文章编号:1005-0523(2010)05-0077-04

局部对称共形平坦 Lorentz 流形中 2-调和类空超曲面

汪兴上

(安徽师范大学 数学计算机科学学院,安徽 芜湖 241000)

摘要:研究了局部对称共形平坦 Lorentz 流形中 2-调和类空超曲面,得到了这类超曲面广义的 Simons 积分不等式。

关 键 词:局部对称;共形平坦;Lorentz 流形;2-调和

中图分类号:O186.12 **文献标识码**:A

本文研究了局部对称共形平坦 Lorentz 流形中 2-调和类空超曲面,得到

定理 1 设 M^n 是局部对称共形平坦 Lorentz 流形 L_1^{n+1} 中 2-调和紧致类空超曲面,且具有常平均曲率,以 S 代表其第二基本形式模长的平方,K 表示 L_1^{n+1} 的数量曲率,L_1^{n+1} 的 Ricci 曲率满足 $r \leqslant \varepsilon_A K_{AA} \leqslant R$,则成立如下的积分不等式

$$\int_{M^n}\{(nH)^2[\frac{-2nR+2r+K}{n-1}+\frac{-4nr+K}{n(n-1)}+\frac{1}{2\sqrt{n-1}}]+ S[\frac{-2nR+4nr-K}{n-1}-\frac{n}{2\sqrt{n-1}}S-S+(nH)^2]\}*1\leqslant 0 \tag{1}$$

其中 H 为 M^n 的平均曲率。

1 准备工作

本文约定各类指标的取值范围如下

$$1\leqslant i,j,k\cdots\leqslant n;1\leqslant A,B,C\cdots\leqslant n+1$$

以 L_1^{n+1} 表示其 Ricci 曲率满足 $r\leqslant \varepsilon_A K_{AA}\leqslant R$ 的局部对称共形平坦 Lorentz 流形,M^n 为 ds_N^2 的类空超曲面. 选取 L_1^{n+1} 上的局部伪黎曼幺正标架场 $\{e_A\}$,使得限制在 M^n 上时,$\{e_i\}$ 与 M^n 相切. 令 $\{\omega_A\}$ 为其对偶标架,于是 L_1^{n+1} 的伪黎曼度量 $ds_N^2=\sum_A\omega_A^2$ 与 M^n 的黎曼度量 ds_M^2 分别为

$$ds_N^2=\sum_i\omega_i^2-\omega_{n+1}^2,\quad ds_M^2=\sum_i\omega_i^2 \tag{2}$$

L_1^{n+1} 结构方程为

$$d\omega_A=\sum\varepsilon_B\omega_{AB}\wedge\omega_B,\ \omega_{AB}\wedge\omega_{BA}=0, \tag{3}$$

$\{\omega_A\}$ 为 L_1^{n+1} 联络 1-形式,将这些形式限制在 M^n 上,有

$$\omega_{n+1}=0,\ \omega_{in+1}=\sum h_{ij}\omega_j, \tag{4}$$

$$d\omega_i=\sum\omega_{ij}\wedge\omega_i,\ \omega_{ij}+\omega_{ji}=0, \tag{5}$$

$$d\omega_{ij}=\sum\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}-\frac{1}{2}\sum R_{ijkl}\omega_k\wedge\omega_l, \tag{6}$$

$$R_{ijkl}=K_{ijkl}-(h_{ik}h_{jl}-h_{il}h_{jk}), \tag{7}$$

收稿日期:2010-06-25

基金项目:安徽省教育厅自然科学基金项目(KJ2008A05zc)

作者简介:汪兴上(1986—),男,硕士,研究方向为子流形几何。

其中 R_{ijkl} 表示 M^n 的曲率张量 R 的分量，h_{ij} 为其第二基本形式 h 的分量，其共变导数 h_{ijk}，h_{ijkl} 定义如下：

$$\sum h_{ijk}\omega_k = dh_{ij} + \sum h_{ki}\omega_{kj} + \sum h_{jk}\omega_{ki}, \tag{8}$$

$$\sum h_{ijkl}\omega_l = dh_{ijk} + \sum h_{ljk}\omega_{li} + \sum h_{ilk}\omega_{lj} + \sum h_{ijl}\omega_{lk}, \tag{9}$$

则 Codazzi 方程和 Ricci 恒等式分别为

$$h_{ijk} - h_{ikj} = -K_{n+1\,ijk}, \tag{10}$$

$$h_{ijkl} - h_{ijlk} = \sum h_{mj}R_{mikl} + \sum h_{im}R_{mjkl}, \tag{11}$$

又 L_1^{n+1} 是局部对称的，即

$$K_{ABCD,E} = 0, \tag{12}$$

其中“,”表示关于 L_1^{n+1} 中联络的共变微分，有

$$\sum_E \varepsilon_E K_{ABCD,E}\omega_E = dK_{ABCD} + \sum_E \varepsilon_E (K_{EBCD}\omega_{EA} + K_{AECD}\omega_{EB} + K_{ABED}\omega_{EC} + K_{ABCE}\omega_{ED}) \tag{13}$$

其中：$\varepsilon_i = 1$, $\varepsilon_{n+1} = -1$。

限制在 M^n 上有

$$\sum K_{n+1\,ijk,l}\omega_l = dK_{n+1\,ijk} + \sum \varepsilon_E K_{Eijk}\omega_{En+1} + \sum \varepsilon_E K_{n+1\,Ejk}\omega_{Ei} + \sum \varepsilon_E K_{n+1\,iEk}\omega_{Ej} + \sum \varepsilon_E K_{n+1\,ijE}\omega_{Ek}, \tag{14}$$

又 M^n 上 $K_{n+1\,ijk}$ 的共变导数为 $K_{n+1\,ijkl}$，即

$$\sum K_{n+1\,ijkl}\omega_l = dK_{n+1\,ijk} + \sum K_{n+1\,mjk}\omega_{mi} + \sum K_{n+1\,imk}\omega_{mj} + \sum K_{n+1\,ijm}\omega_{mk}, \tag{15}$$

从而

$$-K_{n+1\,ijkl} = K_{n+1\,in+1\,k}h_{jl} + K_{n+1\,ijn+1}h_{kl} + \sum K_{mijk}h_{ml} \tag{16}$$

又 L_1^{n+1} 是共形平坦的，所以

$$K_{ABCD} = \frac{1}{n-1}(\varepsilon_A\delta_{AC}K_{BD} - \varepsilon_A\delta_{AD}K_{BC} + \varepsilon_B\delta_{BD}K_{AC} - \varepsilon_B\delta_{BC}K_{AD}) - \frac{K}{n(n-1)}\varepsilon_A\varepsilon_B(\delta_{AC}\delta_{BD} - \delta_{AD}\delta_{BC}) \tag{17}$$

其中：$K_{AC} = \sum_B \varepsilon_B K_{ABCD}$ 为 Ricci 张量的分量，$K = \sum_A \varepsilon_A K_{AA}$ 为数量曲率. 又 $r \leqslant \varepsilon_A K_{AA} \leqslant R$ 显然有

$$(n+1)r \leqslant K \leqslant (n+1)R. \tag{18}$$

引理 1[4] M^n 是 L_1^{n+1} 中 2-调和类空超曲面，则

$$\sum_{j,k}(-2h_{jjk}h_{ik} - h_{jj}h_{ikk} + h_{jj}K_{n+1\,kik}) = 0, \ \forall\ i, \tag{19}$$

$$\sum_{j,k}h_{jjkk} + \sum_{j,k,m}h_{jj}(h_{mk})^2 - \sum_{j,k}h_{jj}K_{n+1\,kn+1\,k} = 0. \tag{20}$$

2 定理 1 的证明

由(10)和(11)得

$$\Delta h_{ij} = \sum h_{ijkk} = \sum(h_{kkij} - K_{n+1\,kikj} - K_{n+1\,ijkk}) + \sum(h_{mk}R_{mijk} + h_{im}R_{mkjk}) \tag{21}$$

利用(16)经简单计算，得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta S &= \sum_{i,j,k}h_{ijk}^2 + \sum_{i,j}h_{ij}\Delta h_{ij} \\ &= \sum_{i,j,k}h_{ijk}^2 + \sum_{i,j,k}h_{kkij}h_{ij} + \sum_{i,j,k}K_{n+1\,kn+1\,k}h_{ij}^2 - \sum_{i,j,k}K_{n+1\,in+1\,j}h_{ij}h_{kk} \\ &\quad + 2\sum_{i,j,k,m}h_{ij}(h_{mj}K_{mkik} + h_{mk}K_{mijk}) - \sum_{i,j,k}h_{ij}h_{jk}h_{ki}\sum_{i,j}h_{ij} + (\sum_{i,j}h_{ij}h_{ji})^2\end{aligned} \tag{22}$$

下面估计(22)式中的各项，由(17)得

$$\sum_{i,j,k}K_{n+1\,kn+1\,k}h_{ij}^2 = S\sum_k K_{n+1\,kn+1\,k} \geqslant S\left(\frac{-2nR}{n-1} + \frac{K}{n-1}\right) \tag{23}$$

令 $h_{ij}=\lambda_i\delta_{ij}$,则

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k}K_{n+1in+1j}h_{ij}h_{kk}&=\sum_{i,j,k}K_{n+1in+1j}\lambda_i\delta_{ij}\lambda_k\\&=\sum_{i,k}K_{n+1in+1i}\lambda_i\lambda_k\\&\leqslant\left(\frac{-2r}{n-1}+\frac{K}{n(n-1)}\right)(nH)^2\end{aligned}\tag{24}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k,m}h_{ij}(h_{mj}K_{mkik}+h_{mk}K_{mijk})&=\sum_{i,j,k,m}\lambda_i\delta_{ij}(\lambda_m\delta_{mk}K_{mkik}+\lambda_m\delta_{mk}K_{mijk})\\&=\sum_{i,k}(\lambda_i^2K_{ikik}+\lambda_i\lambda_kK_{kiik})\\&=\frac{1}{2}\sum_{i,k}(\lambda_i-\lambda_k)^2K_{ikik}\\&\geqslant\frac{1}{2(n-1)}\sum_{i,k}(\lambda_i-\lambda_k)^2\left(2r-\frac{K}{n}\right)\\&=\frac{2nr-K}{n-1}(S-nH^2)\end{aligned}\tag{25}$$

选取适当的基使得 $h_{ij}=\lambda_i\delta_{ij}$

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}h_{ij}h_{jk}h_{ki}\sum_{i,j}h_{ij}&=nH\sum_i\lambda_i^3\\&\leqslant S^2+\frac{n}{2\sqrt{n-1}}S(S-nH^2)\end{aligned}\tag{26}$$

(26)式证明如下

因为
$$\sum_i(\lambda_i-H)=0,\ \sum_i(\lambda_i-H)^2=S-nH^2$$
$$nH\sum_i(\lambda_i-H)^3=nH\sum_i\lambda_i^3-3nH^2S+2n^2H^4,$$

所以
$$\begin{aligned}nH\sum_i\lambda_i^3&=3nH^2S-2n^2H^4+nH\sum_i(\lambda_i-H)^3\\&\leqslant3nH^2S-2n^2H^4+nH\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}(S-nH^2)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

引用以$\pm\dfrac{n}{2\sqrt{n-1}}$为特征值的二次型 $F(x,y)=x^2+\dfrac{n-2}{\sqrt{n-1}}xy-y^2$ 作正交变换得

$$nH\sum_i\lambda_i^3\leqslant S^2+\frac{n}{2\sqrt{n-1}}S(S-nH^2)$$

最后,利用引理 1 和(10),将引理 1 的第一式改写为

$$\sum_{j,k}(-2h_{jjk}h_{ik}-h_{jj}h_{kki}+2h_{jj}K_{n+1kik})=0\tag{27}$$

将此式两端关于指标 i 求共变导数,并关于 i 求和,得

$$\sum_{i,j,k}(-2h_{jjki}h_{ik}-3h_{jjk}h_{iik}-h_{jj}h_{kkii}+4h_{jji}K_{n+1kik}+2h_{jj}K_{n+1kiki})=0,\tag{28}$$

调整指标,结合引理 1 的第二式,可得

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k}h_{kkij}h_{ij}&=-\frac{1}{2}\sum_{i,j,k}(3h_{kkii}h_{iik}+h_{ii}h_{jjkk})+2\sum_{i,j,k}h_{jji}K_{n+1kik}+\sum_{i,j,k}h_{jj}K_{n+1kiki}\\&=-\frac{3}{2}\sum_{i,j,k}(h_{jjk}h_{iik}+h_{ii}h_{jjkk})+\sum_{i,j,k}h_{ii}h_{jjk}+2\sum_{i,j,k}h_{jji}K_{n+1kik}+\sum_{i,j,k}h_{jj}K_{n+1kiki}\\&=-\frac{3}{4}\Delta(nH)^2+\sum_{i,j,k}h_{ii}h_{jjkk}+\operatorname{div}\omega+\sum_{i,j,k}h_{jji}K_{n+1kik}\\&=-\frac{3}{4}\Delta(nH)^2+\operatorname{div}\omega+\sum_{i,j,k}h_{jji}K_{n+1kik}\\&\quad+\sum_{i,j,k}h_{ii}h_{jj}K_{n+1kin+1k}-tr(H_{n+1}^2)(trH_{n+1})^2\end{aligned}\tag{29}$$

其中 ω 定义在 M^n 上的 1-形式

$$\omega=\sum_{i,j,k}h_{jj}K_{n+1kik}\omega_i,\quad \operatorname{div}\omega=\sum_{i,j,k}\nabla_i(h_{jj}K_{n+1kik}),$$

因为 M^n 具有常平均曲率,得

$$\sum_{i,j,k} h_{jji} K_{n+1kik} = 0, \tag{30}$$

由(17)式，得

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k} h_{ii} h_{jj} K_{n+1kn+1k} &= (nH)^2 \sum_k K_{n+1kn+1k} \\ &= (nH)^2 \sum_k \frac{1}{n-1}\left(-K_{ii} + K_{n+1n+1} + \frac{K}{n}\right) \\ &\geqslant (nH)^2 \left(\frac{-2nR}{n-1} + \frac{K}{n-1}\right),\end{aligned} \tag{31}$$

$$tr(H_{n+1}^2)(trH_{n+1})^2 = (nH)^2 S, \tag{32}$$

从而有(22)－(32)，有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\Delta S + \frac{3}{4}\Delta(nH)^2 - \mathrm{div}\,\omega \\ &\geqslant \{(nH)^2 \left[\frac{-2nR+2r+K}{n-1} + \frac{-4nr+K}{n(n-1)} + \frac{1}{2\sqrt{n-1}}\right] \\ &+ S\left[\frac{-2nR+4nr-K}{n-1} - \frac{n}{2\sqrt{n-1}} S - S + (nH)^2\right]\}\end{aligned} \tag{33}$$

由于 M^n 是紧致的，将(33)两端积分，利用 Green 散度定理，即得定理1的证明。

参考文献：

[1] EELLS J, LEMAIRE L. Selected Topics in Harmonic Maps[M]. CBMS 50, AMS, 1983.

[2] 姜国英. Riemann 流形间的 2-调和映照及其第一，第二变分公式[J]. 数学年刊，1986，7A(4)：389-402.

[3] 姜国英. Riemann 流形间的 2-调和等距浸入[J]. 数学年刊，1986，7A(2)：130-144.

[4] 欧阳崇珍. 伪黎曼空间型的 2-调和类空子流形[J]. 数学年刊，2000，21A(6)：649-654.

[5] 宋卫东. 关于局部对称空间中 2-调和子流形[J]. 应用数学，2002，12(1)：25-29.

[6] 宋卫东. 关于局部对称伪黎曼流形中的 2-调和类空子流形[J]. 系统科学与数学，2007，27(2)：170-176.

2-Harmonic Compact Space-like Hypersurfaces of a Locally Symmetric Conformally Flat Lorentzian Mainfold

Wang Xingshang

(College of Mathematics and Computer Science, Anhui Normal University, Wuhu 241000, China)

Abstract: In this paper, the author investigated the 2-harmonic Compact Space-like Hypersurfaces of a Locally Symmetric Conformally Flat Lorantzian Manifold, we obtain this kind hypersurfaces generalized Simon's integral inequality.

Key words: locally symmetric; conformally flat; lorantzian manifold; 2-harmonic

(责任编辑　王建华)