文章编号:1005-0523(2010)03-0096-06

带有阻尼项的三维欧拉方程组球对称解

俞银晶,朱旭生,李 翠

(华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要:研究了一类带有阻尼项的三维等熵可压缩欧拉方程组经典解局部存在性和弱解的整体存在性。一方面利用对称双曲型方程组解的存在性结论,将该方程组转化为对称双曲型方程组,得到了经典解的局部存在性;另一方面由新坐标的引入,该方程组转化为比较熟悉的 p-系统,并通过 Glimm 格式证明了它的整体弱解的存在性。

关 键 词:欧拉方程组;球对称解;弱解;Glimm 格式

中图分类号:O175.4 **文献标识码**:A

本文研究了一类带有球对称性质的等熵可压缩气体动力学的欧拉方程组,方程组形式为

$$\begin{cases} \rho_t+(\rho u)_r=-\dfrac{2}{r}(\rho u) \\ (\rho u)_t+(\rho u^2+P)_r+\dfrac{2}{r}(\rho u^2)=-\alpha\rho u \end{cases} \tag{1}$$

式中:标量函数 ρ, u 分别表示气体密度、速度;$r>0$ 为空间变量;$t>0$ 为时间变量;P 表示气体压强,并满足 $P(\rho)=a^2\rho^\gamma$;a 为正常数;γ 为绝热指数;$-\alpha\rho u$ 表示阻尼项;α 为常数。

对于一维欧拉方程,经典解的存在性和爆破问题已经被很多人研究过了,在文献[1]中研究了一维带阻尼项的 Euler 方程组初边值问题的齐次 Dirichlet 边值情形。当初值在平衡解附近小扰动时,得到了时间整体解的存在唯一性,在文献[2]中介绍了大初值条件下,一维欧拉方程组经典解的爆破。因此,本文考虑把三维欧拉方程转化为一维欧拉方程,即通过球对称变换,降低维数,进而简化运算,得到解的存在性。

首先,方程组(1)转化为对称双曲型方程,进而得到局部解的存在性;其次,在等温情形下,利用方程的转化和在文献[3]中提到的 Lagrangean 质量坐标的引入,方程组(1)被转化为 p-系统。考虑到 p-系统的研究成果很多,本文通过已研究的带线性阻尼项的 p-系统的理论,以及文献[4]对非齐次项的考虑,得到了方程的近似解,最后,推得在有限时间区间里,近似解收敛,并证明它为一个弱解。

1 局部解存在性

对于方程组(1),先把它转化为对称双曲型方程组。由 $P(\rho)=a^2\rho^\gamma$,得到 $P'(\rho)=a^2r\rho^{\gamma-1}$。并引入音速 $\sigma(\rho)=\sqrt{p'(\rho)}$,这里 $\bar\sigma=\sigma(\bar\rho)$ 为对于 $\bar\rho$ 的音速。定义 $\pi=\dfrac{2}{\gamma-1}(\sigma(\rho)-\sigma(\bar\rho))$。那么方程组(1)能转化为如下对称双曲型方程:

$$\begin{cases} \pi_t+\pi_r u+\left(\dfrac{\gamma-1}{2}\pi+\bar\sigma\right)u_r=-\dfrac{2}{r}\left(\dfrac{\gamma-1}{2}\pi+\bar\sigma\right)u \\ u_t+uu_r+\left(\dfrac{\gamma-1}{2}\pi+\bar\sigma\right)\pi_r=-\alpha u \end{cases} \tag{2}$$

收稿日期:2010-01-15

基金项目:江西省自然科学基金项目(2007GZS0811)

作者简介:俞银晶(1986-),女,硕士研究生,研究方向为偏微分方程。

令 $U=\begin{pmatrix}\pi\\ u\end{pmatrix}$, $A(U)=\begin{pmatrix}u & \frac{\gamma-1}{2}+\bar{\sigma}\\ \frac{\gamma-1}{2}+\bar{\sigma} & u\end{pmatrix}$, $F(U)=\left(-\frac{2}{r}\left(\frac{\gamma-1}{2}\pi+\bar{\sigma}\right)u,-\alpha u\right)$

方程组(2) 可以转化为

$$U_t+A(U)U_r=F(U) \tag{3}$$

其初始数据为

$$U\big|_{t=0}=U\begin{pmatrix}\pi_0\\ u_0\end{pmatrix}=U(0) \tag{4}$$

引理 1　对于任意实数 $T>0$, $(\rho,u)\in C^1(R^1\times[0,T])$ 是方程组(1) 的解,其中 $\rho>0$,则 $(\pi,u)\in C^1(R^1\times[0,T])$ 是方程组(2) 的解,这里 $\frac{\gamma-1}{2}\pi+\bar{\sigma}>0$。反之也成立。

引理 2　如果 $(\rho,u)\in C^1(R^1\times[0,T])$ 是方程组(1) 的唯一有界解,有 $\rho(r,0)>0$,那么就有 $\rho(r,t)>0$。

证明　令粒子轨迹 $r=r(t;y,s)$,有

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=u(r,t),\ r|=y$$

沿着粒子轨迹,对密度求导得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho(r(t;y,s),t)=\partial_t\rho(r(t;y,s),t)+u(r(t;y,s),t)\partial_r\rho(r(t;y,s),t)=$$
$$-\rho(r(t;y,s),t)\partial_r u(r(t;y,s),t)-\frac{2}{r}(\rho u)$$

解此常微分方程得

$$\rho(r(t;y,s),t)=\rho(r_0,0)\exp\left(-\int_0^t\partial u(r(\tau;y,s),\tau)+\frac{1}{r}u(r(\tau;y,s),\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)>0$$

由此可见,引理成立。

由对称双曲型方程组 Cauchy 问题解的局部存在性理论[5],上述式子(3)(4) 有关于时间的局部存在性结论。

定理 1　如果 $U_0=U(r,0)=\begin{pmatrix}\pi_0(r)\\ u_0(r)\end{pmatrix}\in H^2$,这里 H 为 Herbert 空间,则对有限时间 $T>0$,式子(3)(4) 存在唯一的局部解 $U(x,t)\in C([0,T),H^2)\cap C^1([0,T),H^1)$。

2　弱解的存在性

已知对于三维欧拉方程组,整体解的存在性很难得到,下面证明三维等熵欧拉方程组整体弱解存在。首先,把方程组转化为 p- 系统。

由方程组(1) 可知,在 $r=0$ 处有奇异点。因此,设 $1\leqslant r<\infty$,也就是在单位球的外部讨论该方程的初边值问题:

$$\begin{cases}(u(x,0),\rho(x,0))=(u_0,\rho_0)\\ u(1,t)=0\end{cases} \tag{5}$$

令 $\tilde{\rho}=r^2\rho$,对于等温情况,方程组(1) 转化成

$$\begin{cases}\tilde{\rho}_t+(\tilde{\rho}u)_r=0\\ u_t+uu_r+\dfrac{\tilde{\rho}_r}{\tilde{\rho}}=-\alpha u+\dfrac{2}{r}\end{cases} \tag{6}$$

由文献[3]，引入 lagrangean 质量坐标

$$\tau = t,\ \theta = \int_1^r \tilde{\rho}(r,t)\,\mathrm{d}r$$

计算得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t} = \dfrac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\tau} - \rho u\dfrac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial\tilde{\rho}}{\partial r} = \rho\dfrac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\theta} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial\tau} - \tilde{\rho}\,u\dfrac{\partial u}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial u}{\partial r} = \tilde{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial\theta} \end{cases}$$

则式子(6) 的第一个方程转化为 $\tilde{\rho}_\tau + \tilde{\rho}^2 u_\theta = 0$。式子(6) 的第二个方程转化为 $u_\tau + \tilde{\rho}_\theta = -\alpha u + \dfrac{2}{r}$。

令 $v = \dfrac{1}{\tilde{\rho}}$，则 $t = \tau,\ r = 1 + \int_0^\theta v(\omega,t)\,\mathrm{d}\omega$。把 τ 转为 t，θ 转为 x，则有方程组：

$$\begin{cases} v_t - u_x = 0 \\ u_t + \left(\dfrac{1}{v}\right)_x = -\alpha u + \dfrac{2}{1+\int_0^x v(\omega,t)\,\mathrm{d}\omega} \end{cases} \tag{7}$$

令 $N(x,t) = \dfrac{2}{1+\int_0^x v(\omega,t)\,\mathrm{d}\omega}$，可以看出 $N(x,t)$ 为对于 x 的单调递减函数。

下面考虑方程组(7) 的初边值问题：

$$\begin{cases} u(0,x) = u_0(x) \\ v(0,x) = v_0(x) \\ u(0,t) = 0,\ t > 0 \end{cases} \tag{8}$$

定理 2 如果 $u_0, v_0 \in \mathrm{BV}(R_+)$，且 v_0, u_0 在某个固定的有界区间外为常数，则对于任意的 $x > 0, t > 0$，初边值问题式子(7)(8) 有整体弱解存在。

证明 先给出弱解的定义。

引理 3[6] 如果存在 $\varphi, \psi \in C_0^\infty$，使得

$$\begin{cases} \int_0^T\int_0^\infty [u\varphi_t + (\dfrac{1}{v})\varphi_x + (\dfrac{2}{1+\int_0^x v(\omega,t)\,\mathrm{d}\omega} - \alpha u)\varphi]\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^\infty u_0(x)\varphi(0,x)\,\mathrm{d}x = 0 \\ \int_0^T\int_0^\infty (v\psi_t - u\psi_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^\infty v_0(x)\psi(0,x)\,\mathrm{d}x = 0 \end{cases} \tag{9}$$

那么称 u, v 为式子(7)(8) 的弱解。

为了证明定理 2，我们利用 Glimm 模式[7] 先建立一组近似弱解；然后由其收敛，并通过细致的验算可以得到式子(9) 成立。具体过程如下：

先记 $TV(v;I)$ 为全变差，这里 I 表示实数域 R 中的区间，也就是 $\sum_{j=1}^n \| v(x_j) - v(x_{j-1}) \|$ 的上界。其中，$TV(V;R) = \lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\int_R |v(x+h) - v(x)|\,\mathrm{d}x$。

根据文献[7] 中定理 5.1.3 有：

引理 4 对于 $[0,T] \times R$ 中一组函数 $(v^h)_{h\in \mathrm{N}}$，h, m 为任意自然数，满足下列性质：

对所有 h，存在实数 M，使得 $TV(v^h;R) \leqslant \mathrm{M}$。

对所有 m，$\| v^h(t,0) \| \leqslant \mathrm{M}$。

存在收敛于 0^+ 的数组 $(\varepsilon^h)_{h\in \mathrm{N}}$，使得对所有 m，当变量 $s, t \in [0,T]$ 时，有

$$\int_R \| v^h(x,t) - v^h(x,s) \| dx \leqslant \varepsilon^h + M(t-s)$$

建立网格：$A = [n\Delta t, (n+1)\Delta t]$，$I_j = ((j-1)\Delta x, (j+1)\Delta x)$，$n = 1,2,3,\cdots; j = 1,3,5,\cdots$。

黎曼问题的中心在 $t = 0, x = j\Delta x$，这里 j 为奇数。

对于初边值问题：

$$\begin{cases} u(0,x) = u_0(x), v(0,x) = v_0(x) \\ u(0,t) = 0, t > 0 \\ N^h(x,t) = 2 \end{cases} \tag{10}$$

假如 u^h, v^h 已经被定义在 $0 < t < n\Delta t$，对于 $n\Delta t \leqslant t < (n+1)\Delta t, j\Delta x \leqslant x < (j+2)\Delta t$，这里 j 为奇数。定义

$$\begin{cases} u^h = u_0^h + N^h(t - n\Delta t) \\ v^h = v_0^h \end{cases} \tag{11}$$

这里 u_0^h, v_0^h 表示如下：

$$\begin{cases} v_t - u_x = 0 \\ u_t + \left(\dfrac{1}{v}\right)_x = -\alpha u \end{cases} \tag{12}$$

并且有

$$u_0^h(n\Delta t, 0) = \begin{cases} u^h(n\Delta t - 0, j\Delta x), x < (j+1)\Delta x \\ u^h(n\Delta t - 0, (j+2)\Delta x), x > (j+1)\Delta x \end{cases} \tag{13}$$

$$v_0^h(n\Delta t, 0) = \begin{cases} v^h(n\Delta t - 0, j\Delta x), x < (j+1)\Delta x \\ v^h(n\Delta t - 0, (j+2)\Delta x), x > (j+1)\Delta x \end{cases} \tag{14}$$

$$N^h = \frac{2}{1 + \sum_{b=1}^{\frac{j+1}{2}} v^h(n\Delta t - 0, (2b-1)\Delta t) \cdot 2\Delta x} \tag{15}$$

而对于 $n\Delta t \leqslant t < (n+1)\Delta t, 0 \leqslant x < \Delta x$ 的情况，u^h, v^h 为(11)，u_0^h, v_0^h 为式子(12) 带有初值：$u_0^h(\Delta t, x) = u^h(\Delta t, 0)$，$u_0^h(\Delta t, x) = u^h(\Delta t, 0)$，$x > 0$，$u(t, 0) = 0$，$t > n\Delta t$ 得到，且 N^h 如上述式子(15)。

于是就得到了近似解 u^h, v^h，再由定理的条件以及引理 4，可得 u^h, v^h 有界。那么存在 u, v，使得 u^h, v^h 在局部可积空间中唯一收敛到 u, v。

下面证明 u, v 为弱解，也就是式子(9) 成立。令函数 φ, ψ 为对于区间 $\{(x,t): 0 < x < \infty, 0 < t < T\}$ 的紧集，并有 $\varphi(t, 0) = 0$。先证方程组(9) 中第一式，由于 u^h 为弱解，那么满足：

$$\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \int_0^\infty [u^h \varphi_t + (\frac{1}{v^h}) \varphi_x + (N^h(x,t) - \alpha u^h) \cdot \varphi] dx dt +$$

$$\int_0^\infty u^h(n\Delta t + 0, x) \varphi(n\Delta t, x) dx - \int_0^\infty u^h((n+1)\Delta t, x) \varphi((n+1)\Delta t, x) dx = 0$$

对 n 求和，有

$$\int_0^T \int_0^\infty [u^h \varphi_t + (\frac{1}{v^h}) \varphi_x + (N^h(x,t) - \alpha u^h) \cdot \varphi] dx dt +$$

$$\int_0^\infty u^h(0,x) \varphi(0,x) dx = -\sum_{k=1}^{N} \int_0^\infty [u^h(k\Delta t + 0, x) - u^h(k\Delta t - 0, x)] \varphi(k\Delta t, x) dx$$

这里 $N = T/\Delta t$，当 $N \to \infty$ 时，上述方程的右边趋向于零，左边 $u^h \to u, v^h \to v$，则

$$\int_0^T \int_0^\infty [u \varphi_t + (\frac{1}{v}) \varphi_x + (\frac{2}{1 + \int_0^x v(\omega, t) d\omega} - \alpha u) \varphi] dx dt + \int_0^\infty u_0(x) \varphi(0,x) dx = 0$$

由于 v^h 为弱解，满足

$$\int_0^T\int_0^\infty(v^h\psi_t-u^h\psi_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^\infty v^h(0,x)\psi(0,x)\,\mathrm{d}x= \\ -\sum_{k=1}^{N}\int_0^\infty[\mathrm{v}^h(k\Delta t+0,x)-v^h(k\Delta t-0,x)]\cdot\psi(\mathrm{k}\Delta t,x)\mathrm{d}x \tag{16}$$

等式右边 $=-I_1-I_2$。这里

$$I_1=\sum_{n=0}^{N-1}\int_{n\Delta_t}^{(n+1)\Delta_t}N^h(0,t)(t-n\Delta t)\psi(0,t)\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\|\psi\|_\infty\sum_{n=0}^{N-1}\int_{n\Delta_t}^{(n+1)\Delta_t}N^h(0,t)(t-n\Delta t)\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\|\psi\|_\infty\sum_{n=0}^{N-1}\int_{n\Delta_t}^{(n+1)\Delta_t}2(t-n\Delta t)\,\mathrm{d}t\leqslant$$

$$2\|\psi\|_\infty\Delta_t\cdot T$$

当 $N\to\infty$ 时，$\Delta_t\to0$，表示了网格分得足够细时 $I_1\to0$。

$$I_2=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{j:\mathrm{odd}}\int_{n\Delta_t}^{(n+1)\Delta_t}[\mathrm{N}^h(t,j\Delta x+0)-N^h(t,j\Delta x-0)](\mathrm{t}-\mathrm{n}\Delta t)\psi(t,j\Delta x)\,\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\|\psi\|_\infty\sum_{n=0}^{N-1}2\Delta_t T$$

当 $N\to\infty$ 时，$\Delta_t\to0$，表示了网格分得足够细时 $I_2\to0$。

式子(16) 左边当 $N\to\infty$ 时，$u^h\to\mathrm{u}$，$\mathrm{v}^h\to\mathrm{v}$，那么方程组(9) 的第二式成立。

综上可知，定理 2 成立。

参考文献：

[1] 朱旭生．带阻尼项的 Euler 方程组初边值问题的经典解[J]．数学杂志，2004，24(4)：370-374．

[2] 朱旭生，熊显萍，傅勇．一维可压缩欧拉解的爆破[J]．华东交通大学学报，2009，26(2)：111-114．

[3] ALI G，TORCICOLLO I．Global solutions to a hydrodynamical model for semiconductors in Lagrangian mass coordinates[EB/OL]．[2010-01-15]．http://www.na.iac.cnr.it/rapprti/2006/RT312-06.pdf，2006．

[4] YING L A，WANG C H．Global solution of the cauchy problom for a nonhomogeneous quasilinear hyperbolic system[J]．Comm Pure Appl Math，1980，33(5)：579-597．

[5] KATO T．The Cauchy problem for quasi-linear symmetric hyperbolic systems[J]．Arch Rational Mech Anal，1975，58(3)：181-205．

[6] TETU MAKINO，KIYOSHI，MIZOHATA，SEIJI UKAI．The Global Weak Solutions of the Compressible Euler Equation with Spherical Symnetry[R]．日本：数理解析研究所，1992：1-28．

[7] DENIS SERRE．Systems of Conservation Laws[M]．英国：剑桥大学出版社，2000：146-182．

[8] 朱长江．Convergence rates to nonlinear diffusion waves for weak entropy solutions to p-system with damping[J]．Science in China，2003，46(4)：562-575．

[9] KENJI NISHIHARA．Boundary Effect on Asymptotic Behavior of Solutions to the p-system with Linear Damping[R]．日本：数理解析研究所，1999：78-94．

[10] KENJI NISHIHARA．L_p-convergence Rate to Nonlinear Diffusion Wavea for p-system with Damping[R]．日本：数理解析研究所，1999：95-113．

[11] JIALE HUA，TONG YANG．An improved convergence rate of Glimm scheme for general systems of hyperbolic conservation laws[J]．Journal of Differential Equations，2006，231(1)：92-107．

[12] LING HSIAO，TAO LUO，TONG YANG．Global BV solutions of compressible euler equations with spherical symmetry and damping[J]．Journal of Differential Equations，1998，146(1)：203-225．

Spherically Symmetric Solutions to the 3D Euler Equations with Damping

Yu Yinjing, Zhu Xusheng, Li Cui

(School of Basic Sciences, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: The local existence of the classical solution and the existence of global weak solution for the three-dimensional compressible isentropic Euler equations with damping are studied in this paper. On the one hand, the local existence of the classical solution is obtained by utilizing the theory for the quasilinear symmetric hyperbolic systems. On the other hand, by introducing the new coordinate, the equations transform into the more familiar p-systems. Then, the existence of global weak solution is proved by Glimm scheme.

Key words: Euler equations; spherically symmetric solutions; weak solution; Glimm scheme

（责任编辑　刘棉玲）

(上接第91页)

Enhancement of Narrow Spectra and Two-photon Transparency Induced by Double-dark Resonance

Yang Shaohai, Deng Li, Zhou Zhen

(School of Basic Sciences, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: Atomic coherence and quantum interference effect is gradually becoming a kind of important and widely used tool in resonance nonlinear optical physics. It should have potential application value in the non-linear optical properties and in the prohibition of single-and two-photon and absorption. Especially in the optical field which has relatively less photon, we have observed the non-absorption non-linear optics caused by the large Kerr non-linear characteristics of electromagnetically induced transparency and increase of refractive index, which plays an important role for non-linear optical properties of quantum, and opens a new field.

Key words: double-dark state; electromagnetically induced transparency; two-photon transparency

（责任编辑　王全金　李　萍）