

文章编号:1005-0523(2011)01-0077-04

关于圈 C_{4h} 的 $(r_1, r_2, \dots, r_{4h})$ -冠的优美性

吴跃生

(华东交通大学基础科学学院, 江西 南昌 330013)

摘要:给出了圈 C_{4h} 的 $(r_1, r_2, \dots, r_{4h})$ -冠的定义, 讨论了圈 C_{4h} 的 $(r_1, r_2, \dots, r_{4h})$ -冠的优美性, 用构造性的方法给出了一些特殊的圈 C_{4h} 的 $(r_1, r_2, \dots, r_{4h})$ -冠的优美标号。证明了一些特殊的圈 C_{4h} 的 $(r_1, r_2, \dots, r_{4h})$ -冠是交错图。

关键词:圈; 冠; 优美图; 交错图

中图分类号:O157.56

文献标识码:A

本文所讨论的图均为无向简单图, $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集。

定义 1^[1] 对于一个图 $G=(V, E)$ 如果存在一个单射 $\theta: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, |E(G)|\}$, 使得对所有边 $e=(u, v) \in E(G)$, 由 $\theta'(e)=|\theta(u)-\theta(v)|$ 导出的 $E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |E(G)|\}$ 是一个双射, 则称 G 是优美图, θ 是 G 的一组优美标号, 称 θ' 为 G 的边上的由 θ 导出的诱导值。

定义 2^[1] 在图 G 每个顶点都粘接了 r 条悬挂边 ($r \geq 1$ 的整数) 所得到的图, 称为图 G 的 r -冠, 图 G 的 1-冠, 称做图 G 的冠。

定义 3 $V(G)=(v_1, v_2, \dots, v_n)$ 的每个顶点 v_i 都粘接了 r_i 条悬挂边 (r_i 为非负整数, $i=1, 2, \dots, n$) 所得到的图, 称为图 G 的 $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ -冠, 简记为 $G(r_1, r_2, \dots, r_n)$ 。特别地, 当 $r_1=r_2=\dots=r_n=r$ 时, 称为图 G 的 r -冠。图 G 的 θ -冠就是图 G 。

定义 4^[2] G 是一个优美二部图, 其优美标号为 θ , $V(G)$ 划分成两个集合 X, Y , 如果 $\max_{v \in X} \theta(v) < \min_{v \in Y} \theta(v)$, 则称 θ 是 G 的交错标号。称 G 是在交错标号 θ 下的交错图。

事实上, G 是在交错标号 θ 下的交错图就是文[1]中所定义的平衡图。

马克杰等在文[1]中证明了图 $P_1 \vee P_n$ 的优美性, 并证明了图 $P_1 \vee P_n$ 的 r -冠的优美性, 由此猜想: 任意优美图的 r -冠都是优美图。

文献[3-6]在上猜想的引导下, 证明了一些优美图(如圈 $C_n((n \equiv 0, 3 \pmod{4}))$) 的 r -冠是优美的。

文献[7]给出了圈 C_n 的 $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ -冠的定义, 讨论了当 $n=7, 8$ 时, 圈 C_n 的 $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ -冠的优美性。本文讨论了当 $n=4h$ 时, 圈 C_n 的 $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ -冠的优美性。

1 主要结果及其证明

定理 当 $n=4h$, h 为非零自然数, r_i 为任意自然数 ($i=1, 2, \dots, 4h$), 圈 C_n 的 $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ -冠的顶点集如图 1 所示, $V(C_n)=(v_1, v_2, \dots, v_n)$, 与 v_i 邻接的端点(或叶)记为 x_{ij} ($v_i \in V(C_n)$, $j=1, 2, \dots, r_i$), 当 $\sum_{i=1}^h r_{2i} = \sum_{i=1}^h r_{4h-2i+1}$ 时, 圈 C_n 的 $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ -冠是交错图。

收稿日期: 2010-11-01

作者简介: 吴跃生(1959—), 男, 副教授, 硕士, 研究方向为图论。

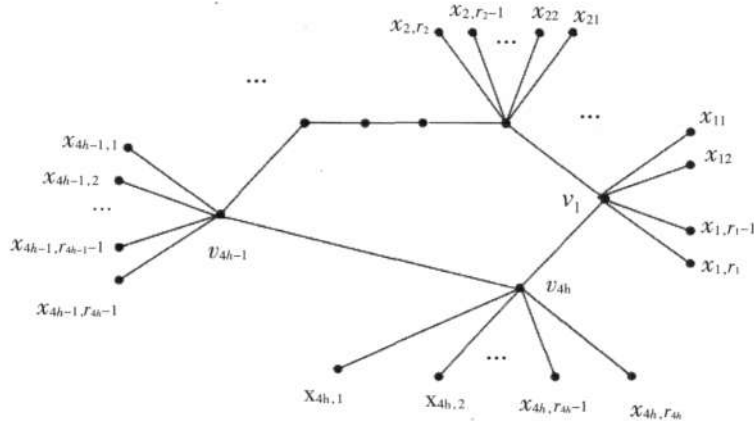


图1 图 C_{4h} 的 $(r_1, r_2, \dots, r_{4h})$ -冠
Fig.1 The vertex set of the $(r_1, r_2, \dots, r_{4h})$ -corona of the cycle C_{4h}

证明 当 $n=4h$, $h \leq 1$ 时, 下面用构造性的方法给出圈 C_n 的 $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ -冠的两种交错(平衡)标号。第一种交错(平衡)标号。定义圈 C_n 的 $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ -冠的顶点标号 θ 为

$$\theta(v_{2i-1}) = i - 1 + \sum_{k=1}^i r_{2k-2}, \quad i = 1, 2, \dots, h, \quad (\text{令 } r_0 = 0)$$

$$\theta(v_{2i-1}) = i + \sum_{k=1}^i r_{2k-2}, \quad i = h+1, h+2, \dots, 2h$$

$$\theta(v_{2i}) = 4h + 1 - i + \sum_{k=1}^{4h} r_k - \sum_{k=1}^i r_{2k-1}, \quad i = 1, 2, \dots, 2h$$

当 $r_j = 0$ 时, $x_{ji} = v_j$ ($j = 1, 2, \dots, 4h$)

当 $r_j \neq 0$ 时, $\theta(x_{ji}) = 4h + 1 + \sum_{k=1}^{4h} r_k - i, \quad i = 1, 2, \dots, r_j$

$$\theta(x_{ji}) = \theta(v_{j-1}) + (-1)^j i, \quad j = 2, 3, \dots, 4h, \quad i = 1, 2, \dots, r_j$$

容易验证: $\theta: V(C_{4h} \text{ 的 } (r_1, r_2, \dots, r_{4h})\text{-冠}) \rightarrow \left\{0, 1, 2, \dots, 4h + \sum_{k=1}^{4h} r_k\right\}$ 是一个单射。

$$\theta'(v_j x_{ji}) = |\theta(v_j) - \theta(x_{ji})| = 4h + 2 - j + \sum_{k=j}^{4h} r_k - i, \quad j = 1, 2, \dots, 2h, \quad i = 1, 2, \dots, r_j$$

$$\theta'(v_j x_{ji}) = |\theta(v_j) - \theta(x_{ji})| = 4h + 1 - j + \sum_{k=j}^{4h} r_k - i, \quad j = 2h+1, 2h+2, \dots, 4h, \quad i = 1, 2, \dots, r_j$$

$$\theta'(v_{j+1} v_j) = |\theta(v_{j+1}) - \theta(v_j)| = 4h + 2 - j + \sum_{k=j+1}^{4h} r_k, \quad j = 1, 2, \dots, 2h$$

$$\theta'(v_{j+1} v_j) = |\theta(v_{j+1}) - \theta(v_j)| = 4h + 1 - j + \sum_{k=j+1}^{4h} r_k, \quad j = 2h+1, 2h+2, \dots, 4h$$

$$\theta'(v_{4h} v_1) = |\theta(v_{4h}) - \theta(v_1)| = 2h + 1 + \sum_{k=1}^{2h+1} r_{2k-2}$$

当 $\sum_{i=1}^h r_{2i} = \sum_{i=1}^h r_{4h-2i+1}$, $r_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, 4h$) 时,

$\theta': E(C_{4h} \text{ 的 } (r_1, r_2, \dots, r_{4h})\text{-冠}) \rightarrow \left\{0, 1, 2, \dots, 4h + \sum_{k=1}^{4h} r_k\right\}$ 是一个双射。

因此 θ 是 C_{4h} 的 $(r_1, r_2, \dots, r_{4h})$ -冠的优美标号。即 C_{4h} 的 $(r_1, r_2, \dots, r_{4h})$ -冠是优美图。

$$\begin{aligned} \text{令: } X &= \{v_{j-1}, x_{ji} (j=2, 4, \dots, 4h, i=1, 2, \dots, r_j)\} \\ Y &= \{v_{j+1}, x_{ji} (j=1, 3, \dots, 4h-1, i=1, 2, \dots, r_j)\} \end{aligned}$$

$$\text{满足 } \max_{v \in X} \theta(v) = 2h + \sum_{k=2h+1}^{4h} r_k < \min_{v \in Y} \theta(v) = 2h + 1 + \sum_{k=2h+1}^{4h} r_k$$

因此 θ 是 C_{4h} 的 $(r_1, r_2, \dots, r_{4h})$ -冠的交错标号。即 C_{4h} 的 $(r_1, r_2, \dots, r_{4h})$ -冠是交错图。

第二种交错(平衡)标号。下面定义圈 C_n 的 $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ -冠的另一种标号交错(平衡) θ_1 为:(设 θ 是 C_{4h} 的 $(r_1, r_2, \dots, r_{4h})$ -冠的第一种交错标号)

$$\theta_1(v_i) = \theta(v_i), i=1, 2, \dots, 2h \quad \theta_1(v_i) = \theta(v_i) - 1, i=2h+1, 2h+2, \dots, 4h$$

当 $r_j=0$ 时, $x_{ji}=v_j$ ($j=1, 2, 3, \dots, 4h$)

当 $r_j \neq 0$ 时, $\theta_1(x_{ji}) = \theta(x_{ji}), j=1, 2, \dots, 2h, i=1, 2, \dots, r_j$

$$\theta_1(x_{ji}) = \theta(x_{ji}) - 1, j=2h+1, 2h+2, \dots, 4h, i=1, 2, \dots, r_j$$

证明类似第一种优美标号, 此处略。

在定理中, 令 $r_1=r_2=\dots=r_{4h}=r$, 有

推论1 C_{4h} 的 r -冠是交错图。

引理^[1] 交错图至少有4种不同的交错标号(即标号为 θ 的交错图可以派生出另外3种不同的交错标号)。

由定理和引理, 有

推论2 当 $n=4h$, h 为非零自然数, r_i 为任意自然数($i=1, 2, \dots, 4h$), 当 $\sum_{i=1}^h r_{2i} = \sum_{i=1}^h r_{4h-2i+1}$ 时, 圈 C_n 的 $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ -冠至少有8种不同的交错标号。

例 下面根据定理给出圈 C_{12} 的 $(2, 2, 0, 4, 0, 1, 0, 0, 2, 0, 5, 0)$ -冠的两种交错标号, 如图2, 图3所示。

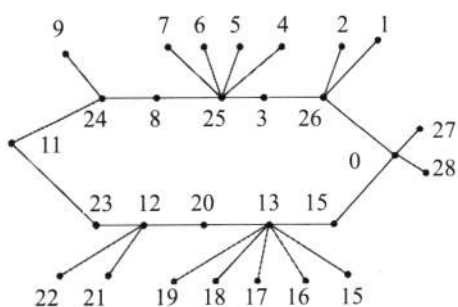


图2 圈 C_{12} 的 $(2, 2, 0, 4, 0, 1, 0, 0, 2, 0, 5, 0)$ -冠的第一种交错标号

Fig.2 The first alternating labeling of the $(2, 2, 0, 4, 0, 1, 0, 0, 2, 0, 5, 0)$ -corona of the cycle C_{12}

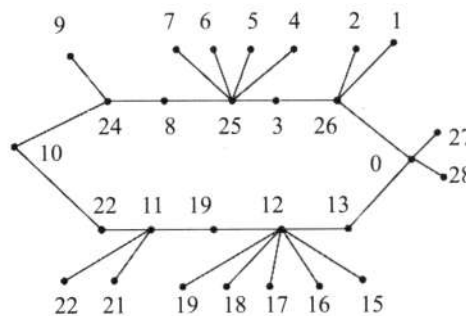


图3 圈 C_{12} 的 $(2, 2, 0, 4, 0, 1, 0, 0, 2, 0, 5, 0)$ -冠的第二种交错标号

Fig.3 The second alternating labeling of the $(2, 2, 0, 4, 0, 1, 0, 0, 2, 0, 5, 0)$ -corona of the cycle C_{12}

参考文献:

- [1] 马杰克. 优美图[M]. 北京: 北京大学出版社, 1991.
- [2] 杨显文, 张志尚. 一类交错图并的优美性[J]. 吉林工程技术师范学院学报: 自然科学版, 2007, 23(6): 8-10.
- [3] 武建春. 图 $D_{2,4k}$ 与它的 r -冠的优美性[J]. 内蒙古电大学刊, 2002(1): 34.
- [4] 曾朝英, 武建春. 关于优美图 C_n 和 $C_n \odot K_1$ 的 r -冠的优美性[J]. 集宁师专学报, 2000, 22(4): 4-7.
- [5] 曾朝英. 图 $\omega_{4k,n}$ 的 r -冠的优美性[J]. 集宁师专学报, 2001, 23(4): 4-6.

- [6] 胡红亮. 图 C_n 及其 r -冠的新的优美标号[J]. 纯粹数学与应用数学, 2010, 26(3): 454-457.
- [7] 吴跃生, 李咏秋. 关于圈 C_n 的 $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ -冠 ($n=7, 8$) 的优美性[J]. 阜阳师范学院学报: 自然科学版, 2010, 27(3): 20-23.

On the Gracefulness of the $(r_1, r_2, \dots, r_{4h})$ -corona of the Cycle C_{4h}

Wu Yuesheng

(School of Basic Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: A definition of the $(r_1, r_2, \dots, r_{4h})$ -corona of the cycle C_{4h} is given. The gracefulness of the $(r_1, r_2, \dots, r_{4h})$ -corona of the cycle C_{4h} are discussed. The graceful labelings are given. It also proves that some special the $(r_1, r_2, \dots, r_{4h})$ -corona of the cycle C_{4h} are alternating graph.

Key words: cycle; corona; graceful graph; alternating graph

(上接第 19 页)

Quantum Dynamics of Two-component Bose-Einstein Condensate with a Coupling Drive

Liu Zhirong

(School of Basic Sciences, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: In this paper, the time evolution of the atomicity density of two-component Bose-einstein condensates (BEC) is studied and it is demonstrated that the evolution of condensate density in long time, which presents a typical quantum collapse and revival in a complex way, is rather different from that in short time. Furthermore, quantum collapse of the system and revival characteristic will not change within a fairly wide range of parameters. The influence of the Rabi frequency, the strength of the coupling drive and the initial value of the relative phase on the evolution properties of atomicity density are also discussed.

Key words: quantum optics; collapse and revival; two-component Bose-Einstein condensations; long time