文章编号:1005-0523(2010)05-0001-04

正六角形蜂窝芯层面内等效弹性参数研究

陈梦成[1],陈玳珩[2]

(1.华东交通大学 土木建筑学院,江西 南昌 330013; 2.日本东京理科大学 机械工学科,东京 162－8601)

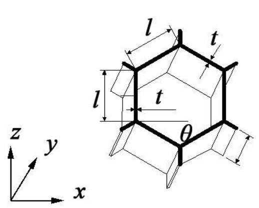
摘要:由于蜂窝芯层结构在外载作用下,蜂窝胞元壁板不但会产生弯曲变形,而且也会产生伸缩变形和剪切变形。过去 Gibson 公式在计算蜂窝芯层等效参数时只考虑了弯曲变形,虽然简便,但在导致蜂窝芯层分析时,弹性矩阵会出现不确定性;后来,宋明慧公式在 Gibson 公式的基础上,进一步考虑了伸缩变形的影响,但由于没有考虑剪切变形的影响,导致的蜂窝芯层结构不稳定,而且简化的弹性矩阵会出现奇异。该文新推导的面内等效弹性参数理论计算公式考虑了弯曲变形、伸缩变形和剪切变形对面内等效刚度的影响,是对 Gibson 和宋明慧公式的修正,克服了他们公式上的缺陷。

关 键 词:蜂窝芯层;等效弹性参数;弹性体;材料力学理论
中图分类号:TB332 **文献标识码**:A

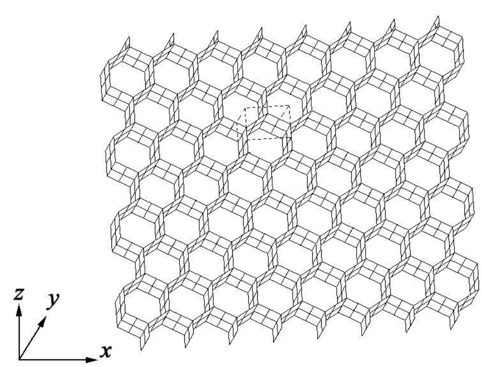
近年来,蜂窝材料作为一种轻量化与高强化高性能先进复合材料在机械和土木结构中得到广泛应用,如何准确确定其等效弹性参数亦备受关注。早期在分析由周期性胞元构成的蜂窝材芯层强度时,通常假想地将其视为一块均质各向异性薄板,并通过一系列弹性参数和结构特征胞元的变形满足宏观本构方程来描述其宏观等效的力学弹性参数。关于等效弹性参数的理论分析,到目前为止,已有不少报道[1-5]。但是,在这些研究结果中,均忽略了胞元壁板剪切变形的影响。实际上,当蜂窝芯层较厚的时候,这种剪切变形不能忽略。在胞元壁板考虑剪切变形的情况下,本文拟就由图 1(a)所示的正六角形胞元周期性排列组成的图 1(b)中正六角形蜂窝芯层的面内等效弹性参数进行理论分析。

1 考虑剪切变形的面内等效弹性参数理论分析

结构的变形和失稳问题可以通过分析与母体力学结构相似的结构特征单元在相同载荷下的变形和失稳现象得到比较简单而又直接的解决。整个蜂窝状夹芯层面内变形的求解可以通过分析图 1(b)中点线范围内所示的单个代表性特征单元变形而获得,本节拟开展这方面工作。图 2(a)为从图 1(b)中点线范围内割出的单个单元示意图,图 2(b)为蜂窝夹芯层受均匀拉伸作用时构成单个单元的胞元壁 $ABB'A'$、$CBB'C'$



(a) 六边形胞元

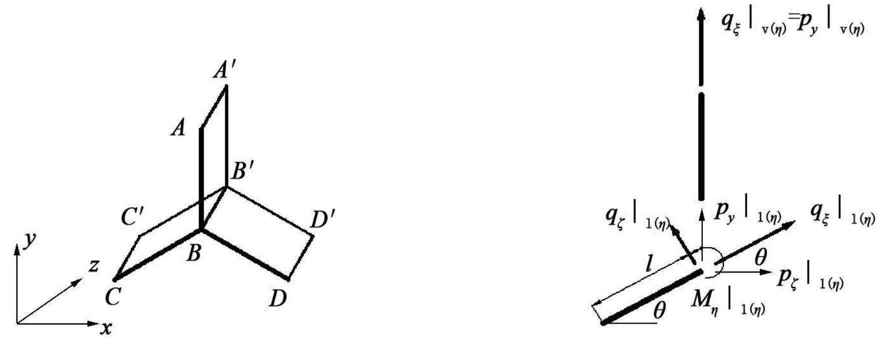


(b) 由六边形胞元构成的蜂窝芯层材料

图 1 蜂窝芯层结构

收稿日期:2010-09-06
基金项目:国家自然科学基金项目(10362002&10662004);日本东京理科大学外国人教员国际化推进中心项目
作者简介:陈梦成(1962—),男,教授,博士,主要研究方向为新型材料微结构组织与力学行为。

和 $DBB'D'$ 在连接处所受的力和弯矩示意图，图中采用局部坐标系(ξ,η,ζ)。整体坐标系(x,y)平面和局部坐标系(ξ,ζ)平面均置于胞元壁高半中腰位置。z 坐标轴与 η 坐标轴重合，即 $z=\eta$。胞元正壁和胞元斜壁的物理量分别用下标 v 和 l 加以区分。另外，为了区别整体坐标系下隔蜂窝状结构等效应力与局部坐标系下胞元各壁板应力，整体坐标系下应力符号上方使用符号～。



(a) 分析单元 (b) 各胞元壁板受力图

图 2 结构特征单元及其受力分析

首先来确定蜂窝芯层在 x 方向的材料性质。为此，假定蜂窝芯层在无限远处受到 x 方向的均匀拉伸载荷作用，则作用在胞元正壁板的分布力为

$$p_y|_{v(\eta)}=0 \tag{1}$$

作用在胞元斜壁上沿 x 方向和 y 方向的分布力 $p_x|_{l(\eta)}$ 与 $p_y|_{l(\eta)}$ 分别为

$$p_x|_{l(\eta)}=\tilde{\sigma}_{xx}(z)\cdot l(1+\sin\theta)\cdot h,\ p_y|_{l(\eta)}=0 \tag{2}$$

它们沿 ξ 方向(斜壁面内)和 ζ 方向(斜壁面外垂直)的分解力为

$$q_\xi|_{l(\eta)}=p_x|_{l(\eta)}\cos\theta,\ q_\zeta|_{l(\eta)}=-p_x|_{l(\eta)}\sin\theta \tag{3}$$

当蜂窝状结构变形为面内变形时，应力 $\tilde{\sigma}_{xx}$ 和 $\tilde{\sigma}_{yy}$ 沿胞元壁高度方向 η 均是均匀的，因此，在胞元斜壁板边缘上会产生附加力矩 $M_\eta|_{l(\eta)}$(逆时针方向弯矩为正)

$$M_\eta|_{l(\eta)}=p_x|_{l(\eta)}\cdot l\sin\theta/2 \tag{4}$$

下面讨论图 3 中单元内各个壁板沿 x 方向的变形 δ_{ix} 和 y 方向的变形 δ_{iy} 的求解方法，它们分别是单元内各壁板变形在 x 方向和 y 方向投影代数和。图 3 中粗线代表胞元壁，细线方框内表示的是分析单元的区域。胞元壁板的变形是在 $p_x|_{l(\eta)}$ 作用下，由力 $q_\zeta|_{l(\eta)}$ 引起的弯曲变形和剪切变形以及由力 $q_\xi|_{l(\eta)}$ 引起的伸缩变形共同形成的。

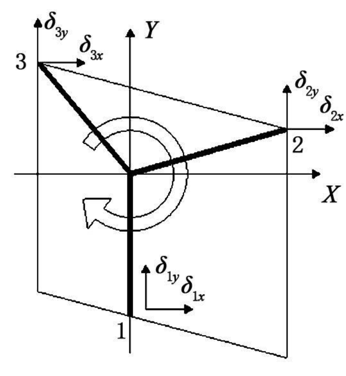


图 3 单元内各胞元壁板变形投影叠加示意图

胞元正壁板由于没有受到力的作用，所以其变形等于零，即

$$\delta_{v\sigma}=0,\ \delta_{v\tau}=0 \tag{5}$$

它们在 x 方向和 y 方向的投影自然也就为零。

对于胞元斜壁板来说，由于载荷和结构对称，所以只需要分析其中一块斜壁板变形。胞元斜壁板一共受三种载荷作用，它们是弯矩 $M_\eta|_{l(\eta)}$、轴向力 $q_\xi|_{l(\eta)}$ 和剪力 $q_\zeta|_{l(\eta)}$。因此，由材料力学知识，我们可以得到 $M_\eta|_{l(\eta)}$ 引起的胞元斜壁板弯曲变形挠度为

$$\delta_{l\tau}^{M}=\frac{M_\eta|_{l(\eta)}\cdot l^2}{2E_sI_\xi}=\frac{3\tilde{\sigma}_{xx}(z)\cdot l^4\sin\theta(1+\sin\theta)}{E_st^3} \tag{6}$$

式中：$I_\xi=ht^3/12$；h 为蜂窝芯层高度或胞元壁板宽度；l 为胞元壁板长度；t 为胞元壁板厚度；E_s 为胞元壁

板纵向弹性模量。$\delta_{l\tau}^{M}$ 在 x 方向和 y 方向投影 $\delta_{l\tau}^{M}|_x$ 和 $\delta_{l\tau}^{M}|_y$ 分别是

$$\delta_{l\tau}^{M}|_x = -\delta_{l\tau}\sin\theta,\ \delta_{l\tau}^{M}|_y = \delta_{l\tau}\cos\theta \tag{7}$$

剪力 $q\zeta_{l(\eta)}$ 引起的胞元斜壁板弯曲变形挠度为

$$\delta_{l\tau}^{q\zeta 1} = \frac{q\zeta|_{l(\eta)}\cdot l^3}{3E_sI\xi} = \frac{4\tilde{\sigma}_{xx}(z)\cdot l^4\sin\theta(1+\sin\theta)}{E_st^3} \tag{8}$$

$\delta_{l\tau}^{q\zeta 1}$ 在 x 方向和 y 方向投影 $\delta_{l\tau}^{q\zeta 1}|_x$ 和 $\delta_{l\tau}^{q\zeta 1}|_y$ 分别是

$$\delta_{l\tau}^{q\zeta 1}|_x = \delta^{q\zeta 1}|_{l\tau}\sin\theta,\ \delta_{l\tau}^{q\zeta 1}|_y = -\delta_{l\tau}^{q\zeta 1}\cos\theta \tag{9}$$

剪力 $q\zeta|_{l(\eta)}$ 引起的胞元斜壁板剪切变形挠度为

$$\delta_{l\tau}^{q\zeta 2} = \gamma\cdot l = \frac{\tau}{G}\cdot l = \frac{2(1+\upsilon_s)}{E_s}\frac{q\zeta|_{l(\eta)}}{A}\cdot l = 2(1+\upsilon_s)\cdot\frac{\tilde{\sigma}_{xx}(z)\cdot l^2\sin\theta(1+\sin\theta)}{kE_st} \tag{10}$$

式中：A 为受剪截面面积；k 是关于剪切变形的修正系数。本文为了研究方便，取 $k=1$（Mindlin[6]研究中取 $k=\pi^2/12$；Reissner[7]研究中取 $k=5/6$）。$\delta_{l\tau}^{q\zeta 2}$ 在 x 方向和 y 方向投影 $\delta_{l\tau}^{q\zeta 2}|_x$ 和 $\delta_{l\tau}^{q\zeta 2}|_y$ 分别是

$$\delta^{q\zeta 2}|_{l\tau x} = \delta_{l\tau}^{q\zeta 2}\sin\theta,\ \delta_{l\tau}^{q\zeta 2}|_y = -\delta_{l\tau}^{q\zeta 2}\cos\theta \tag{11}$$

伸缩力 $q\xi|_{l(\eta)}$ 引起的胞元斜壁板伸缩变形为

$$\delta_{l\delta}^{q\xi} = \frac{q\xi|_{l(\eta)}\cdot l}{E_sA} = \frac{\tilde{\sigma}_{xx}(z)\cdot l^2\cos\theta(1+\sin\theta)}{E_st} \tag{12}$$

$\delta_{l\delta}^{q\xi}$ 在 x 方向和 y 方向投影 $\delta_{l\delta}^{q\xi}|_x$ 和 $\delta_{l\delta}^{q\xi}|_y$ 分别是

$$\delta_{l\delta}^{q\xi}|_x = \delta_{l\delta}^{q\xi}\cos\theta,\ \delta_{l\delta}^{q\xi}|_y = \delta_{l\delta}^{q\xi}\sin\theta \tag{13}$$

综上所述，单个单元在 x 方向产生的总变形为

$$\begin{aligned}\delta_x &= \delta_{l\tau}^{M}|_x + \delta_{l\tau}^{q\zeta 1}|_x + \delta_{l\tau}^{q\zeta 2}|_x + \delta_{l\delta}^{q\xi}|_x \\ &= \frac{\tilde{\sigma}_{xx}(z)\cdot l\sin^2\theta(1+\sin\theta)}{E_s}\cdot\left(\frac{l}{t}\right)^3\left\{1+\left[2(1+\upsilon_s)+\cot^2\theta\right]\left(\frac{t}{l}\right)^2\right\}\end{aligned} \tag{14}$$

相应地，单个单元在 x 方向产生的线应变为

$$\varepsilon_x = \frac{\delta_x}{l\cos\theta} = \frac{\tilde{\sigma}_{xx}(z)\sin^2\theta(1+\sin\theta)}{E_s\cos\theta}\cdot\left(\frac{l}{t}\right)^3\left\{1+\left[2(1+\upsilon_s)+\cot^2\theta\right]\left(\frac{t}{l}\right)^2\right\} \tag{15}$$

单个单元在 y 方向产生的总变形为

$$\begin{aligned}\delta_y &= \delta_{l\tau}^{M}|_y + \delta_{l\tau}^{q\zeta 1}|_y + \delta_{l\tau}^{q\zeta 2}|_y + \delta_{l\delta}^{q\xi}|_y \\ &= -\frac{\tilde{\sigma}_{xx}(z)\cdot l\cos\theta\sin\theta(1+\sin\theta)}{E_s}\cdot\left(\frac{l}{t}\right)^3\left\{1+\left[2(1+\upsilon_s)-1\right]\left(\frac{t}{l}\right)^2\right\}\end{aligned} \tag{16}$$

相应地，单个单元在 y 方向产生的线应变为

$$\varepsilon_y = \frac{\delta_y}{l(1+\sin\theta)} = -\frac{\tilde{\sigma}_{xx}(z)\cos\theta\sin\theta}{E_s}\cdot\left(\frac{l}{t}\right)^3\left\{1+\left[2(1+\upsilon_s)-1\right]\left(\frac{t}{l}\right)^2\right\} \tag{17}$$

根据 Hooke 定律，蜂窝芯层在 x 方向的等效弹性模量为

$$E_x = \frac{\tilde{\sigma}_{xx}(z)}{\varepsilon_x} = \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta(1+\sin\theta)}\cdot\left(\frac{t}{l}\right)^3\cdot E_s\cdot\frac{1}{\left\{1+\left[2(1+\upsilon_s)+\cot^2\theta\right]\left(\frac{t}{l}\right)^2\right\}} \tag{18}$$

等效 Poisson 比 υ_{xy} 由定义得

$$\upsilon_{xy} = \left|\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}\right| = \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta(1+\sin\theta)}\cdot\frac{\left\{1+\left[2(1+\upsilon_s)-1\right]\left(\frac{t}{l}\right)^2\right\}}{\left\{1+\left[2(1+\upsilon_s)+\cot^2\theta\right]\left(\frac{t}{l}\right)^2\right\}} \tag{19}$$

同理，可以得到 y 方向的等效弹性模量

$$E_y=\frac{(1+\sin\theta)}{\cos^3\theta}\cdot\left(\frac{t}{l}\right)^3\cdot E_s\cdot\frac{1}{\left\{1+\left[2(1+\upsilon_s)+\tan^2\theta+2\sec^2\theta\right]\left(\frac{t}{l}\right)^2\right\}} \tag{20}$$

和等效 Poisson 比

$$\upsilon_{yx}=\frac{\sin\theta(1+\sin\theta)}{\cos^2\theta}\cdot\frac{\left\{1+\left[2(1+\upsilon_s)-1\right]\left(\frac{t}{l}\right)^2\right\}}{\left\{1+\left[2(1+\upsilon_s)+\tan^2\theta+2\sec^2\theta\right]\left(\frac{t}{l}\right)^2\right\}} \tag{21}$$

以上式(18)—(21)即为蜂窝芯层面内等效弹性参数新结果，它们分别可以退化到 Gibson 和 Ashby 公式[4]和宋明慧公式[5]。比较式(18)—(21)，蜂窝芯层材具有各向异性。面内参数，还包含另一个剪切模量参数 μ_{xy}，限于篇幅，我们拟在另文中报道。

2 结论

本文严格从材料力学出发，导出了蜂窝芯层面内等效弹性参数的理论分析公式。该公式考虑了胞元壁板各种变形产生的影响，克服了过去公式不全面的弱点。

参考文献：

[1] GIBSON L J, ASHBY M F, SCHAJER G S, ROBERTSTON C I. The mechanics of two-dimensional cellular materials[J]. Proc Roy Soc, 1982, A382: 25-42.

[2] MASTERS I G, EVANS K E. Models for the elastic deformation of honeycombs[J]. Compos Struct, 1996, 35(4): 403-422.

[3] WARREN W E, KRAYNIK A M. The linear elastic response of two-dimensional spatially periodic cellular materials[J]. Mech Mater, 1987, 6(1): 27-37.

[4] GIBSON L J, ASHBY MF. Cellular Solids: Structures & Properties[M]. Oxford: Pergamon Press, 1988: 89-93.

[5] 富明慧，伊久仁. 蜂窝芯层的等效弹性参数[J]. 力学学报，1999, 31(1): 113-118.

[6] MINDLIN R D. Influence ofrotatory inertia and shear on flextual motion of isotropic plates[J]. ASME J Appl Mech, 1951, 18(1): 31-38.

[7] REISSNER E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates[J]. ASME J Appl Mech, 1945, 12(1): 69-77.

A Study On In-plane Equivalent Elastic Parameters of Right Hexagonal Honeycomb Core

Chen Mengcheng[1], Chen Daiheng[2]

(1. School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China; 2. Department of Mechanical Engineering, Tokyo University of Science and Technology, Tokyo 162-8601, Japan)

Abstract: The deformation of bending, stretching and shearing arises in the cell walls composed of honeycomb core when the core subjected to out-of-plane loading (perpendicular to right hexagonal cell plane). In the previous studies on the equivalent elastic parameters, the Gibson's results include only the bending deformation of the cell walls. They are clearer and easier-to-use, but indeterminacy of the elastic matrix of materials is caused in the numerical analysis of the honeycomb core. Later, Song modifies the Gibson's results and considers further the stretching deformation in his formulae. However, his results lead to the unstable honeycomb core and the singular elastic matrix of materials. In this paper, new results of equivalent elastic parameters for right hexagonal honeycomb core are rigorously derived from the theory of material mechanics. The new formulae considers all bending, stretching and shearing deformations and overcome drawbacks of the previous results.

Key words: honeycomb core; in-plane equivalent elastic property; elasticity; theory of material mechanics

（责任编辑 王全金）