} N(0)=0 \\ N(t)=\max\{n:S_n<t\} & (t>0) \end{cases}$$

则称 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 为 χ^2 更新过程。

2 预备定理

引理 1[2-3] S_n 服从自由度为 nk 的 χ^2 分布,其密度函数为

$$f_{nk}(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{nk}{2}}\Gamma(\frac{nk}{2})}x^{\frac{nk}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} & x>0 \\ 0 & x\leqslant 0 \end{cases}$$

引理 2[4] 设 $\{\zeta_i\}(i=1,2,\cdots)$ 是独立同服从自由度为 k(k 为偶数)的 χ^2 分布,$\{N(t),t\geqslant 0\}$ 是以
$\{\zeta_i\}$ 为更新间距的更新过程,则

$$P\{N(t)=n\}=\sum_{m=\frac{nk}{2}}^{\frac{(n+1)k}{2}-1}\frac{1}{2^m\Gamma(m+1)}t^m\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$$

引理 3 对于无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{\frac{nk}{2}+l}}{(\frac{nk}{2}+l)!}$ 有下述等式成立。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{\frac{nk}{2}+l}}{(\frac{nk}{2}+l)!}=\frac{2}{k}\sum_{m=0}^{\frac{k}{2}-1}\left\{\exp\left[-\frac{4\pi lmi}{k}+x\exp\left(\frac{4\pi mi}{k}\right)\right]-\exp\left(-\frac{4\pi lmi}{k}\right)\right\}$$

其中:$i=\sqrt{-1}$, $l=0,1,2,\cdots,\frac{k}{2}-1$, k 为偶数。

证明 $\dfrac{2}{k}\sum\limits_{m=0}^{\frac{k}{2}-1}\left\{\exp\left[-\dfrac{4\pi lmi}{k}+x\exp\left(\dfrac{4\pi mi}{k}\right)\right]-\exp\left(-\dfrac{4\pi lmi}{k}\right)\right\}=\dfrac{2}{k}\sum\limits_{m=0}^{\frac{k}{2}-1}\exp\left(-\dfrac{4\pi lmi}{k}\right)\cdot$

收稿日期:2010-02-15

作者简介:田永涛(1987—),男,硕士研究生,研究方向为应用概率统计。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[x\exp\left(\frac{4\pi mi}{k}\right)\right]^{n}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}\frac{2}{k}\sum_{m=0}^{\frac{k}{2}-1}\exp\left[\frac{4\pi mi(n-l)}{k}\right]$$

当 $n-l=\frac{jk}{2},j=1,2,\cdots$时

$$\frac{2}{k}\sum_{m=0}^{\frac{k}{2}-1}\exp\left[\frac{4\pi mi(n-l)}{k}\right]=\frac{2}{k}\sum_{m=0}^{\frac{k}{2}-1}\exp[2\pi mij]=1$$

当 $n-l\neq\frac{jk}{2},j=1,2,\cdots$时,利用几何级数计算。

$$\frac{2}{k}\sum_{m=0}^{\frac{k}{2}-1}\exp\left[\frac{4\pi mi(n-l)}{k}\right]=\frac{2}{k}\frac{1-\left[\exp\frac{4\pi i(n-l)}{k}\right]^{\frac{k}{2}}}{1-\left[\exp\frac{4\pi i(n-l)}{k}\right]}=0$$

所以,$\frac{2}{k}\sum_{m=0}^{\frac{k}{2}-1}\left\{\exp\left[-\frac{4\pi lmi}{k}+x\exp\left(\frac{4\pi mi}{k}\right)\right]-\exp\left(-\frac{4\pi lmi}{k}\right)\right\}=\sum_{n-l\in\{\frac{jk}{2},j=1,2,\cdots,\frac{k}{2}-1\}}\frac{x^{n}}{n!}=$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{\frac{nk}{2}+l}}{\left(\frac{nk}{2}+l\right)!},\qquad l=0,1,2,\cdots,\frac{k}{2}-1$$

引理4 对于无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{\frac{nk}{2}+l}}{\left(\frac{nk}{2}+l\right)!}$有下述等式成立。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{\frac{nk}{2}+l}}{\left(\frac{nk}{2}+l\right)!}=$$

$$\frac{4}{k^{2}}\left\{x\sum_{m=0}^{\frac{k}{2}-1}\exp\left[-\frac{4\pi mi(1-l)}{k}+x\exp\left(\frac{4\pi mi}{k}\right)\right]-l\sum_{m=0}^{\frac{k}{2}-1}\exp\left[-\frac{4\pi lmi}{k}+x\exp\left(\frac{4\pi mi}{k}\right)\right]+l\sum_{m=0}^{\frac{k}{2}-1}\exp\left(-\frac{4\pi lmi}{k}\right)\right\}$$

证明 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{\frac{nk}{2}+l}}{\left(\frac{nk}{2}+l\right)!}=\frac{2}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{nk}{2}x^{\frac{nk}{2}+l}}{\left(\frac{nk}{2}+l\right)!}=\frac{2}{k}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{nk}{2}+l\right)x^{\frac{nk}{2}+l}}{\left(\frac{nk}{2}+l\right)!}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{lx^{\frac{nk}{2}+l}}{\left(\frac{nk}{2}+l\right)!}\right)\tag{1}$$

由引理3的证明可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{(n-1)!}\cdot\frac{2}{k}\sum_{m=0}^{\frac{k}{2}-1}\exp\left[\frac{4\pi mi(n-l)}{k}\right]=\frac{2}{k}\sum_{m=0}^{\frac{k}{2}-1}\exp\left(-\frac{4\pi lmi}{k}\right)x\exp\left(\frac{4\pi mi}{k}\right)\exp\left[x\exp\left(\frac{4\pi mi}{k}\right)\right]=$$

$$\frac{2}{k}x\sum_{m=0}^{\frac{k}{2}-1}\exp\left[\frac{4\pi mi}{k}-\frac{4\pi lmi}{k}+x\exp\left(\frac{4\pi mi}{k}\right)\right]=\frac{2}{k}x\sum_{m=0}^{\frac{k}{2}-1}\exp\left[\frac{4\pi mi(1-l)}{k}+x\exp\left(\frac{4\pi mi}{k}\right)\right]$$

可得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{\frac{nk}{2}+l}}{\left(\frac{nk}{2}+l-1\right)!}=\frac{2}{k}x\sum_{m=0}^{\frac{k}{2}-1}\exp\left[-\frac{4\pi mi(1-l)}{k}+x\exp\left(\frac{4\pi mi}{k}\right)\right]$

代入(1)可得

$$\frac{2}{k}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{nk}{2}+l\right)x^{\frac{nk}{2}+l}}{\left(\frac{nk}{2}+l\right)!}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{lx^{\frac{nk}{2}+l}}{\left(\frac{nk}{2}+l\right)!}\right)=\frac{2}{k}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{\frac{nk}{2}+l}}{\left(\frac{nk}{2}+l-1\right)!}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{lx^{\frac{nk}{2}+l}}{\left(\frac{nk}{2}+l\right)!}\right)=$$

$$\frac{2}{k}\left\{\frac{2}{k}x\sum_{m=0}^{\frac{k}{2}-1}\exp\left[-\frac{4\pi mi(1-l)}{k}+x\exp\left(\frac{4\pi mi}{k}\right)\right]-\frac{2l}{k}\sum_{m=0}^{\frac{k}{2}-1}\exp\left[-\frac{4\pi lmi}{k}+x\exp\left(\frac{4\pi mi}{k}\right)\right]+\frac{2l}{k}\sum_{m=0}^{\frac{k}{2}-1}\exp\left(-\frac{4\pi lmi}{k}\right)\right\}=$$

$$\frac{4}{k^{2}}\left\{x\sum_{m=0}^{\frac{k}{2}-1}\exp\left[-\frac{4\pi mi(1-l)}{k}+x\exp\left(\frac{4\pi mi}{k}\right)\right]-l\sum_{m=0}^{\frac{k}{2}-1}\exp\left[-\frac{4\pi lmi}{k}+x\exp\left(\frac{4\pi mi}{k}\right)\right]+l\sum_{m=0}^{\frac{k}{2}-1}\exp\left(-\frac{4\pi lmi}{k}\right)\right\}$$ 得证

3 卡方更新过程的更新函数

定理 卡方更新过程的更新函数

当$\frac{k}{2}$为偶数时

$$m(t)=\frac{4}{k^2}e^{\frac{-t}{2}}\sum_{l=0}^{\frac{k}{2}-1}\{\frac{t}{2}\{\exp(\frac{t}{2})+2\sum_{m=1}^{\frac{k-4}{4}}\{\exp(\frac{t}{2}\cdot\cos\frac{4m\pi}{k})[\cos\frac{4m(1-l)\pi}{k}\cdot\cos(\frac{t}{2}\sin\frac{4m\pi}{k})+\sin\frac{4m(1-l)\pi}{k}\cdot\sin(\frac{t}{2}\sin\frac{4m\pi}{k})]\}+(-1)^{l+1}\exp(-\frac{t}{2})\}-l\{\exp(\frac{t}{2})+2\sum_{m=1}^{\frac{k-4}{4}}\{\exp(\frac{t}{2}\cdot\cos\frac{4m\pi}{k})\cdot[\cos\frac{4m\pi l}{k}\cdot\cos(\frac{t}{2}\sin\frac{4m\pi}{k})+\sin\frac{4m\pi l}{k}\cdot\sin(\frac{t}{2}\sin\frac{4m\pi}{k})]\}+(-1)^{l+1}l\exp(-\frac{t}{2})+2l\sum_{m=1}^{\frac{k-4}{4}}\cos\frac{4m\pi l}{k}\}$$

当$\frac{k}{2}$为奇数时

$$m(t)=\frac{4}{k^2}e^{\frac{-t}{2}}\sum_{l=0}^{\frac{k}{2}-1}\{\frac{t}{2}\{\exp(\frac{t}{2})+2\sum_{m=1}^{\frac{k-2}{4}}\{\exp(\frac{t}{2}\cdot\cos\frac{4m\pi}{k})[\cos\frac{4m(1-l)\pi}{k}\cdot\cos(\frac{t}{2}\sin\frac{4m\pi}{k})+\sin\frac{4m(1-l)\pi}{k}\cdot\sin(\frac{t}{2}\sin\frac{4m\pi}{k})]\}\}-l\{\exp(\frac{t}{2})+2\sum_{m=1}^{\frac{k-2}{4}}\{\exp(\frac{t}{2}\cdot\cos\frac{4m\pi}{k})[\cos\frac{4m\pi l}{k}\cdot\cos(\frac{t}{2}\sin\frac{4m\pi}{k})+\sin\frac{4m\pi l}{k}\cdot\sin(\frac{t}{2}\sin\frac{4m\pi}{k})]\}+2l\sum_{m=1}^{\frac{k-2}{4}}\cos\frac{4m\pi l}{k}\}$$

证明 $m(t)=\sum_{n=1}^{\infty}nP\{N(t)=n\}=\sum_{n=1}^{\infty}n\sum_{m=\frac{nk}{2}}^{\frac{(n+1)k}{2}-1}\frac{1}{2^m\Gamma(m+1)}t^me^{-\frac{t}{2}}=$

$$e^{-\frac{t}{2}}[\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2}+1)}t^{\frac{k}{2}}+\frac{1}{2^{\frac{k}{2}+1}\Gamma(\frac{k}{2}+2)}t^{\frac{k}{2}+1}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}\Gamma(k)}t^{k-1}]+$$

$$2e^{-\frac{t}{2}}[\frac{1}{2^k\Gamma(k+1)}t^k+\frac{1}{2^{k+1}\Gamma(k+2)}t^{k+1}+\cdots+\frac{1}{2^{\frac{3k}{2}-1}\Gamma(\frac{3k}{2})}t^{\frac{3}{2}k-1}]+\cdots+$$

$$ne^{-\frac{t}{2}}[\frac{1}{2^{\frac{nk}{2}}\Gamma(\frac{nk}{2}+1)}t^{\frac{nk}{2}}+\frac{1}{2^{\frac{nk}{2}+1}\Gamma(\frac{nk}{2}+2)}t^{\frac{nk}{2}+1}+\cdots+\frac{1}{2^{\frac{(n+1)k}{2}-1}\Gamma(\frac{(n+1)k}{2})}t^{\frac{(n+1)k}{2}-1}+\cdots=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-\frac{t}{2}}\left[\frac{1}{2^{\frac{nk}{2}}\Gamma(\frac{nk}{2}+1)}t^{\frac{nk}{2}}\right]+\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-\frac{t}{2}}\left[\frac{1}{2^{\frac{nk}{2}+1}\Gamma(\frac{nk}{2}+2)}t^{\frac{nk}{2}+1}\right]+\cdots+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-\frac{t}{2}}\left[\frac{1}{2^{\frac{(n+1)k}{2}}\Gamma(\frac{(n+1)k}{2})}t^{\frac{(n+1)k}{2}-1}\right]=e^{-\frac{t}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{nk}{2}}}{(\frac{nk}{2})!}\right]+e^{-\frac{t}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{nk}{2}+1}}{(\frac{nk}{2}+1)!}\right]+\cdots+$$

$$e^{-\frac{t}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{(n+1)k}{2}-1}}{(\frac{(n+1)k}{2}-1)!}\right]=\frac{4}{k^2}e^{\frac{-t}{2}}\left\{\frac{t}{2}\sum_{m=0}^{\frac{k}{2}-1}\exp[-\frac{4\pi mi}{k}+\frac{t}{2}\exp(\frac{4\pi mi}{k})]\right\}+$$

$$\frac{4}{k^2}e^{\frac{-t}{2}}\left\{\frac{t}{2}\sum_{m=0}^{\frac{k}{2}-1}\exp[\frac{t}{2}\exp(\frac{4\pi mi}{k})]-\sum_{m=0}^{\frac{k}{2}-1}\exp[-\frac{4\pi mi}{k}+\frac{t}{2}\exp(\frac{4\pi mi}{k})]+\sum_{m=0}^{\frac{k}{2}-1}\exp(-\frac{4\pi mi}{k})\right\}+\cdots+$$

$$\frac{4}{k^2}e^{\frac{-t}{2}}\{\frac{t}{2}\sum_{m=0}^{\frac{k}{2}-1}\exp[-\frac{4\pi mi(2-\frac{k}{2})}{k}+\frac{t}{2}\exp(\frac{4\pi mi}{k})]-(\frac{k}{2}-1)\sum_{m=0}^{\frac{k}{2}-1}\exp[-\frac{4\pi(\frac{k}{2}-1)mi}{k}+\frac{t}{2}\exp(\frac{4\pi mi}{k})]+(\frac{k}{2}-1)\sum_{m=0}^{\frac{k}{2}-1}\exp[-\frac{4\pi(\frac{k}{2}-1)mi}{k}]\} \tag{2}$$

当$\frac{k}{2}$为偶数时

式(2) 中第 $l+1$ 项为

$$\frac{4}{k^2}e^{-\frac{t}{2}}\{\frac{t}{2}\sum_{m=0}^{\frac{k}{2}-1}\exp[-\frac{4\pi mi(1-l)}{k}+\frac{t}{2}\exp(\frac{4\pi mi}{k})]-l\sum_{m=0}^{\frac{k}{2}-1}\exp[-\frac{4\pi lmi}{k}+\frac{t}{2}\exp(\frac{4\pi mi}{k})]+$$

$$l\sum_{m=0}^{\frac{k}{2}-1}\exp[-\frac{4\pi lmi}{k}]\}=\frac{4}{k^2}e^{-\frac{t}{2}}\{\frac{t}{2}\{\exp(\frac{t}{2})+2\sum_{m=1}^{\frac{k-4}{4}}\{\exp(\frac{t}{2}\cdot\cos\frac{4m\pi}{k})[\cos\frac{4m(1-l)\pi}{k}\cdot$$

$$\cos(\frac{t}{2}\sin\frac{4m\pi}{k})+\sin\frac{4m(1-l)\pi}{k}\cdot\sin(\frac{t}{2}\sin\frac{4m\pi}{k})]\}+(-1)^{l+1}\exp(-\frac{t}{2})\}-l\{\exp(\frac{t}{2})+$$

$$2\sum_{m=1}^{\frac{k-4}{4}}\{\exp(\frac{t}{2}\cdot\cos\frac{4m\pi}{k})[\cos\frac{4m\pi l}{k}\cdot\cos(\frac{t}{2}\sin\frac{4m\pi}{k})+\sin\frac{4m\pi l}{k}\cdot\sin(\frac{t}{2}\sin\frac{4m\pi}{k})]\}+$$

$$(-1)^{l+1}l\exp(-\frac{t}{2})+2l\sum_{m=1}^{\frac{k-4}{4}}\cos\frac{4m\pi l}{k}\},\ l=0,1,\cdots,\frac{k}{2}-1$$

将其代入即得结果。

当 $k=2$ 时，$m(t)=\frac{t}{2}$；

当 $k=4$ 时，$m(t)=\frac{t}{4}+\frac{1}{4}\exp(-t)-\frac{1}{4}$。

4　应用

实例[5]　在公路桥梁上某一位置观测车辆到达的时间间隔 20 个数据(秒)，从小到大排列为：3，4，4，6，6，6，8，8，10，11，13，21，29，42，45，48，49，55，59，68。用矩法估计 χ^2 分布的参数 $k=[24.75]=24$。经 k-s 检验结果观察值 $D_n=6.627\,3\times10^{-6}$。

对 $\alpha=0.05$，查 k-s 表临界值 $D_{20.005}=0.294$，有 $D_n=6.627\,3\times10^{-6}<0.294=D_{20.005}$，所以，车辆到达时间间隔可以用 χ^2 分布来描述。

我们可以将车辆到达时间间隔 ζ_i 视为服从自由度 $k=24$ 的 χ^2 分布，由于车辆到达时间间隔为独立同分布的，所以 $N(t)-[0,t)$ 内经过的车辆数为 χ^2 更新过程，由以上得出的 χ^2 更新过程的更新函数即可得出在$[0,t)$内经过桥梁的平均车辆数。

参考文献：

[1] 林升光. 结构应力 $S(t)$为 χ^2-更新过程时最大值概率分布及统计参数的估计[J]. 数理统计与应用概率，1994，12(4)：45-51.

[2] 胡迪鹤. 应用随机过程引论[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，1984.

[3] 孙荣恒. 随机过程及其应用[M]. 北京：清华大学出版社，2004.

[4] 徐安. 基于威布尔分布的更新函数确定方法研究[J]. 山东交通学院学报，2006，9：16-19.

[5] 林升光. 应力 $S(t)$为复合 χ^2-更新过程时结构可靠度渐近正态估计[J]. 数学物理学报，2001，21A(2)：245-251.

On Renewal Function Based on χ^2 Distribution

Tian Yongtao, Peng Lili, Zhou Chuanbing

(School of Mathematics and Computer Science, Chong Qing Normal University Chongqing 400047, China)

Abstract: When the renewal interval time is independent and subject to random variables of χ^2 distribution, this paper intends to form the model χ^2 renewal process and gains its χ^2 renewal function, and then introduces its application in the transportation.

Key words: χ^2 distribution; renewal process; renewal function

（责任编辑　刘棉玲）