

文章编号: 1005-0523(2010)05-0081-04

一类带 $\theta(t)$ 型核的奇异积分算子的有界性

陈跃辉, 叶晓峰, 刁俊东

(华东交通大学 基础科学学院应用数学, 江西 南昌 330013)

摘要: 为了解决 $\theta(t)$ 型奇异积分算子在 Lipschitz 空间上的有界性问题, 通过将标准的奇异积分核 $K(x, y)$ 改为 $\theta(t)$ 型核 $K(x, y)$, 得到 $\theta(t)$ 型奇异积分算子 $Tf(x) = \int K(x, y)f(y)d\mu(y)$ 在 μ 为非双倍测度时, 算子 T_ϵ 在 Lipschitz 空间上的一个等价条件: $\|T_\epsilon 1\|_{\Lambda_\beta} \leq c_1 \Leftrightarrow T_\epsilon: \Lambda_\beta \rightarrow \Lambda_\beta$ 有界且 $\|T_\epsilon\|_{\Lambda_\beta \rightarrow \Lambda_\beta} \leq c_2$ 。

关键词: $\theta(t)$ 型奇异积分算子; 测度; Lipschitz 空间; 有界性

中图分类号: O174.2

文献标识码: A

1 介绍及其定义

近年来, 奇异积分算子得到了广泛的研究, 并取得了丰硕的成果, 尤其是随着一些空间分解理论的建立, 它们在一些空间上的有界性问题得到了解决。1985 年彭立中在文献[1]中引进了具有深刻微分方程背景的 $\theta(t)$ 型 Calderón-Zygmund 算子, 兰家诚在文献[2]和[3]中分别研究了具有 $\theta(t)$ 型 Calderón-Zygmund 核的多线性奇异积分极大算子的 L^p -有界性和 $\theta(t)$ 型 Calderón-Zygmund 核的多线性振荡奇异积分算子的 L^p -有界性的充分条件, 2007 年 Chang Derchen 和 Li Junfeng 在文献[4]中得出了 $\theta(t)$ 型 Calderón-Zygmund 算子的加权估计, 2008 年吴田峰等在文献[5]中研究了 $\theta(t)$ 型 Calderón-Zygmund 算子与 BMO 函数生成的交换子在 $L^p(R^n)$ 空间上的有界性, 2009 年马丽娜在文献[6]中讨论了 $\theta(t)$ 型 Calderón-Zygmund 算子与 Lipschitz 函数生成的交换子在 Lebesgue 空间及 Hardy 空间上的有界性, 同年 Chen Jiahong 在文献[7]中得出了具有 $\theta(t)$ 型 Calderón-Zygmund 核的多线性振荡算子的加权 L^p -有界性, 但对于 $\theta(t)$ 型 Calderón-Zygmund 算子在 Lipschitz 空间上的有界性问题的讨论还没有, 为了得出 $\theta(t)$ 型 Calderón-Zygmund 算子在 Lipschitz 空间上的有界结论, 以便将这些有界结论应用到奇异积分算子的研究中, 这里我们将主要考虑当 $K(x, y)$ 满足 $\theta(t)$ 型条件时, Calderón-Zygmund 积分算子 $Tf(x) = \int K(x, y)f(y)d\mu(y)$ 在 μ 为非双倍测度时, 算子 T_ϵ 在 Lipschitz 空间上的有界性。

μ 是一个有限的 Borel 测度, 并且满足 n -维增长条件: 存在 $n > 0, A > 0$ 可使得对于所有以 r 为半径的球 B_r , 所有的 r 都有 $\mu(B_r) \leq Ar^n$ 。设 (X, d, μ) 是一个测度 μ 满足 n -维增长条件的有限测度空间, (X, d) 是一个度量空间。

定义 1 如果 $\exists M > 0$, 使得对于 $\forall x, y \in S^{n-1}$ 有 $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\beta = Md^\beta(x, y)$ 则 $f \in \text{Lip}_\beta(S^{n-1}) = \Lambda_\beta$ 其中 S^{n-1} 表示在 R^n 上的单位面积球面。

设 $0 < \beta < 1$, 如果 $f \in \Lambda_\beta$, 则 $\sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d^\beta(x, y)} < \infty$ 。记 $\|f\|_{\Lambda_\beta} = \sup(f) + |f|_\beta$

其中: $\sup(f) = \sup_{x \in X} |f(x)|$, $|f|_\beta = \sup_{x \neq y \in X} \frac{|f(x) - f(y)|}{d^\beta(x, y)}$ 。

定义 2 如果存在常数 c_1, c_2 , 使得:

(1) $|K(x, y)| \leq c_1 d^{-n}(x, y)$, $\forall (x, y) \in \Omega$;

收稿日期: 2010-05-14

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10961015)

作者简介: 陈跃辉(1981-), 男, 湖南娄底人, 硕士研究生, 研究方向为调和与分析。

(2) 对 $2d(x_1, x_2) < d(x_1, y)$, 有

$$|K(x_1, y) - K(x_2, y)| + |K(y, x_1) - K(y, x_2)| \leq c_2 \theta\left(\frac{d(x_1, x_2)}{d(x_1, y)}\right) d^{-n}(x_1, y)$$

其中: $\Omega = X \times X \setminus \Delta$, $\Delta = \{(x, y) : x = y\}$, $\theta(t)$ 是一非负非降函数且 $\int_0^1 \frac{\theta(t)}{t} dt < \infty$, $\theta(0) = 0$ 。

则函数 $K(x, y) : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ 是一个 $\theta(t)$ 型的奇异积分核。

设 $\eta \in C^1[0, \infty)$ 可使得 $0 \leq \eta \leq 1$, 当 $0 \leq s \leq 1/2$ 时, $\eta(s) = 0$; 当 $s \geq 1$ 时, $\eta(s) = 1$;

设 $K_\epsilon(x, y) = \eta\left(\frac{d(x, y)}{\epsilon}\right) K(x, y)$, $\epsilon > 0$, $K(x, y)$ 是一个 $\theta(t)$ 型的奇异积分核, 我们记 $T_\epsilon f(x) = \int K_\epsilon(x, y) f(y) d\mu(y)$ 。

2 定理、引理及其证明

定理 令 $K(x, y)$ 是一个 $\theta(t)$ 型的奇异积分核, $\int_0^1 \frac{\theta(t)}{t^{1+\beta}} dt < \infty$, 令 $0 < \beta < 1$, $\forall \epsilon > 0$, 则下面两个结论等价:

(a) $\|T_\epsilon 1\|_{\Lambda_\beta} \leq c_1$;

(b) $T_\epsilon : \Lambda_\beta \rightarrow \Lambda_\beta$ 有界且 $\|T_\epsilon\|_{\Lambda_\beta \rightarrow \Lambda_\beta} \leq c_2$ 。

在证明定理之前, 我们引入以下的引理。

引理^[8] 设 (X, d, μ) 是一个 μ 满足 n -维增长条件的测度空间, $r > 0$, 则

$$(1) \int_{d(x, y) < r} \frac{1}{d^{n-\delta}(x, y)} d\mu(y) \leq c_1 r^\delta, 0 < \delta < n$$

$$(2) \int_{r \leq d(x, y)} \frac{1}{d^{n+\delta}(x, y)} d\mu(y) \leq c_2 r^{-\delta}, \delta > 0$$

$$(3) \int_{r/2 \leq d(x, y) < r} \frac{1}{d^n(x, y)} d\mu(y) \leq c_3$$

定理的证明

首先, 由 $1 \in \Lambda_\beta$ 可知条件 (b) 可推出条件 (a)。接下来, 我们证明条件 (a) 也可推出条件 (b), 为了证明条件 (a) 也可推出条件 (b), 首先对于所有的 $x \in X$, 观察发现, 当 $0 < r_1 < r_2 < \infty$ 时, 我们有

$$T_{r_1} 1(x) - T_{r_2} 1(x) = \int_{\frac{1}{2}r_1 < d(x, y) < r_1} \eta\left(\frac{d(x, y)}{r_1}\right) K(x, y) d\mu(y) + \int_{r_1 \leq d(x, y)} K(x, y) d\mu(y) - \int_{\frac{1}{2}r_2 < d(x, y) < r_2} \eta\left(\frac{d(x, y)}{r_2}\right) K(x, y) d\mu(y) - \int_{r_2 \leq d(x, y)} K(x, y) d\mu(y)$$

因为左边的式子在 r 和 x 中是一致有界的, 且由引理中的增长条件可知上面的第一个和第三个式子也是一致有界的, 因此

$$\text{对于所有的 } x \left| \int_{r_1 < d(x, y) < r_2} K(x, y) d\mu(y) \right| \leq c$$

现在, 我们估计 $\sup |T_\epsilon f(x)|$, 首先

$$\begin{aligned} T_\epsilon f(x) &= \int_{d(x, y) \leq \epsilon} K_\epsilon(x, y) f(y) d\mu(y) + \int_{d(x, y) > \epsilon} K_\epsilon(x, y) f(y) d\mu(y) \\ &= \int_{d(x, y) \leq \epsilon} K_\epsilon(x, y) (f(y) - f(x)) d\mu(y) + f(x) \int_{\frac{1}{2}\epsilon < d(x, y) \leq \epsilon} K_\epsilon(x, y) d\mu(y) + \\ &\quad f(x) \int_{\epsilon < d(x, y) \leq 1} K_\epsilon(x, y) d\mu(y) + \int_{d(x, y) > 1} K_\epsilon(x, y) f(y) d\mu(y) \\ &= \int_{d(x, y) \leq \epsilon} K_\epsilon(x, y) d^\beta(x, y) d\mu(y) + f(x) \int_{\frac{1}{2}\epsilon < d(x, y) \leq \epsilon} \frac{1}{d^n(x, y)} d\mu(y) + \end{aligned}$$

$$\therefore \sup_{x \in X} |T_{\mathcal{F}}(x)| \leq c \left(\|f\|_{\infty} + |f|_{\beta} \right) = c \|f\|_{\Lambda_{\beta}}$$

最后,我们估计 $\sup_{x \neq y} \frac{|T_{\mathcal{F}}(x) - T_{\mathcal{F}}(y)|}{d^{\beta}(x, y)}$

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{F}}(x_1) - T_{\mathcal{F}}(x_2) &= \int K_{\epsilon}(x_1, y) f(y) d\mu(y) - \int K_{\epsilon}(x_2, y) f(y) d\mu(y) \\ &= \int [f(y) - f(x_1)] [K_{\epsilon}(x_1, y) - K_{\epsilon}(x_2, y)] d\mu(y) \\ &\quad + f(x_1) [T_{\epsilon}1(x_1) - T_{\epsilon}1(x_2)] \end{aligned}$$

$\therefore$ 由 $\|T_{\epsilon}1\|_{\Lambda_{\beta}} \leq c$ 可得

$$|f(x_1)| |T_{\epsilon}1(x_1) - T_{\epsilon}1(x_2)| \leq c \sup(f) d^{\beta}(x_1, x_2)$$

令 $r = d(x_1, x_2)$

$$\begin{aligned} &\int K_{\epsilon}(x_1, y) [f(y) - f(x_1)] d\mu(y) - \int K_{\epsilon}(x_2, y) [f(y) - f(x_1)] d\mu(y) \\ &= \int_{d(x_1, y) < 3r} K_{\epsilon}(x_1, y) [f(y) - f(x_1)] d\mu(y) + \int_{d(x_1, y) < 3r} K_{\epsilon}(x_2, y) [f(x_1) - f(y)] d\mu(y) + \\ &\int_{3r \leq d(x_1, y)} [f(y) - f(x_1)] [K_{\epsilon}(x_1, y) - K_{\epsilon}(x_2, y)] d\mu(y) = H_1 + H_2 + H_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |H_1| &\leq |f|_{\beta} \int_{d(x_1, y) < 3r} K_{\epsilon}(x_1, y) d^{\beta}(x_1, y) d\mu(y) \geq c |f|_{\beta} \int_{d(x_1, y) < 3r} \frac{d\mu(y)}{d^{\beta}(x_1, y)} \\ &\leq c_1 |f|_{\beta} d^{\beta}(x_1, x_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |H_3| &\leq |f|_{\beta} \int_{3r \leq d(x_1, y)} d^{\beta}(x_1, y) \left[\left| \eta\left(\frac{d(x_1, y)}{\epsilon}\right) - \eta\left(\frac{d(x_2, y)}{\epsilon}\right) \right| |K(x_1, y)| + \right. \\ &\quad \left. \left| \eta\left(\frac{d(x_2, y)}{\epsilon}\right) \right| |K(x_1, y) - K(x_2, y)| \right] d\mu(y) \\ &= |f|_{\beta} \int_{3r \leq d(x_1, y)} d^{\beta}(x_1, y) \left| \eta\left(\frac{d(x_1, y)}{\epsilon}\right) - \eta\left(\frac{d(x_2, y)}{\epsilon}\right) \right| |K(x_1, y)| d\mu(y) + \\ &\quad |f|_{\beta} \int_{3r \leq d(x_1, y)} d^{\beta}(x_1, y) \left| \eta\left(\frac{d(x_2, y)}{\epsilon}\right) \right| |K(x_1, y) - K(x_2, y)| d\mu(y) = I_1 + I_2 \end{aligned}$$

由引理可得

$$I_1 \leq |f|_{\beta} \int_{3r \leq d(x_1, y)} d^{\beta}(x_1, y) \|\eta'\|_{\infty} \frac{|d(x_1, y) - d(x_2, y)|}{\epsilon} |K(x_1, y)| d\mu(y)$$

$$\leq c |f|_{\beta} \int_{3r \leq d(x_1, y)} d^{\beta}(x_1, y) \left(\frac{|d(x_1, x_2)|}{\epsilon} \right)^{\beta} |K(x_1, y)| d\mu(y)$$

$$\leq c |f|_{\beta} d^{\beta}(x_1, x_2)$$

$$I_2 \leq c |f|_{\beta} \int_{3r \leq d(x_1, y)} d^{\beta}(x_1, y) |K(x_1, y) - K(x_2, y)| d\mu(y)$$

$$\leq c |f|_{\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{3^k r \leq d(x_1, y) < 3^{k+1} r} d^{\beta-n}(x_1, y) \theta\left(\frac{r}{d(x_1, y)}\right) d\mu(y)$$

$$\leq c |f|_{\beta} \sum_{k=1}^{\infty} (3^k)^{\beta-n} r^{\beta-n} 3^{kn+n} \theta\left(\frac{1}{3^k}\right) \leq c |f|_{\beta} d^{\beta}(x_1, x_2) \sum_{k=1}^{\infty} 3^{k\beta} \theta\left(\frac{1}{3^k}\right)$$

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{\theta(t)}{t} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{3^k}}^{\frac{1}{3^{k-1}}} \frac{\theta(t)}{t} dt \geq \sum_{k=1}^{\infty} \theta\left(\frac{1}{3^k}\right) \int_{\frac{1}{3^k}}^{\frac{1}{3^{k-1}}} \frac{dt}{t^{1+\beta}} \geq c \sum_{k=1}^{\infty} \theta\left(\frac{1}{3^k}\right) \left(\frac{1}{3^k}\right)^{1+\beta} \\ &\quad \cdot \frac{1}{3^k} = c \sum_{k=1}^{\infty} 3^{k\beta} \theta\left(\frac{1}{3^k}\right) \end{aligned}$$

而 $\int_0^1 \frac{\theta(t)}{t^{1+\beta}} dt < \infty$

$\therefore |H_3| \leq c_3 |f|_{\beta} d^{\beta}(x_1, x_2)$

$|H_2| = \int_{d(x_1, y) < 3r} K_{\epsilon}(x_2, y) [f(y) - f(x_1)] d\mu(y)$

$= \int_{d(x_1, y) < 3r} K_{\epsilon}(x_2, y) [f(y) - f(x_2)] d\mu(y) + [f(x_2) - f(x_1)] \int_{d(x_1, y) < 3r} K_{\epsilon}(x_2, y) d\mu(y)$

$= J_1 + J_2 \quad |J_1| \leq |f|_{\beta} \int_{d(x_2, y) < 3r} \frac{d\mu(y)}{d^{n-\beta}(x_2, y)} \leq c |f|_{\beta} d^{\beta}(x_1, x_2)$

$\int_{d(x_1, y) < 3r} K_{\epsilon}(x_2, y) d\mu(y) = \int_{d(x_2, y) < 2r} K_{\epsilon}(x_2, y) d\mu(y) + \int_{\{y: d(x_1, y) < 3r\} \setminus \{y: d(x_2, y) < 2r\}} K_{\epsilon}(x_2, y) d\mu(y)$

$\left| \int_{d(x_2, y) < 2r} K_{\epsilon}(x_2, y) d\mu(y) \right| \leq c$

$\left| \int_{\{y: d(x_1, y) < 3r\} \setminus \{y: d(x_2, y) < 2r\}} K_{\epsilon}(x_2, y) d\mu(y) \right| \leq \int_{\{y: 2r < d(x_2, y) < 4r\}} |K_{\epsilon}(x_2, y)| d\mu(y) \leq c$

综上: $|T_{\epsilon}f(x_1) - T_{\epsilon}f(x_2)| \leq c \|f\|_{\Lambda_{\beta}} d^{\beta}(x_1, x_2)$

最后可得: $\|T_{\epsilon}f\|_{\Lambda_{\beta}} \leq c \|f\|_{\Lambda_{\beta}}$

从而定理得证。

参考文献:

- [1] 彭立中. 广义 Calderón Zygmund 算子及其加权模不等式[J]. 数学进展, 1985, 25(02): 12-16.
- [2] 兰家诚. 具广义 Calderón Zygmund 核的多线性振荡奇异积分极大算子的有界性[J]. 数学年刊, 2005, 26(6): 799-812.
- [3] 兰家诚. 广义 Calderón Zygmund 核的多线性振荡奇异积分算子的 L^p -有界性[J]. 应用数学学报, 2006, 29(2): 566-576.
- [4] Chang Derchen, Li Junfeng. Weighted scale estimates for generalized Calderón Zygmund type operators[J]. Contemporary Math, Amer Math Soc, 2007, 44(5): 61-70.
- [5] 吴田峰. $\theta(t)$ 型 Calderón Zygmund 算子交换子的有界性[J]. 绵阳师范学院学报, 2008, 27(8): 306-314.
- [6] 马丽娜. 广义 Calderón Zygmund 算子交换子的有界性[J]. 高校应用数学学报, 2009, 24(4): 453-461.
- [7] Chen Jiahong. Weighted L^p -boundedness of multilinear oscillatory singular integral with generalized Calderón-Zygmund kernel[J]. Journal of the Graduate School of the Chinese Academy of Sciences, 2009, 26(5): 852-866.
- [8] EDUARDO G A. Boundedness on inhomogeneous Lipschitz spaces of fractional integrals, singular integrals and hypersingular integrals associated to non-doubling measures. [J]. Math. CT, 2008, 106(3): 956-980.

Boundedness for $\theta(t)$ -type Calderón-Zygmund Operators on Lipschitz Spaces

CHEN Yuehui, YE Xiaofeng, DIAO Jundong

(School of Basic Sciences, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: In order to solve the boundedness problem of the $\theta(t)$ -type Calderón-Zygmund integral operator in Lipschitz spaces, a $\theta(t)$ -type kernel in place of a standard singular integral kernel is used, when μ is non doubling measures it could get that the following two statements are equivalent: a) $\|T_{\epsilon}1\|_{\Lambda_{\beta}} \leq c_1$; $T_{\epsilon}: \Lambda_{\beta} \rightarrow \Lambda_{\beta}$ are bounded and $\|T_{\epsilon}\|_{\Lambda_{\beta} \rightarrow \Lambda_{\beta}} \leq c_2$.

Key words: $\theta(t)$ -type Calderón-Zygmund integral operator; measures; Lipschitz spaces; boundedness