文章编号:1005-0523(2011)01-0073-04

多次线性奇异积分算子在广义Morrey空间上的有界性

叶晓峰,李晓霞

(华东交通大学基础学院,江西 南昌 330013)

摘要:主要研究一类多次线性奇异积分算子 $T^A(f)(x)$,其中 $A_j\,(j=1,\cdots,l)$ 是 R^n 上的函数,且向量函数 $\boldsymbol{A}=(A_1,\cdots,A_l)$,若 $D^\alpha A_j\in \mathrm{BMO}(R^n)$,则算子 T^A 在广义Morrey空间上是有界的。

关键词:奇异积分算子;BMO;广义Morrey空间

中图分类:O174.2 **文献标识码:**A

多线性奇异积分算子理论最初由Coifman等在文献[1]中建立的。由于该类算子在偏微分方程中的重要应用,随后许多学者都开始研究此理论,并获得许多重要的结论。对于多次线性Calderón-Zygmund算子文献[2-3]中做了系统的阐述,且在文献[4-5]中研究了Herz-Morrey空间上的多次线性Calderón-Zygmund算子理论的有界性。1991年,Mizuhara引入了一类广义Morrey空间 $L^{p,\varphi}$ 并给出了Hardy-Littlewood极大算子以及Calderón-Zygmund算子在 $L^{p,\varphi}$ 空间上的有界性。如今不管对于多次线性Calderón-Zygmund算子还是对于广义Morrey空间都有了很多结果,本文主要研究多次线性奇异积分算子在某类广义Morrey空间的有界性问题。

1 定义和引理

定义1[6] 对于任意 $1\leqslant p<\infty$,定义广义Morrey空间的定义:

$$L^{p,\omega}(R^n)=\left\{f\in L^p_{\mathrm{loc}}(R^n):\|f\|_{p,\omega}<\infty\right\}$$

式中

$$\|f\|_{p,\omega}=\sup_{\substack{x\in R^n\\ r>0}}\left(\frac{1}{\omega(x,r)}\int_{B(x,r)}|f(y)|^p\mathrm{d}y\right)^{1/p}$$

式中:$B(x,r)$ 是以 x 为中心,半径为 r 的球;ω 是关于 r 在 $(0,\infty)$ 上正的增长函数,对任意的 $r>0$,满足双信条件 $\omega(x,2r)\leqslant D\omega(x,r)$,这里 $D\geqslant 1$ 是与 r 无关的常数。

当 $\omega(x,r)=r^\lambda,\lambda\in(0,n)$ 时,$L^{p,\omega}(R^n)$ 恰好就是经典的Morrey空间 $L^{p,\lambda}(R^n)$。

定义2[7] 设 $m_j\,(j=1,\cdots,l)$ 是正整数,$m_1+\cdots+m_l=m$,$A_j\,(j=1,\cdots,l)$ 是 R^n 上的某些函数,向量 $\boldsymbol{A}=(A_1,\cdots,A_l)$,则多线性奇异积分算子 T 定义为:

$$T^A(f)(x)=\int_{R^n}\frac{\prod_{j=1}^{l}R_{m_j+1}(A_j;x,y)}{|x-y|^m}K(x,y)f(y)\mathrm{d}y$$

收稿日期:2010-11-22

基金项目:国家自然科学基金(10961015);华东交通大学博士启动基金(01306027)

作者简介:叶晓峰(1980—),男,副教授,博士,硕士导师,研究方向为调和分析及其在偏微分方程上的应用。

式中：$R_{m_j+1}\left(A_j;x,y\right)=A_j(x)-\sum_{|\alpha|\le m_j}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha A_j(y)(x-y)^\alpha$

特别指出 $m=0$ 时，$T^A(f)(x)=\int_{R^n}\prod_{j=1}^{l}\left(A_j(x)-A_j(y)\right)K(x,y)f(y)\mathrm{d}y$，也就是说，$T^A$ 正好是 T 和 A 得到的多次线性交换子。

定理1 对于所有的 α（其中 $|\alpha|=m_j$，$j=1,\cdots,l$）有 $D^\alpha A_j\in \mathrm{BMO}\left(R^n\right)$，若 ω 满足

$$\sup_{t>0}\frac{\omega(x,t)}{t}\int_0^t\frac{\mathrm{d}s}{\operatorname{ess\,sup}_{0<y<s}\omega(x,y)}<\infty$$

则对于所有的 $f\in L^{p,\omega}\left(R^n\right)$，$1<p<\infty$，常数 $C>0$，有

$$\left\|T^A(f)\right\|_{L^{p,\omega}}\leqslant C\prod_{j=1}^{l}\left(\sum_{\left|\alpha_j\right|=m_j}\left\|D^{\alpha_j}A_j\right\|_{\mathrm{BMO}}\right)\|f\|_{L^{p,\omega}}$$

说明：1）将参考文献[7]中多次线性奇异积分算子在Morrey空间上的有界性推广到在广义Morrey空间上的有界性。

2）将参考文献[8]中定理4.1 ω 的条件 $p>1$ 进行推广，而当 $0<p<1$ 时，则不能包含原有条件。

2 引理

为了证明定理，需要下面的引理。

引理1[9] $\boldsymbol{A}$ 是 R^n 的一个函数，且对于所有的 $\alpha\left(|\alpha|=m\right)$ 有 $D^\alpha A\in L^q\left(R^n\right)$，$(q>n)$，则

$$\left|R_m(\boldsymbol{A};x,y)\right|\leqslant C|x-y|^m\sum_{|\alpha|=m}\left(\frac{1}{\left|\tilde{Q}(x,y)\right|}\int_{\tilde{Q}(x,y)}\left|D^\alpha \boldsymbol{A}(z)\right|^q\mathrm{d}z\right)^{1/q}$$

式中：$\tilde{Q}$ 是以 x 为中心，边长为 $5\sqrt{n}|x-y|$ 的方体。

引理2[8] 对于定义在 $(0,\infty)$ 上的非负的非增函数 $g(t)$，当且仅当

$$\boldsymbol{A}=\sup_{t>0}\frac{\omega(x,t)}{t}\int_0^t\frac{\mathrm{d}s}{\operatorname{ess\,sup}_{0<y<s}\omega(x,y)}<\infty,\ C\approx\boldsymbol{A}$$

成立，则有下面不等式

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t>0}\omega(x,t)Hg(t)\leqslant C\operatorname*{ess\,sup}_{t>0}\omega(x,t)g(t)$$

成立，式中：$C\approx\boldsymbol{A}$。

引理3[8] 设 $p\in[1,\infty)$，$f\in L_{\mathrm{loc}}^p\left(R^n\right)$ 且对于所有的 $x_0\in R^n$ 有

$$\int_1^\infty t^{-\frac{n}{p}+1}\|f\|_{L^p\left(B\left(x_0,t\right)\right)}\mathrm{d}t<\infty$$

则对于所有的 $x_0\in R^n, r>0$ 以及 $p\in(1,\infty)$，使得 $Tf(x)$ 满足：

$$\|Tf\|_{L^p\left(B\left(x_0,r\right)\right)}\leqslant Cr^{\frac{n}{p}}\int_{2r}^\infty t^{-\frac{n}{p}+1}\|f\|_{L^p\left(B\left(x_0,t\right)\right)}\mathrm{d}t$$

这里常数 $C>0$ 且不依赖于 x_0,r 和 f。

3 定理的证明

证明定理1 设 $f_1=f_{\chi_{2B}}$，$f=f_1+f_2$，则

$$\left\|T^A(f)\right\|_{L^{p,\omega}}=\left\|T^A(f_1)\right\|_{L^{p,\omega}}+\left\|T^A(f_2)\right\|_{L^{p,\omega}}$$

对于 $x\in Q$，$y\in\tilde{Q}$，由引理2.1，可得

$$\left|R_m\left(\tilde{A}_j;x,y\right)\right|\leqslant C|x-y|^m\sum_{|\alpha_j|=m}\left\|D^{\alpha_j}A_j\right\|_{\mathrm{BMO}}$$

由引理1和 $T^A f$ 的 L^p 有界性

$$\left\|T^A(f_1)\right\|_{L^{p,\omega}}=\sup_{\substack{x\in R^n\\r>0}}\left(\frac{1}{\omega(x,r)}\int_{B(x,r)}\left|T^A(f_1)\right|^p\mathrm{d}y\right)^{1/p}=\sup_{\substack{x\in R^n\\r>0}}\omega(x,r)^{-1/p}\left\|T^A(f_1)\right\|_{L^p(B(x,r))}\leqslant$$

$$C\sup_{\substack{x\in R^n\\r>0}}\omega(x,r)^{-1/p}\prod_{j=1}^{l}\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}\left\|D^{\alpha_j}A_j\right\|_{\mathrm{BMO}}\right)\left\|f_1\right\|_{L^p(R^n)}\leqslant C\prod_{j=1}^{l}\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}\left\|D^{\alpha_j}A_j\right\|_{\mathrm{BMO}}\right)\sup_{\substack{x\in R^n\\r>0}}\omega(x,r)^{-1/p}\|f\|_{L^p(2B(x,r))}\leqslant$$

$$C\prod_{j=1}^{l}\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}\left\|D^{\alpha_j}A_j\right\|_{\mathrm{BMO}}\right)\|f\|_{L^{p,\omega}(2B(x,r))}$$

$$\left\|T^A(f_2)\right\|_{L^{p,\omega}}\leqslant\sup_{\substack{x\in R^n\\r>0}}\left(\frac{1}{\omega(x,r)}\int_{B(x,r)}\left|T^A(f_2)\right|^p\mathrm{d}y\right)^{1/p}\leqslant\sup_{\substack{x\in R^n\\r>0}}\omega(x,r)^{-1/p}\left\|T^A(f_2)\right\|_{L^p(B(x,r))}$$

式中:$\left|T^A(f_2)(y)\right|=\int_{R^n}\dfrac{\prod_{j=1}^{l}R_{m_j+1}\left(A_j;y,z\right)}{|y-z|^m}K(y,z)f_2(z)\mathrm{d}z$

因为 $y\in B(x,r)$, $z\in R^n\backslash 2B(x,r)$,则

$$\frac{1}{2}|x-z|<|y-z|<|x-y|+|x-z|<2|x-z|$$

$$\left|T^A(f_2)(y)\right|\leqslant C\prod_{j=1}^{l}\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}\left\|D^{\alpha_j}A_j\right\|_{\mathrm{BMO}}\right)\int_{R^n\backslash 2B}\frac{|f_2(z)|}{|y-z|^n}\mathrm{d}z\leqslant C\prod_{j=1}^{l}\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}\left\|D^{\alpha_j}A_j\right\|_{\mathrm{BMO}}\right)\int_{|x-z|>r}\frac{|f_2(z)|}{|x-z|^n}\mathrm{d}z\leqslant$$

$$C\prod_{j=1}^{l}\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}\left\|D^{\alpha_j}A_j\right\|_{\mathrm{BMO}}\right)\int_{|x-z|>r}|f_2(z)|\int_{|x-z|}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^{n+1}}\mathrm{d}z\leqslant C\prod_{j=1}^{l}\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}\left\|D^{\alpha_j}A_j\right\|_{\mathrm{BMO}}\right)\int_r^{\infty}\frac{1}{t^{n+1}}\int_{r<|x-z|<t}|f_2(z)|\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

则有Hölder不等式得

$$\left|T^A(f_2)(y)\right|\leqslant C\prod_{j=1}^{l}\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}\left\|D^{\alpha_j}A_j\right\|_{\mathrm{BMO}}\right)\int_r^{\infty}\|f_2\|_{L^p(B(x,t))}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{n}{p}+1}}$$

所以

$$\left\|T^A(f_2)\right\|_{L^{p,\omega}}\leqslant C\prod_{j=1}^{l}\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}\left\|D^{\alpha_j}A_j\right\|_{\mathrm{BMO}}\right)\sup_{\substack{x\in R^n\\r>0}}\omega(x,r)^{-1/p}r^{\frac{n}{p}}\int_r^{\infty}\|f_2\|_{L^p(B(x,t))}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{n}{p}+1}}$$

令 $s=t^{-\frac{n}{p}}$, $u=r^{-\frac{n}{p}}$,则有

$$\left\|T^A(f_2)\right\|_{L^{p,\omega}}\leqslant C\prod_{j=1}^{l}\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}\left\|D^{\alpha_j}A_j\right\|_{\mathrm{BMO}}\right)\sup_{\substack{x\in R^n\\r>0}}\omega(x,r)^{-1/p}r^{\frac{n}{p}}\int_0^{r^{-\frac{n}{p}}}\|f_2\|_{L^p\left(B\left(x,s^{-p/n}\right)\right)}\mathrm{d}s\leqslant$$

$$C\prod_{j=1}^{l}\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}\left\|D^{\alpha_j}A_j\right\|_{\mathrm{BMO}}\right)\sup_{\substack{x\in R^n\\r>0}}\omega\left(x,u^{-\frac{p}{n}}\right)^{-1/p}\frac{1}{u}\int_0^u\|f_2\|_{L^p\left(B\left(x,s^{-p/n}\right)\right)}\mathrm{d}s\leqslant$$

$$C\prod_{j=1}^{l}\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}\left\|D^{\alpha_j}A_j\right\|_{\mathrm{BMO}}\right)\sup_{\substack{x\in R^n\\ r>0}}\omega\left(x,u^{-\frac{p}{n}}\right)^{-1/p}\left\|f_2\right\|_{L^p\left(B\left(x,u^{-p/n}\right)\right)}\leqslant C\prod_{j=1}^{l}\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}\left\|D^{\alpha_j}A_j\right\|_{\mathrm{BMO}}\right)\left\|f\right\|_{L^{p,\omega}\left(R^n\setminus 2B\right)}$$

即得

$$\left\|T^A(f)\right\|_{L^{p,\omega}}\leqslant C\prod_{j=1}^{l}\left(\sum_{|\alpha_j|=m_j}\left\|D^{\alpha_j}A_j\right\|_{\mathrm{BMO}}\right)\left\|f\right\|_{L^{p,\omega}}$$

故定理得证。

参考文献：

[1] COIFMAN R R，MEYER Y. On commutators of singular integrals and bilinear singular integrals[J]. Trans Amer Math Soc，1975，212：315-331.

[2] LOUKAS G，TORRES R. Multilinear Calderón-Zygmund theory[J]. Adv in Maths，2002，165（1）：124-164.

[3] LOUKAS G，TORRES R. On multilinear singular integrals of Calderón-Zygmund type[J]. Publications Matematiques，2002，46（1）：57-91.

[4] 陶双平，武江龙. 齐次Morrey-Herz空间上分数次多线性交换子的有界性[J]. 兰州大学学报：自然科学版，2007，43（4）：114-117.

[5] 周疆，江寅生，马柏林，等. 多线性Calderón-Zygmund 在Herz-Morrey空间上的有界性[J]. 兰州大学学报：自然科学版，2009，45（1）：83-87.

[6] 蔡宇泽. 强奇异积分算子 T 在广义Morrey空间上的有界性[J]. 常熟理工学院学报：自然科学，2010，24（2）：19-20.

[7] LIU LANZHE. Boundness for Multilinear Singular Integral Operators on Morrey Spaces[J]. Bull. Malays. Math. Sci. Soc，2010，33（1）：93-103.

[8] AKBULUT A，GULIYEV V，MUSTAFAYEV R. Boundedness of the maximal operator and singular integral operator in generalized morrey spaces[J]. Preprint，Institute of Mathematics，AS CR，Prague，2010，60（1）：1-26.

[9] COHEN J，GOSSELIN J A. A BMO estimate for multilinear singular integrals，Illinois[J]. Illinois Math，1986，30（3）：445-464.

[10] PEETRE J. On the theory of $L_{p,\lambda}$ spaces[J]. Functional Analysis，1969，4（1）：71-87.

[11] STEIN E M. Harmonic Analysis：Real-variable Methods，Orthogonality，and Oscillatory Integrals，Princeton Univ[M]. Princeton，NJ：Princeton University Press，1993.

[12] 谭昌眉. 齐型空间上的Morrey空间极大算子有界性[J]. 数学学报，2003，46（3）：427-430.

Boundedness of Multilinear Singular Integral Operators on Generalized Morrey Spaces

Ye Xiaofeng ，Li Xiaoxia

（School of Basic Science，East China Jiaotong University，Nanchang 330013，China）

Abstract：It define the multilinear singular integral operators $T^A(f)(x)$ ，$A_j\ (j=1,\cdots,l)$ are some functions on R^n ，set $\boldsymbol{A}=\left(A_1,\cdots,A_l\right)$，if $D^\alpha A_j\in\mathrm{BMO}\left(R^n\right)$，then we obtain the boundedness of multilinear singular integral operators on generalized Morrey spaces.

Key words：singular integral operators；BMO；generalized morrey spaces