文章编号:1005-0523(2011)02-0035-06

共形平坦Lorentz流形中具常平均曲率的超曲面

吴泽九

(华东交通大学基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要: 设 M 是共形平坦 Lorentz 流形 L_1^{n+1} 中具常平均曲率 H 的完备类空超曲面。如果 M 的法向量是 L_1^{n+1} 的 Ricci 主方向, C 是与 L_1^{n+1} 的 *Ricci* 曲率的上、下确界有关的常数,则(1)当 $H^2\leqslant C$, $n=2$ 或 $n^2H^2<4(n-1)C$, $n\geqslant 3$ 时, M 全脐;(2)当 $n^2H^2=4(n-1)C$, $n\geqslant 3$ 时, M 是全脐球面 S^n 或是双曲柱面 $H^1(r)\times S^{n-1}(t)$ 。此结论推广与改进了文[2]与[3]中的结果。

关键词: 共形平坦;Lorentz流形;类空超曲面;全脐

中图分类号: O186.12 **文献识别码:** A

1 主要结果

设 M 是 de Sitter 空间 $S_1^{n+1}(c)$ 中具有平常均曲率的完备的类空超曲面。 Goddard [1]提出了以下著名的猜想: $S_1^{n+1}(c)$ 中任一具常平均曲率的完备类空超曲面必是全脐的。 Akutagawa [2]和 Ramana th an [3]研究了 Goddard 猜想,并独立的得到:当 M 的平均曲率 H 满足 $H^2\leqslant c$, $n=2$ 或 $n^2H^2<4(n-1)c$, $n\geqslant 3$ 时, M 是全脐的。

本文将外围空间推广到共形平坦 Lorentz 流形 L_1^{n+1} 中,得到

定理 1 设 M 是共形平坦 $n+1$ 维 Lorentz 流形 L_1^{n+1} 中具有常平均曲率 H 的完备类空超曲面,记 $C=\dfrac{2nr-(n+1)R}{n(n-1)}$ 且 $C>0$,其中 R 与 r 分别表示 L_1^{n+1} 的 Ricci 曲率的上、下确界。如果 M 的法向量是 L_1^{n+1} 的 Ricci 主方向,则

1)当 $H^2\leqslant C$, $n=2$ 或 $n^2H^2<4(n-1)C$, $n\geqslant 3$ 时, M 是全脐;

2)当 $n^2H^2=4(n-1)C$, $n\geqslant 3$ 时, M 要么是全脐球面 $S^n\left(K_L-4(n-1)C/n^2\right)$,要么是双曲柱面 $H^1(r)\times S^{n-1}(t)$,其中 $r=(2-n)C$, $t=\dfrac{n-2}{n-1}C$ 。

当外围空间 $L_1^{n+1}=S_1^{n+1}(c)$ 时,显然 M 的法向量是 $S_1^{n+1}(c)$ 的 Ricci 主方向且 $R=r=nc$, $C=c$,由定理1得

推论 1 设 M 为 de Sitter 空间 $S_1^{n+1}(c)$ 中具有常平均曲率 H 的完备的类空超曲面,则

1) 当 $H^2\leqslant c$, $n=2$; $n^2H^2<4(n-1)c$, $n\geqslant 3$ 时, M 全脐;

2) 当 $n^2H^2=4(n-1)c$ 时, M 是脐球面 $S^n\left(\dfrac{(n-1)^2}{n^2}c\right)$ 或者是双曲柱面 $H^1(r)\times S^{n-1}(t)$,其中: $r=(2-n)c$, $t=\dfrac{n-2}{n-1}c$ 。

收稿日期: 2011-01-28

基金项目: 江西省教育厅青年科学基金项目(GJJ11044)

作者简介: 吴泽九(1976—),男,讲师,硕士,研究方向为微分几何。

注：推论1中的结论（1）为文献[2-3]中的结论，因此，定理1和推论1推广与改进了文献[2-3]中的结果。

2 公式与引理

设 L_1^{n+1} 是 $n+1$ 维的 Lorentz 流形，M 是 L_1^{n+1} 的完备类空超曲面。各种指标范围规定如下

$$1\leqslant A,B,C\cdots\leqslant n+1\,;\ 1\leqslant i,j,k\cdots\leqslant n$$

不特别说明时，$\sum$ 表示对重复指标求和。在 L_1^{n+1} 上选取局部标准正交标架场 $\{e_A\}$，使得限制在 M 上，e_{n+1} 与 M 正交，$\{e_i\}$ 与 M 相切。设 $\{\omega_A\}$ 是关于 $\{e_A\}$ 的对偶标架场，$\{\omega_{AB}\}$ 是 L_1^{n+1} 的联络形式。L_1^{n+1} 的伪黎曼度量为 $\mathrm{d}s^2=\sum\varepsilon_A(\omega_A)^2$，其中 $\varepsilon_1=\cdots=\varepsilon_n=1,\varepsilon_{n+1}=-1$。$L_1^{n+1}$ 的结构方程为[4]

$$\mathrm{d}\omega_A=\sum\varepsilon_B\omega_{AB}\wedge\omega_B,\ \omega_{AB}+\omega_{BA}=0 \tag{1}$$

$$\mathrm{d}\omega_{AB}=\sum\varepsilon_C\omega_{AC}\wedge\omega_{CB}-\frac{1}{2}\sum K_{ABCD}\varepsilon_C\varepsilon_D\omega_C\wedge\omega_D \tag{2}$$

式中：K_{ABCD} 为 L_1^{n+1} 的曲率张量分量。限制在 M 上，有

$$\omega_{n+1}=0,\ \omega_{in+1}=\sum h_{ij}\omega_j \tag{3}$$

$$\mathrm{d}\omega_i=\sum\omega_{ij}\wedge\omega_j,\ \omega_{ij}+\omega_{ji}=0 \tag{4}$$

$$\mathrm{d}\omega_{ij}=\sum\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}-\frac{1}{2}\sum R_{ijkl}\omega_k\wedge\omega_l \tag{5}$$

$$R_{ijkl}=K_{ijkl}-(h_{ik}h_{jl}-h_{il}h_{jk}) \qquad 6)$$

式中：R_{ijkl} 为 M 的曲率张量分量。分别定义 h_{ijk} 及 h_{ijkl} 如下

$$\sum h_{ijk}\omega_k=\mathrm{d}h_{ij}+\sum h_{ki}\omega_{kj}+\sum h_{jk}\omega_{ki} \tag{7}$$

$$\sum h_{ijkl}\omega_l=\mathrm{d}h_{ijk}+\sum h_{ljk}\omega_{li}+\sum h_{ilk}\omega_{lj}+\sum h_{ijl}\omega_{lk} \tag{8}$$

则

$$h_{ijk}-h_{ikj}=-K_{n+1ijk} \tag{9}$$

$$h_{ijkl}-h_{ijlk}=\sum h_{mi}R_{mjkl}+\sum h_{mj}R_{mikl} \tag{10}$$

L_1^{n+1} 是共形平坦的，所以

$$K_{ABCD}=\frac{1}{n-1}\big(\varepsilon_A\delta_{AC}K_{BD}-\varepsilon_A\delta_{AD}K_{BC}+\varepsilon_B\delta_{BD}K_{AC}-\varepsilon_B\delta_{BC}K_{AD}\big)-\frac{K}{n(n-1)}\varepsilon_A\varepsilon_B\big(\delta_{AC}\delta_{BD}-\delta_{AD}\delta_{BC}\big) \tag{11}$$

式中：$K_{AC}=\sum\varepsilon_B K_{ABCB}$ 为 Ricci 张量的分量；$K=\sum\varepsilon_A K_{AA}$ 为数量曲率。

因为 M 的法向量是 L_1^{n+1} 的 Ricci 主方向，所以对任意 i 有

$$K_{n+1i}=0 \tag{12}$$

由（11），（12），对任意 i,j,k 有

$$K_{n+1ijk}=0 \tag{13}$$

引理1[5] 设 $\{a_i|1\leqslant i\leqslant n\}$ 是满足条件 $\sum_i a_i=0$ 的 n 个实数，则

$$\left|\sum_i a_i^3\right|\leqslant\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\left(\sum_i a_i^2\right)^{3/2}$$

等式成立当且仅当 $a_1,\cdots,a_n$ 中至少有 $n-1$ 个彼此相等。

引理2[6-7] 设 M 是 Ricci 曲率有下界的 n 维完备黎曼流形，F 为 M 上有上界的 C^2-函数，则对 $\forall\varepsilon>0,\exists x\in M$，使得

$$\mathrm{Sup}F-\varepsilon<F(x),\quad \|\nabla F\|(x)<\varepsilon,\quad \Delta F(x)<\varepsilon.$$

引理3[8]　设 M 是 de Sitter 空间 $S_1^{n+1}(c)$ 中具常平均曲率 H 的完备类空超曲面,记 $S_+(c)=-nc+\frac{n}{2(n-1)}\left[n^2H^2-(n-2)|H|\sqrt{n^2H^2-4(n-1)c}\right]$。如果 $S=S_+(c)$,则 M 一定是双曲柱面 $H^1(c_1)\times S^{n-1}(c_2)$。

3　定理证明

由于 M 的平均曲率为常数 H,所以 $\sum h_{iik}=0$。设 Δ 是 M 的 Laplacian,由(9)(10)有

$$\Delta h_{ij}=-\sum K_{n+1kikj}-\sum K_{n+1ijkk}+\sum h_{mk}R_{mijk}+\sum h_{im}R_{mkjk} \tag{14}$$

将(6),(13)代入(14),则

$$\Delta h_{ij}=\sum h_{mk}K_{mijk}+\sum h_{im}K_{mkjk}-\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^3\sum h_{ii}+S^2 \tag{15}$$

式中$\boldsymbol{A}$为矩阵(h_{ij});S 为 M 的第二基本形式模长的平方,因此

$$\sum h_{ij}\Delta h_{ij}=\sum h_{ij}h_{mk}K_{mijk}+\sum h_{ij}h_{im}K_{mkjk}-\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^3\sum h_{ii}+S^2 \tag{16}$$

选取适当的$\{e_i\}$,使得 $h_{ij}=\lambda_i\delta_{ij}$。于是(16)改为

$$\sum h_{ij}\Delta h_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\lambda_i-\lambda_j\right)^2K_{ijij}-nH\sum_i\lambda_i^3+S^2 \tag{17}$$

令 $f^2=S-nH^2$,由于 $r\leqslant\varepsilon_AK_{AA}\leqslant R$,因此 $(n+1)r\leqslant K\leqslant(n+1)R$,结合(11)有

$$\frac{1}{2}\sum\left(\lambda_i-\lambda_j\right)^2K_{ijij}=\frac{1}{2(n-1)}\sum_{i,j}\left(\lambda_i-\lambda_j\right)^2\left(K_{jj}+K_{ii}-\frac{K}{n}\right)\geqslant\frac{1}{2(n-1)}\sum_{i,j}\left(\lambda_i-\lambda_j\right)^2\left[2r-\frac{1}{n}(n+1)R\right]=nCf^2 \tag{18}$$

不失一般性,假定 M 的平均曲率 H 非负。因为

$$\sum_i\left(\lambda_i-H\right)=0,\ \sum_i\left(\lambda_i-H\right)^2=f^2,\ \sum_i\left(\lambda_i-H\right)^3=\sum_i\lambda_i^3-3Hf^2-nH^3$$

由引理1有

$$\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}f^3\geqslant\sum_i\lambda_i^3-3Hf^2-nH^3 \tag{19}$$

所以

$$-nH\sum\lambda_i^3\geqslant-nH\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}f^3-3nH^2f^2-n^2H^4 \tag{20}$$

由(17),(18),(20)得

$$\sum h_{ij}\Delta h_{ij}\geqslant f^2\left[f^2-\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}Hf+nC-nH^2\right] \tag{21}$$

$$\frac{1}{2}\Delta f^2=\frac{1}{2}\Delta S=\sum\left(h_{ijk}\right)^2+\sum h_{ij}\Delta h_{ij}\geqslant f^2\left[f^2-\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}Hf+nC-nH^2\right] \tag{22}$$

由(6)式

$$R_{ii}=\sum_jK_{ijij}+\sum_j\left(h_{ijk}\right)^2-nHh_{ii}=\frac{1}{n-1}\sum_{j(\neq i)}\left(K_{jj}+K_{ii}-\frac{K}{n}\right)+\sum_j\left(h_{ijk}\right)^2-nHh_{ii}\geqslant\frac{2nr-(n+1)R}{n}-\frac{1}{4}n^2H^2$$

故 M 的 Ricci 曲率有下界。

给定正数 λ,令 $F=-\left(f^2+\lambda\right)^{-1/2}$,显然 F 是有上界的 C^2-函数,应用引理2,$\forall\varepsilon>0,\exists x\in M$,使得

$$\operatorname{Sup}F-\varepsilon<F(x),\quad \|\nabla F\|(x)<\varepsilon,\quad \Delta F(x)<\varepsilon \tag{23}$$

对 F 求微分及 Laplace 算子有[9]

$$F\Delta F=3\|\nabla F\|^2-\frac{1}{2}F^4\Delta f^2 \tag{24}$$

由(23)、(24)有

$$\frac{1}{2}F^4(x)\Delta f^2(x)=3\|\nabla F\|^2(x)-F(x)\Delta F(x)<\varepsilon[3\varepsilon-F(x)] \tag{25}$$

选取数列 $\{\varepsilon_m\}$,使 $\{\varepsilon_m\}\to 0(m\to\infty)$,对每一个 m ,存在点 $x_m\in M$,使得(25)成立,而且 $\varepsilon_m\left[\varepsilon_m+F(x_m)\right]\to 0(m\to\infty)$ 。再由(24), $F(x_m)>\mathrm{Sup}F-\varepsilon_m$, $\{F(x_m)\}$ 是有界数列,因此 $\{F(x_m)\}$ 有极限,不妨设极限为 F_0 ,即 $F(x_m)\to F_0$,因此 $F_0\geqslant \mathrm{Sup}F$ 。故 $F_0\geqslant \mathrm{Sup}F$,再由 F 的定义,有

$$f(x_m)\to f_0=\mathrm{Sup}f$$

由(22),(25)有

$$\varepsilon_m\left[3\varepsilon_m-F(x_m)\right]>F^4(x_m)\Delta f^2(x_m)\geqslant F^4(x_m)f^2(x_m)\left[f^2(x_m)-\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}Hf(x_m)+nC-nH^2\right] \tag{26}$$

当 $m\to\infty$ 时,因此

$$f_0^2\left[f_0^2-\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}Hf_0+nC-nH^2\right]\leqslant 0 \tag{27}$$

当 $H^2\leqslant C$, $n=2$ 时,由(27)有

$$f_0^2\left[f_0^2+2\left(C-H^2\right)\right]\leqslant 0$$

因此, $f_0^2=0$,即 $f^2=0$, M 全脐。

当 $n^2H^2<4(n-1)C$, $n\geqslant 3$ 时,因为(27)左端的第二个因式可以看成是关于 f_0 的二次三项式,其判别式

$$D=\frac{n}{n+1}\left[n^2H^2-4(n-1)C\right]<0$$

故此,二次三项式恒正。因此由(27)有 $f_0^2=0$,即 $f^2=0$, M 全脐。

当 $n^2H^2=4(n-1)C, n\geqslant 3$时,(21)(22)分别变为

$$\sum h_{ij}\Delta h_{ij}\geq f^2\left(f-\frac{n-2}{\sqrt{n}}\sqrt{C}\right)^2 \tag{28}$$

$$\frac{1}{2}\Delta f^2=\sum\left(h_{ijk}\right)^2+\sum h_{ij}\Delta h_{ij}\geqslant f^2(f-\frac{n-2}{\sqrt{n}}\sqrt{C})^2 \tag{29}$$

(27)变为

$$f_0^2\left(f_0-\frac{n-2}{\sqrt{n}}\sqrt{C}\right)^2\leqslant 0 \tag{30}$$

因此,上式有 $f_0^2=0$ 或 $f_0=\frac{n-2}{\sqrt{n}}\sqrt{C}$ 。

若 $f_0^2=0$,即有 $f^2=0$, M 全脐,由(6), M 的截面 $K_L-4(n-1)C/n^2=\left(K_{jj}+K_{ii}-\frac{K}{n}\right)-4(n-1)C/n^2\geqslant (n-1)\left(n^2-4\right)C/n^2>0$,所以 M 是脐球面 $S^n\left(K_L-4(n-1)C/n^2\right)$ 。

若 $f_0=\frac{n-2}{\sqrt{n}}\sqrt{C}$,则 $f\leqslant\frac{n-2}{\sqrt{n}}\sqrt{C}$ 。以下分两种情况讨论。

(i) 当 $f<\frac{n-2}{\sqrt{n}}\sqrt{C}$ 时,选取适当 $\{e_i\}$,使得 $h_{ij}=\lambda_i\delta_{ij}$ 。由 $n^2H^2=4(n-1)C$, $K_{ijij}=K_{jj}+K_{ii}-\frac{K}{n}\geqslant(n-1)C$ 及(6)有

$$R_{ii}=\sum_j K_{ijij}+h_{ii}^2-nHh_{ii}\geqslant(n-1)C+h_{ii}^2-nHh_{ii}=\left(\lambda_i-\frac{nH}{2}\right)^2\geqslant 0$$

事实上 $R_{ii}\neq 0$,否则矛盾,这是因为,如果 $R_{ii}=0$,则有 $\lambda_i=\frac{nH}{2}$,因此

$$\sum_{j\neq i}\lambda_j^2=S-\lambda_i^2=f^2+nH^2-\frac{n^2H^2}{4}<C$$

另一方面

$$\sum_{j\neq i}\lambda_j^2\geqslant\frac{1}{n-1}\Big(\sum_{j\neq i}\lambda_j\Big)^2=\frac{1}{n-1}\left(nH-\lambda_i\right)^2=C$$

这显然是一个矛盾。因此 M 的 Ricci 曲率恒大于零。由 Bonnet-Myers 定理知 M 紧致。故由(27)及 Hopf 引理, $f^2=0$, M 全脐。由(6),此时 M 的截面曲率为 $K_L-4(n-1)C/n^2>0$, M 是脐球面 $S^n\left(K_L-4(n-1)C/n^2\right)$ 。

(ii) 当 $f=\frac{n-2}{\sqrt{n}}\sqrt{C}$ 时, f 是正常数,此时 M 不全脐。由(28)(29)有

$$h_{ijk}=0 \tag{31}$$

$$\sum h_{ij}\Delta h_{ij}=0 \tag{32}$$

因此,(21)及(28)式等号成立,且(18),(19)全变成等式。

当(19)变成等式时,由引理1,可假定 $\lambda_1\neq\lambda_2=\cdots=\lambda_n$ 。由于 $K_{jj}-r\geqslant 0,K_{ii}-r\geqslant 0$ 及 $R-\varepsilon_A K_{AA}\geqslant 0$,当(18)等号成立时,有

$$\sum_{i,j}\left(\lambda_i-\lambda_j\right)^2\left[\left(K_{jj}-r\right)+\left(K_{ii}-r\right)+\frac{1}{n}\sum_A\left(R-\varepsilon_A K_{AA}\right)\right]=0$$

所以

$$K_{11}=K_{22}=\cdots=K_{nn}=r,K_{11}=K_{22}=\cdots=K_{nn}=-K_{n+1n+1}=R$$

从而 $\varepsilon_A K_{AA}=r=R$, L_1^{n+1} 是爱因斯坦空间。 L_1^{n+1} 共形平坦,所以 TL_1^{n+1} 中由 e_A 与 e_i 所张成的非退化2-平面的截面曲率为

$$K\left(e_A\wedge e_i\right)=\frac{1}{n-1}\left(K_{ii}+\varepsilon_A K_{AA}-\frac{K}{n}\right)=C \tag{33}$$

因此, L_1^{n+1} 是常曲率空间 $S_1^{n+1}(C)$ 。

选取适当 $\left\{e_i\right\}$,使得 $h_{ij}=\lambda_i\delta_{ij}$ 。在(4)式中,令 $i=j$,有 $\omega_{ii}=0$,在(7)式中,令 $i=j$,由(31)(7)有

$$0=\mathrm{d}\lambda_i+2\sum_k h_{ki}\omega_{ki}=\mathrm{d}\lambda_i+2\lambda_i\omega_{ii}=\mathrm{d}\lambda_i$$

因此, λ_i 为常数,再由(7)有

$$0=\lambda_i\omega_{ij}+\lambda_j\omega_{ji}=\left(\lambda_i-\lambda_j\right)\omega_{ij} \tag{34}$$

因为 $\lambda_1\neq\lambda_2$,由上式得

$$\omega_{12}=0 \tag{35}$$

由(5)和(35)有

$$0=\mathrm{d}\omega_{12}=\sum\omega_{1k}\wedge\omega_{k2}-\frac{1}{2}\sum R_{12kl}\omega_k\wedge\omega_l$$

如果对某一 k 使得 $\omega_{1k}\neq 0$和$\omega_{k2}\neq 0$,则由(34)有 $\lambda_1=\lambda_k=\lambda_2$,这与 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 矛盾,因此 $\sum R_{12kl}\omega_k\wedge\omega_l=0$,故

$$R_{1212}=0 \tag{36}$$

由于(6),(33)和(36)有

$$\lambda_1\lambda_2=C \tag{37}$$

$$\lambda_1+(n-1)\lambda_2=nH \tag{38}$$

$$\lambda_1^2+(n-1)\lambda_2^2=S \tag{39}$$

由(37)和(38)及 $n^2H^2=4(n-1)C$ 有

$$\lambda_1=\sqrt{C(n-1)}\ ,\ \lambda_2=\sqrt{C/(n-1)}$$

再由(39)及 $n^2H^2=4(n-1)C$ 有

$$S=nC=S_+(1)$$

故由引理3，M 是 $S_1^{n+1}(C)$ 的双曲柱面 $H^1(r)\times S^{n-1}(t)$，其中：$r=(2-n)C$，$t=\dfrac{n-2}{n-1}C$。定理1得证。

参考文献：

[1] GODDARD A J. Some remarks on the existence of spacelike hypersurfaces of constant mean curvature[J]. Math Z, 1991, 206(1): 333-339.

[2] AKUTAGAWA K. On space-like hypersurfaces with constant curvature in the de Sitter space[J]. Math Z, 1987, 196(1): 13-19.

[3] RAMANATHAN J. Complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in a de Sitter space[J]. Indiana Univ Math J, 1987, 36(2): 349-359.

[4] ISHIHARA T. Maximal spacelike submanifolds of a pseudo-Riemannian Space of constant curvature[J]. Michigan Math J, 1988, 35(3): 345-352.

[5] ALENCAR H, DO C M. Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres[J]. Proc Amer Math Soc, 1994, 120(6): 1223-1229.

[6] OMORI H. Isometric immersion of Riemmanian manifolds[J]. J Math Soc Japan, 1967, 19(2): 205-214.

[7] YAU S T. Harmonic functions on complete Riemmanian manifolds[J]. Comm Pure and Appl Math, 1975, 28(2): 201-228.

[8] LI H Z. Integral formulas for compact space-like hypersurfaces in de Sitter space and their applications to Goddard's conjecture[J]. Acta Mathematica Sinica, 1998, 14(2): 285-288.

[9] 吴泽九. 共形平坦Lorentz空间具常平均曲率的一类超曲面[J]. 华东交通大学学报, 2009, 26(2): 102-107.

Hypersurfaces with Constant Mean Curvature in a Conformally Flat Lorentzian Manifold

Wu Zejiu

(School of Basic Sciences, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: Let M be a complete space-like hypersurface with constant mean curvature H in a conformally flat Lorentzian manifold L_1^{n+1}. Assume that the normal vectors of M be the main Ricci direction of L_1^{n+1} and C be a constant related to the supremum and infimum of Ricci curvature of M. (1) If $H^2\leqslant C$ when $n=2$ or $n^2H^2<4(n-1)C$ when $n\geqslant 3$, then M is a totally umibilic hypersurface; (2) If $n^2H^2=4(n-1)C$ when $n\geq 3$, then M is a totally umibilic sphere or a hyperbolic cylinder $H^1(r)\times S^{n-1}(t)$. The corresponding results in [2] and [3] are generalized.

Key words: conformally flat; Lorentzian manifold; totally umbilical; hypersurface