

文章编号: 1005-0523(2010)04-0068-03

# 图的反符号星 $k$ 控制数

徐保根, 孔祥阳, 陈 悦

(华东交通大学 基础科学学院, 江西 南昌 330013)

**摘要:** 设  $G = (V, E)$  是一个图, 一个函数  $f: E \rightarrow \{-1, +1\}$  如果  $\sum_{e \in E[v]} f(e) \leq 0$  对于至少  $k$  个顶点  $v \in V(G)$  成立, 则称  $f$  为图  $G$  的一个反符号星  $k$  控制函数, 其中  $E(v)$  表示  $G$  中与  $v$  点相关联的边集. 图  $G$  的反符号星  $k$  控制数定义为  $\gamma_{rs}^k(G) = \max \{ \sum_{e \in E} f(e) \mid f \text{ 为图 } G \text{ 的反符号星 } k \text{ 控制数} \}$ . 得到了一般图的反符号星  $k$  控制数的若干上界, 对文[6] 中的结果进行了推广, 还确定了路  $P_n$  和圈  $C_n$  的反符号星  $k$  控制数.

**关键词:** 反符号星  $k$  控制函数; 反符号星  $k$  控制数; 反符号星控制函数; 反符号星控制数

**中图分类号:** O157.5

**文献标识码:** A

在 1998 年美国图论学者 W T Haynes 等人出版了专著, 该著作较为全面而又系统地总结了近些年在图论方面的一些重要研究成果. 但这些成果几乎都是关于图的点控制问题, 与图的边控制问题相关的结果却比较少. 为了将图的控制理论内容进行进一步健全和丰富, 我们将由对图的点控制问题的研究转向对图的边控制问题的研究, 我们已经得到了一些研究成果, 例如, 符号边控制, 符号星控制和符号圈控制等. 在本文中, 我们将引入一个新概念, 即图的反符号星  $k$  控制概念.

本文所考察的图均为无向简单图, 文中的符号和术语若无特别说明则均与文献相同.

在图  $G = (V, E)$  中,  $G$  中的任意一点  $v$  在  $G$  中的边邻域定义为  $E_G(v) = \{uw \in E \mid u \in V\}$ . 如果  $e \in E(G)$ , 那么  $N_G(e)$  表示  $G$  中和  $e$  相邻的边的集合, 并称为  $e$  边的边邻域.  $N_G[e] = N_G(e) \cup \{e\}$  称为  $e$  的闭边邻域. 为方便叙述, 我们分别将  $N_G(e)$  和  $N_G[e]$  简记为  $N(e)$  和  $N[e]$ .

对于在图  $G = (V, E)$  上定义的一个函数  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  和  $G$  的一个子集  $S \subseteq E(G)$ , 我们记  $f(S) = \sum_{e \in S} f(e)$ .

**定义 1** 设  $G = (V, E)$  是一个没有孤立点的图, 一个函数  $f: E \rightarrow \{-1, +1\}$ , 满足  $\sum_{e \in E(v)} f(e) \leq 0$  对一切  $v \in V(G)$  成立, 则称  $f$  为图  $G$  的一个反符号星控制图. 图  $G$  的反符号星控制数定义为

$$\gamma'_{rs}(G) = \max \{ \sum_{e \in E} f(e) \mid f \text{ 为图 } G \text{ 的反符号星控制数} \}$$

**定义 2** 设  $G = (V, E)$  为一个非空图, 一个函数  $f: E \rightarrow \{-1, +1\}$ , 如果  $\sum_{e \in E(v)} f(e) \geq 1$  对于至少  $k$  个顶点  $v \in V(G)$  成立, 则称  $f$  为图  $G$  的一个符号星  $k$  控制函数. 图  $G$  的符号星  $k$  控制数定义为

$$\gamma_{ss}^k(G) = \min \{ f(E) \mid f \text{ 为图 } G \text{ 的符号星 } k \text{ 控制数} \}.$$

下面我们将图的反符号星控制概念进行推广, 从而引入一种新的图的边控制概念.

**定义 3** 对一个图  $G = (V, E)$ , 一个函数  $f: E \rightarrow \{-1, +1\}$  如果  $\sum_{e \in E(v)} f(e) \leq 0$  对于  $G$  中至少  $k$  个顶点  $v$  成立, 则称  $f$  为图  $G$  的一个反符号星  $k$  控制函数, 其中  $E(v)$  表示  $G$  中与  $v$  点相关联的边集. 图  $G$  的反符号星  $k$  控制数定义为

**收稿日期:** 2010-04-25

**基金项目:** 国家自然科学基金项目(10661007); 江西省教育厅科研项目(GJJ09215)

**作者简介:** 徐保根(1963—), 男, 教授, 研究方向为图论与组合数学.

$$\gamma_{\text{rss}}^k(G) = \max \left\{ \sum_{e \in E} f(e) \mid f \text{ 为图 } G \text{ 的反符号星 } k \text{ 控制数} \right\}$$

对于空图  $\overline{K_n}$ ,  $\gamma_{\text{rss}}^k(\overline{K_n}) = 0$ 。

从这3个定义中可以看出,当  $k = |V(G)|$  时,  $\gamma'_{\text{rss}}(G) = \gamma_{\text{rss}}^k(G)$ , 所以反符号星  $k$  控制概念既是对反符号星控制概念的一种推广,也是对符号星  $k$  控制概念的一种推广。关于图的反符号星控制数,文[6]中给出了如下结果:

**引理1** 对于任意  $n$  阶图  $G$ , 若  $\delta(G) \geq 1$ , 则有  $\gamma'_{\text{rss}}(G) \leq 0$ , 且当图  $G$  为偶图时有  $\gamma'_{\text{rss}}(G) = 0$ 。

本文在对文[7]中的结果进行了推广——给出了一般图的反符号星  $k$  控制数的若干上界,在此基础上,给出了  $n$  阶路  $P_n$  和  $n$  阶圈  $C_n$  的反符号星  $k$  控制数的表达式。

**定理1** 对于任意  $n$  阶图  $G$ , 当  $\delta \geq 1, 1 \leq k \leq n-1$  时, 有

$$\gamma_{\text{rss}}^k(G) \leq \frac{1}{2} \Delta(n-k)$$

其中:  $\delta = \delta(G)$ ,  $\Delta = \Delta(G)$  分别表示图  $G$  的最小度和最大度。

**证明** 对于图  $G = (V, E)$ , 设  $f$  为  $G$  的一个反符号星  $k$  控制函数, 并且有  $\gamma_{\text{rss}}^k(G) = f(E)$  成立, 令

$$A = \{v \in V(G) \mid f(E(v)) \leq 0\}, B = \{v \in V(G) \mid f(E(v)) \geq 1\}$$

由此可知,  $V = A \cup B, A \cap B = \varnothing$ . 由  $f$  的定义可以知道,  $|A| \geq k$ , 因此  $|B| \leq n-k$ , 于是有

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{rss}}^k(G) = f(E) &= \frac{1}{2} \sum_{v \in V} f(E(v)) = \frac{1}{2} \sum_{v \in A} f(E(v)) + \frac{1}{2} \sum_{v \in B} f(E(v)) \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{v \in A} 0 + \frac{1}{2} \sum_{v \in B} d(v) \leq \frac{1}{2} \Delta |B| \leq \frac{1}{2} \Delta(n-k) \end{aligned}$$

因为  $\gamma_{\text{rss}}^k(G)$  只能取整数, 故该结论是成立的, 定理证毕。

注: 将定义2中的  $k$  取为  $n$  时,  $\gamma_{\text{rss}}^k(G) = \gamma'_{\text{rss}}(G)$  为图  $G$  的反符号星控制数, 因此可得引理1, 从而上述结果推广了引理1。

**定理2** 对于任意  $n$  阶图  $G$ , 当  $\delta \geq 1$  时, 若  $|E(G)| = m$ , 则有

$$\gamma_{\text{rss}}^k(G) \leq \frac{\Delta^2(2n-k)}{2\delta} - m$$

其中:  $\delta = \delta(G)$  和  $\Delta = \Delta(G)$  分别为图  $G$  的最小度和最大度。

**证明** 对于图  $G = (V, E)$ , 设  $f$  为  $G$  的一个反符号星  $k$  控制函数, 且有  $\gamma_{\text{rss}}^k(G) = f(E)$ , 我们仍定义:

$A = \{v \in V(G) \mid f(E(v)) \leq 0\}, B = \{v \in V(G) \mid f(E(v)) \geq 1\}$ , 那么由  $f$  定义可知

$$|A| \geq k, |B| \leq n-k, \text{ 因此}$$

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E} f(N[e]) &= \sum_{v \in V} d(v)f(E(v)) - f(E) = \sum_{v \in A} d(v)f(E(v)) + \sum_{v \in B} d(v)f(E(v)) - \gamma_{\text{rss}}^k(G) \\ &\leq \sum_{v \in A} d(v) \cdot 0 + \Delta^2 |B| - \gamma_{\text{rss}}^k(G) \end{aligned} \quad (1)$$

另外, 我们还可得到

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E} f(N[e]) &= \sum_{v \in V} d(v)f(E(v)) - f(E) = \sum_{v \in V} d(v)(f(E(v)) + d(v)) - \sum_{v \in V} d^2(v) - \gamma_{\text{rss}}^k(G) \\ &\geq \delta \sum_{v \in V} (f(E(v)) + d(v)) - n\Delta^2 - \gamma_{\text{rss}}^k(G) = 2\delta \cdot f(E) + 2m\delta - n\Delta^2 - \gamma_{\text{rss}}^k(G) \end{aligned} \quad (2)$$

结合(1), (2) 两式得:  $\Delta^2 |B| - \gamma_{\text{rss}}^k(G) \geq 2\delta \cdot f(E) + 2m\delta - n\Delta^2 - \gamma_{\text{rss}}^k(G)$ , 于是有

$$\gamma_{\text{rss}}^k(G) = f(E) \leq \frac{\Delta^2(2n-k)}{2\delta} - m.$$

可见结论是成立的, 定理证毕。

根据定理2, 我们可得到如下推论:

**推论** 对任意  $n$  阶  $r$ -正则图  $G$ , 若  $r \geq 1$ , 且  $1 \leq k \leq n$ , 则有

$$\gamma_{rss}^k(G) \leq \frac{r(n-k)}{2}$$

最后我们给出  $n$  阶路  $P_n$  和  $n$  阶圈  $C_n$  的反符号星  $k$  控制数的表达式。

**定理 3** 当整数  $n \geq 3$  时, 有 (I)  $\gamma_{rss}^k(P_n) = n - 2k - 1$ ; (II)  $\gamma_{rss}^k(C_n) = n - 2k - 2$

**证明** (I) 设  $f$  为路  $P_n$  的一个反符号星  $k$  控制函数, 且有  $\gamma_{rss}^k(P_n) = f(E(P_n))$  成立. 令  $M = \{e \in E(P_n) \mid f(e) = -1\}$ . 由反符号星  $k$  控制函数的定义知, 至少有  $k$  个不同的点  $v \in V(P_n)$ , 使  $f(E(v)) \leq 0$  成立. 于是  $|M| \geq k$ , 从而有

$$\gamma_{rss}^k(P_n) = |E(P_n)| - 2|M| \leq n - 2k - 1 \quad (3)$$

此外, 记  $P_n = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , 在此  $E(P_n) = \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\}$ , 定义一个实值函数  $f: E(P_n) \rightarrow \{-1, +1\}$  如下

$$f(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} -1, & \text{当 } 1 \leq i \leq k \text{ 时} \\ +1, & \text{当 } i > k \text{ 时} \end{cases}$$

可以验证:  $f$  为  $P_n$  的一个反符号星  $k$  控制函数且有

$$\gamma_{rss}^k(P_n) \geq f(E(P_n)) = n - 2k - 1$$

结合 (3) 知结论 (I) 成立. 同理可知结论 (II) 也成立, 定理证毕。

## 参考文献:

- [1] HAYNES T W, HEDETNIEMI S T, SLATER P J. Domination in graphs[M]. New York: Marcel Dekker, INC, 1998.
- [2] XU BAOGEN. On signed edge domination numbers of graphs[J]. Discrete Math, 2001, 239(1/2/3): 179-189.
- [3] XU BAOGEN. Two classes of edge domination in graphs[J]. Discrete Appl Math, 2006, 154(10): 1 541-1 546.
- [4] XU BAOGEN. On signed cycle domination in graphs[J]. Discrete Math, 2009, 309(4): 1 007-1 012.
- [5] BONDY J A, MURTY V S R. Graph Theory with Applications[M]. Elsevier, Amsterdam, 1976.
- [6] 赵华, 徐保根, 赵金凤, 帅春萍. 关于图的反符号星控制数[J]. 华东交通大学学报, 2008, 25(5): 84-87.
- [7] 徐保根, 李春华. 图的符号星  $k$  控制数[J]. 纯粹数学与应用数学, 2009, 25(4): 638-641.

## Reverse Signed Star $k$ -subdomination Numbers of Graphs

Xu Baogen, Kong Xiangyang, Chen Yue

(School of Basic Sciences, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

**Abstract:** Let  $G = (V, E)$  be a graph, a function  $f: E \rightarrow \{-1, 1\}$  is said to be the reverse signed star  $k$ -dominating function (RSSKDF) of  $G$  if  $\sum_{e \in E[v]} f(e) \leq 0$  holds for at least  $k$  vertices  $v \in V(G)$ . The reverse signed star  $k$ -domination number  $\gamma_{rss}^k(G)$  of  $G$  is defined as  $\gamma_{rss}^k(G) = \max \left\{ \sum_{e \in E(G)} f(e) \mid f \text{ is a RSSKDF of } G \right\}$ . In this paper, we give some upper bounds of the reverse signed star  $k$ -domination numbers of graphs, which generalize a result of [6], and determine the reverse signed star  $k$ -domination numbers of the paths  $P_n$  and cycles  $C_n$ .

**Key words:** signed star  $k$ -dominating function; signed star  $k$ -domination number; signed star dominating function; signed star domination number

(责任编辑 王建华)