

文章编号: 1005-0523(2010)06-0066-05

# 提高级配指标计算精度方法研究

莫林利<sup>1</sup>, 赵秀绍<sup>2</sup>

(华东交通大学 1. 软件学院; 2. 土木建筑学院, 江西 南昌 330013)

**摘要:**级配曲线是颗粒分析试验的重要成果图件, 用其计算的不均匀系数  $C_u$  与曲率系数  $C_c$  是路基填料划分的重要指标。传统作图法整理级配曲线时, 工作量大且精度不高。在分析线性插值、多项式插值、Lagrange 插值与分段抛物线插值算法的基础上, 提出了修正样条函数拟合的方法, 得到土的光滑颗粒级配曲线。针对非单调样条函数, 采用最佳逼近算法求解, 克服了曲线出现平台时病态函数问题。文中提供了求解的关键代码, 实践表明该法可以提高计算级配指标的精度和自动化程度。

**关键词:**级配曲线; 级配指标; 样条插值; 最佳逼近; Visual Basic

**中图分类号:** TP311; TP274

**文献标识码:** A

颗粒分析试验是测定干土中各种粒组所占该土总土质量的百分数的方法, 借以明确颗粒大小的分布情况, 供土的分类、判断土的工程性质及选料之用。传统方法采用人工计算, 手工绘制级配曲线, 需要花费一定的时间且易出错, 近年来工程人员对此进行了改进并逐渐实现了计算机软件辅助计算。黄碧霞<sup>[1]</sup>利用数字图像处理分析了粗集料颗粒的大小分布, 采用 Visual Basic 编制了有针对性的数字图像处理 DIP 程序以获得级配曲线。丁丽萍<sup>[2]</sup>尝试编写应用软件替代人工分析, 阐述了开发颗粒分应用软件的思路和原理。潘福营<sup>[3]</sup>利用 EXCEL 软件可以自动进行计算并自动生成相应的颗粒分析级配曲线, 具有快速、准确、节省工作量的效果。戴清等<sup>[4]</sup>在标准方程、叠加拟合方程等相关方法的基础上, 推荐了一个泥沙颗粒级配曲线方程, 该方程考虑了泥沙的非均匀性。封光寅等<sup>[5]</sup>通过理论分析和研究, 论述了不同种泥沙颗粒级配曲线的适用性与有关特征值之间的关系, 同时还介绍了一种新的泥沙颗粒级配曲线绘制方法。

以上研究表明, 有些程序或软件已经能非常好的完成土粒级配曲线的绘制, 但基于级配曲线自动求得土的不均匀系数  $C_u$  与曲率系数  $C_c$  在目前的研究中还比较少见, 仍需要进一步研究。

## 1 级配曲线的传统作图法<sup>[6-7]</sup>

当颗粒分析试验完成后, 首先计算小于某粒径试样质量占试样总质量的百分比。以表 1 中樟树八景镇货场工程土样筛分数据为例。然后以小于某粒径的试样质量占试样总质量的百分比 ( $p/\%$ ) 为纵坐标, 以颗粒粒径 ( $d/\text{mm}$ ) 为横坐标, 在单对数坐标上绘制颗粒大小分布曲线, 如图 1 所示。

在级配曲线上分别查得  $d_{60}$ 、 $d_{30}$ 、 $d_{10}$  (其含义为小于对应粒径的土含量占总土质量的百分比分别为 60%、30%、10%), 按以下公式计算不均匀系数  $C_u$  与曲率系数  $C_c$  :

表 1 樟树八景镇货场工程土样筛分数据表

粒径 $d/\text{mm}$	留筛质量/g	小于该粒径的百分比 $p/\%$
60	1 131	88.62
40	1 029	78.33
20	1 467	63.66
10	1 596	47.70
5	1 334	34.36
2	1 357	20.79
1	294	17.85
0.25	542	12.43
0.075	850	3.93
<0.075	393	—

收稿日期: 2010-10-28

基金项目: 华东交通大学校立科研基金(09RJ05); 江西省教改课题(JXJG-10-5-20)

作者简介: 莫林利(1977—), 女, 讲师, 硕士, 研究方向为计算机应用。

$$C_u = \frac{d_{60}}{d_{10}} \quad (1)$$

$$C_c = \frac{d_{30}^2}{d_{10} \times d_{60}} \quad (2)$$

式(1)和(2)中,  $d_{60}$ ,  $d_{10}$ ,  $d_{30}$ —粒径分布曲线的纵坐标上  $p$  等于 60%, 10%, 30% 时对应的粒径。

当  $C_u > 5$  且  $C_c$  在 1~3 时, 土样为级配良好的土。其对路基填料定名非常重要, 例如级配良好的砾砂为 A 级填料, 级配不良的砾砂为 B 级填料。由于在坐标纸上读  $d_{60}$ ,  $d_{30}$ ,  $d_{10}$  时受人为因素影响较大, 造成计算精度较低。

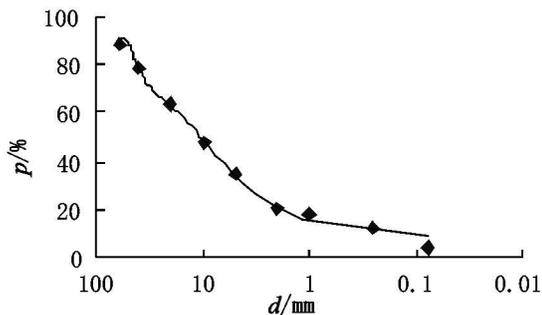
## 2 几种常见数解法的对比

### 2.1 线性插值

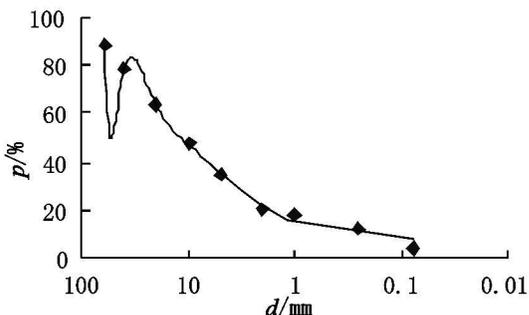
若各点间采用线性插值, 则相当于用直线把相邻两点连接起来, 和 Excel 中的折线图类似, 但违反了土工试验规范中用光滑曲线连接的原则, 作图报告不美观, 计算级配指标时会造成较大的偏差。

### 2.2 多项式拟合

在作图法的基础上, 林轩昌在“颗粒分析试验中特征粒径对应的土质量百分数的拟合计算”<sup>[8]</sup>一文建议颗粒分配曲线可采用 4 次多项式拟合提出了数解法, 大大提高自动化程度。在樟树八景镇货站工程土样应用中发现, 4 次多项式拟合时有许多点不在曲线上, 当提高多项式次数时, 拟合曲线线形起伏变化大, 出现了更大的偏差, 见图 2 中的(a)(b)。



(a) 4次多项式拟合



(b) 5次多项式拟合

图 2 土样级配曲线多项式拟合情况

由图 2 (a)、(b)可知, 利用多项式拟合求解  $C_u$  与  $C_c$  时, 可能出现较大的偏差, 特别是  $C_u$  接近于 5,  $C_c$  接近于 1 或 3 时, 严重时可能影响填料定名。

### 2.3 Lagrange 插值与分段抛物线插值

将线性插值法应用于非线性函数的数据中, 显然计算精度不能满足要求, 或者说用直线逼近曲线造成的误差较大, 尤其当两个插值结点相距较远时。为了提高精度, 可采用 Lagrange 插值法。Lagrange 插值法是  $n+1$  个结点的多项式计算方法, 可分为直接 Lagrange 插值与一元三点 Lagrange (分段抛物线插值), 相对于多项式拟合, 其可保证各个试验点均在直线上, 但其采用了分段插值, 易造成级配曲线的不

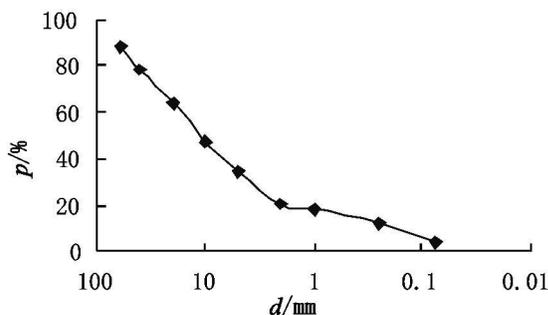


图 1 作图法对应的级配曲线

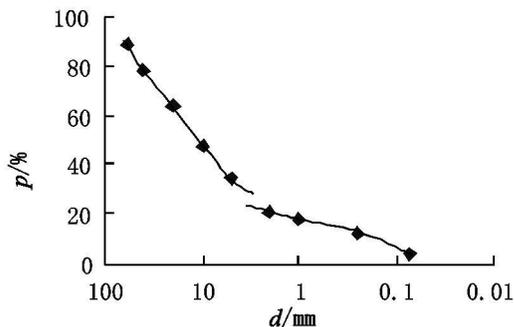


图 3 Lagrange 插值的非连续性

连续,如图3所示。

### 3 三次样条函数插值原理及在级配曲线中的应用

Lagrange 插值方法一般具有较高的精度,但当插值点增多时,所得插值曲线往往会带来插值的不稳定性(曲线非连续或结点处不光滑)。样条函数插值既能保证结点处曲线连续,又能保证结点处有一阶和二阶连续导数。从工程角度上讲,这个样条函数已相当光滑。

#### 3.1 样条插值方法原理

对给定的插值序列 $(x_i, y_i)(i=0, 1, 2, \dots, n)$ 有  $n+1$  个插值结点  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ , 其对应函数值为  $y_0, y_1, \dots, y_n$ , 若在  $[a, b]$  上插值函数满足下面 3 个条件:

(1) 插值条件,即

$$S(x_i) = y_i (i=0, 1, 2, \dots, n) \tag{3}$$

(2) 连接条件,即在区间  $[x_0, x_n]$  上, 结点  $x_i (i=0, 1, 2, \dots, n-1)$  处具有一阶和二阶连续导数

$$S'(x_i-0) = S'(x_i+0) \tag{4}$$

$$S''(x_i-0) = S''(x_i+0) \tag{5}$$

(3) 在每个子区间  $[x_{i-1}, x_i] (i=1, 2, \dots, n)$  上  $S(x)$  都是三次多项式, 则称函数  $S(x)$  为三次样条函数, 具体推导过程不再详述。

#### 3.2 工程应用

本程序在 Visual Basic 程序设计语言环境下实现。设 Public Function YangTiao(X() As Double, Y() As Double, X1 As Double) As Double 为 Visual Basic 中已经编制好的样条函数, 以筛分标准筛粒径  $\lg d$  作为数组  $d()$ , 以小于标准筛粒径土所占百分比为  $p()$ , 以  $K$  作为  $d$  的插值, YangTiao 返回  $K$  插值后小于  $K$  所对应的百分数值, 为双精度型。其调用方法可以通过以下循环调用:

```
For K = d(0) To d(UBound(d)) Step 0.001 '样条曲线拟合
```

```
Y1 = YangTiao(d(), p(), K)
```

```
Picture1.PSet (K, Y1)
```

```
Next
```

调用后得到插值序列 $(d_i, p_i)$ , 然后把插值后的点顺次连接起来, 则可得到光滑的级配曲线, 如图4所示。

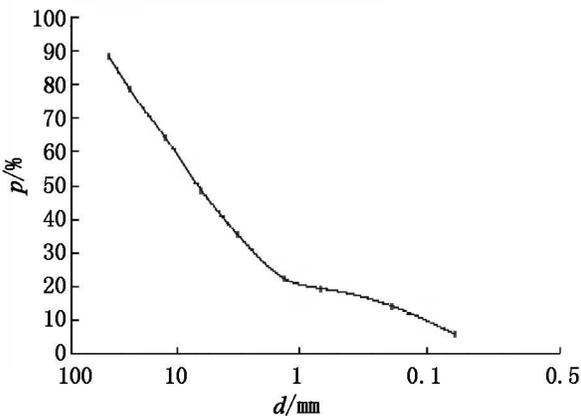


图4 样条曲线插值所得级配曲线图

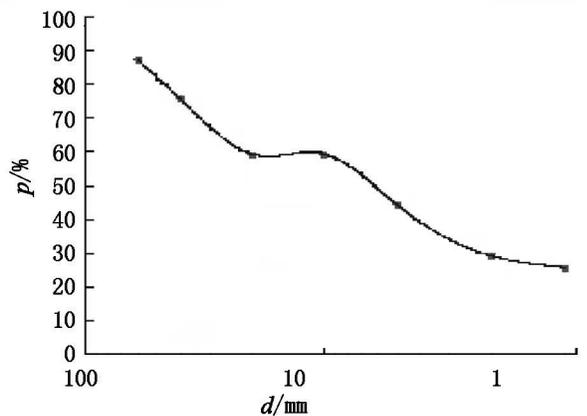


图5 病态级配曲线

#### 3.3 指标求解与修正

要求解  $C_u$  与  $C_c$ , 须先求解  $d_{60}, d_{30}, d_{10}$ , 对于 YangTiao 函数, 考虑到是半对数坐标, 可以反向调用样条函数求解。此时, 以  $p()$  为插值数组,  $d()$  为被插值数组, 反向插值程序如下所示。

$$d_{60} = 10 \cdot \text{YangTiao}(p(), d(), 60)$$

$$d_{30} = 10 \cdot \text{YangTiao}(p(), d(), 30)$$

$$d_{10} = 10 \cdot \text{YangTiao}(p(), d(), 10)$$

按照以上程序从级配曲线上可以精确求出  $d_{60}$ ,  $d_{30}$ ,  $d_{10}$  后, 可按公式(1)、(2)求解  $C_u$  与  $C_c$ 。

当每个粒组都有相当数量的土粒不会出现问题, 但当某两粒径间的土粒质量为 0 时或数量很小时, 样条曲线会出现反曲病态现象。例如表 1, 粒径为 10 mm 的筛上土质量为 0 g, 则会出现如图 5 所示的情况。

从图 5 中可看出, 样条曲线不是单调的增函数, 此时若采用样条函数插值, 可能对应的曲线上有两个粒径对应  $d_{60}$ , 造成求解失败。因此, 已经不能用样条函数反求  $d_{60}$ , 且所得级配曲线也是病态的。

可以采用下述方法解决。在从小粒径  $d_1$  向大粒径  $d_2$  作曲线时, 当发现大粒径对应的  $p_2$  小于  $p_1$  时, 取  $p_2 = p_1$ , 则不会出现反曲病态曲线, 但此时仍不能用反向插值法求解  $d_{60}$ ,  $d_{30}$ ,  $d_{10}$ 。

下面以求解  $d_{60}$  为例, 当进行样条曲线拟合插值时, 可以设  $\text{delt}60 = 1$ , 当某个粒径插入的值  $Y_1$  与 60% 最接近时, 此时对应的  $K$  值就近似为  $d_{60}$ , 算法设计流程图如图 6 所示。可以用下列语句实现以上算法:

```

delt60=1;d60=0
For K = d(0) To d(UBound(d)) Step 0.001 '样条曲线拟合, 0.001 为插入计算步长
    Y1 = YangTiao(d(), p(), K)
    If Abs(Y1-60) < delt60 then
        delt60 = Abs(Y1-60)
        d60 = K
    End if
Next
d60 = 10 * d60
    
```

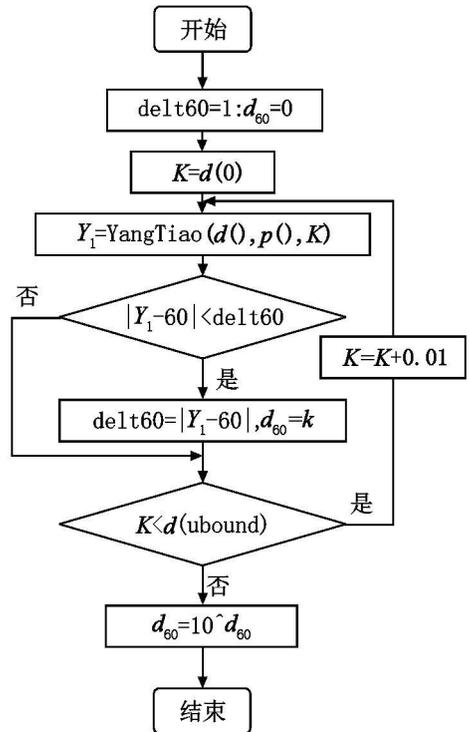


图 6 修正法程序流程图

采用最佳逼近算法是一种近似算法, 它和直接反向插值法都可解决作图法估读数字不唯一问题, 但可以解决样条函数非单调时求解失败问题, 表 2 是两种方法的比较。

表 2 级配曲线正常情况下两种方法的比较

指标	插入法	最佳逼近法(步长)		
		0.001	0.0001	0.00001
$d_{60}/\text{mm}$	17.159	16.985	16.973	16.975
$d_{30}/\text{mm}$	4.582	3.900	3.904	3.903
$d_{10}/\text{mm}$	0.158	0.170	0.170	0.170
$C_u$	108.429	99.912	99.841	99.853
$C_c$	7.731	5.268	5.282	5.279

表 2 中的数据表明反向插值法与最佳逼近法有时有相当大的差距, 通过图 5 表明, 反向插值法可能在某些点出现病态, 特别是两点的  $p$  相差不大时。对于求解步长, 通过表 2 表明, 步长越小, 精度越高, 可以取 0.00001。

#### 4 结论

在比较各种拟合的基础上, 确定了样条函数拟合的方法; 提出了对于单调样条函数可利用反向插值求

解  $d_{60}$ 、 $d_{30}$ 、 $d_{10}$  然后求解  $C_u$  与  $C_c$ ;

对于非单调函数,可能出病态曲线,提出了最佳逼近算法,解决了不能插值问题。并给出了在 Visual Basic 编程环境下的主要功能代码。

### 参考文献:

- [1] 黄碧霞,陆阳.基于数字图像处理的粗集料颗粒分布分析[J].路基工程,2008,26(1):23-25.
- [2] 丁丽萍.计算机技术在泥沙颗粒分析工作中的应用[J].山西水利,2006,22(6):110-111.
- [3] 潘福营.利用 EXCEL 自动绘制颗粒级配曲线的方法[J].四川水力发电,2010,29(3):48-49.
- [4] 戴清,韩其为,胡健,等.泥沙颗粒级配曲线的方程拟合及其应用[J].人民黄河,2009,31(10):69-71.
- [5] 封光寅,赵成海,张孝军,等.泥沙颗粒级配曲线与有关特征值关系分析[J].中国粉体技术,2005,16(4):6-9.
- [6] 中华人民共和国国家标准.GB/T50123-1999,土工试验方法标准[S].北京:中国建筑工业出版社,1999.
- [7] 中华人民共和国国家标准.TB 10102-2004,铁路工程土工试验规程[S].北京:中国铁道出版社,2004.
- [8] 林轩昌.颗粒分析试验中特征粒径对应的土质量百分数的拟合计算[J].公路,1998,43(8):22-24.

## A Research to Enhance Computation Precision of Gradation Index

Mo Linli, Zhao Xiushao

(1.School of Software;2.School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

**Abstract:** The gradation curve is an important achievement graphic document of the grading analytical investigation. Nonuniformity coefficient ( $C_u$ ) and curvature coefficient ( $C_c$ ) are important target to divide the road padding. The amount work is great and computation precision is low when using traditional graphing method. Based on the analysis of common algorithm such as linear interpolation, polynomial interpolation, Lagrange interpolation, sectoring parabola interpretation, the paper proposes the revision spline function fit method, and then obtain smooth gradation curve. In view of the non-monotonous spline function, the optimal approximation algorithm is used to solve and overcome the curve which has platform caused ill-conditioned curve. The method enhances the computation precision and automation of gradation index and key codes are provided.

**Key words:** gradation curve; gradation index; spline interpolation; optimal approximation; visual basic

(责任编辑 王建华)