

文章编号:1005-0523(2011)03-0026-05

多边形孔奇异性应力干涉问题的研究

陈梦成¹, 平学成², 刘万辉², 谢政²

(华东交通大学1. 土木建筑学院; 2. 机电工程学院, 江西 南昌 330013)

摘要:采用一种新型杂交元方法研究了多边形孔相互干涉条件下的奇异性应力场问题。首先运用多变量变分原理构造一种超级切口尖端单元,其中,假定的应力场和位移场变量是利用奇异性场数值特征解推导出来的。尔后将该超级切口尖端单元与传统4节点杂交应力元耦合在一起,即可建立起一种分析含任意多边形孔弹性结构分析的新型有限元模型。最后用该模型考察了双菱形孔和双正方形孔的奇异性应力干涉问题。结果表明:本模型使用单元数少且精度高,与传统有限元法和积分方程方法相比,该模型更具有通用性和高效性。

关键词:弹性体; 多边形孔; 广义应力强度因子; 杂交元法

中图分类号: O346.1

文献标识码: A

复合材料中常存在不规则形状夹杂和孔洞,准确计算夹杂和孔洞周边应力是复合材料力学中的一个重要问题。复合材料中微缺陷处的应力集中或应力奇异性场是建立复合材料强度理论的必要基础。从断裂力学的角度看,多边形夹杂角尖奇异性应力场强度与材料的物理属性、几何形式和夹杂间距等有关,因此,研究多边形夹杂的奇异性应力干涉问题并提出相应的研究方法具有重要意义。

目前,人们对多边形夹杂力学行为进行了一些研究。Kohno^[1]利用保角映射技术将多边形夹杂转换为圆夹杂,并求解夹杂角尖附近应力奇异性 and 应力场强度。Ukadgaonker^[2]研究了不规则形状孔周边的应力分布,发现了孔角尖端部具有应力奇异性,但并没有求解广义应力强度因子。董春迎^[3]计算了含多边形夹杂复合材料的等效弹性模量。Noda^[4-5]则采用体积力法专门研究了多边形孔奇异性应力干涉的问题。作者与其他学者^[6-9]采用一种特殊杂交元法研究各向同性材料和压电材料中多边形夹杂奇异性应力干涉的问题。

该文拟利用作者过去开发的计算夹杂角端部奇异应力场的方法延伸到多边形孔角端部奇异应力场分析领域。首先运用多变量变分原理构造一种超级切口尖端单元,尔后将该超级切口尖端单元与传统4节点杂交应力元耦合在一起,最终建立起一种分析任意多边形孔角端部奇异应力场的新杂交有限元方法。用该方法考察双菱形孔和双正方形孔的奇异性应力干涉问题,并讨论孔形状、孔间距和相对位置对多边形孔角端部奇异应力场的影响。

1 切口尖端单元的建立

如图1(a)所示的含多边形孔角部的二维区域的单元划分,其单元类型可分为两部分,即图1(b)所示的切口尖端单元和图1(c)所示的传统4节点单元。这样,新型杂交元模型的建立可从两个子边值问题的分析入手:①切口尖端单元区域 Ω_1 ,与传统单元接壤的边界为 Γ_1 ;②传统4节点单元区域 Ω_2 ,其加载

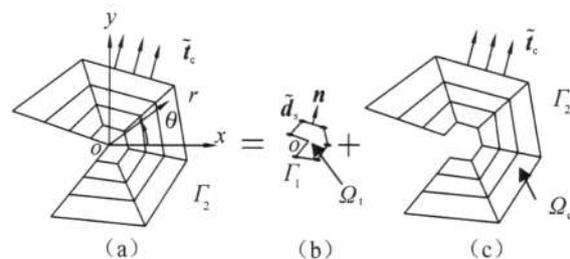


图1 切口尖端邻域网格划分

Fig.1 Element distribution near a corner tip domain

收稿日期:2011-04-19

基金项目:国家自然科学基金项目(10662004,51065008);江西省自然科学基金项目(2010GZW0013)

作者简介:陈梦成(1962-),男,教授,博士,研究方向为重大工程材料和结构耐久性与安全性基础问题。

边界为 Γ_2 。根据 Hellinger-Reissner 变分原理^[10],我们可以在区域 Ω_t 和 Ω_c 分别定义如式(1)和式(2)所示的两个变分泛函

$$\pi_s^e = \int_{\Omega_t} (-s_t^T S_t s_t / 2 + s_t^T D d_s) d\Omega - \int_{\Gamma_1} s_t^T n^T (d_t - \tilde{d}_t) dS \quad (1)$$

$$\pi_c^e = \int_{\Omega_c} (-s_c^T S_c s_c / 2 + s_c^T D d_c) d\Omega - \int_{\Gamma_2} \tilde{t}_c^T d_c dS \quad (2)$$

式中: π_t 和 π_c 分别表示区域 Ω_t 和 Ω_c 内的 Γ 泛函;下标 t 和 c 是为了区分在区域 Ω_t 和 Ω_c 内的应力和位移矢量; D 为联系位移和应变的微分算子; d 和 s 分别为笛卡尔坐标系中的位移和应力向量;带“~”的向量表示在边界上的定义; S 为材料柔度矩阵; n 为单位外法向量 $[n_x, n_y]^T$ 构成的矩阵。

如果直接用泛函式(1)建立切口尖端单元,将不得不在区域 Ω_c 内进行面积分。为了避开奇异项在域内积分时遇到的困难,可应用散度定理,将式(1)中的域内积分转化为如下边界积分

$$\pi_t^e = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} s_t^T n^T d_t dS - \int_{\Gamma_1} s_t^T n^T \tilde{d}_t dS \quad (3)$$

式中: \tilde{d}_t 则需要满足位移的边界条件且还要满足单元之间的位移的 C^0 连续条件,可采用与该单元周围的普通有限元单元的位移场相协调的插值函数,即

$$\tilde{d}_t = L q_t \quad (4)$$

式中: L 为一维 Lagrange 单元插值函数矩阵; q_t 为单元节点位移向量。在切口角部 o 点周围,根据奇异性场特征解的定义,笛卡尔坐标系下的位移 d_t 和应力 s_t 可以表达为^[9]

$$d_t = \{u_x, u_y\}^T = T_1 u = T_1 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{N+M} U_n \beta_n \right\} = U_C \beta \quad (5)$$

$$s_s = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}\}^T = T_2 \sigma = T_2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{N+M} \Sigma_n \beta_n \right\} = \Sigma_C \beta \quad (6)$$

式中: T_1 和 T_2 为极坐标和直角坐标之间的转换矩阵;根据奇异性场特征解的定义, U_n 是包含 r, λ_n 和 $\bar{u}_n(\theta)$ 等参数或变量的 (2×1) 阶矩阵; Σ_n 是包含 r, λ_n 和 $\bar{\sigma}_n(\theta)$ 等参数或变量的 (3×1) 阶矩阵; $(N+M)$ 分别为截取的复特征值和实特征值的数量,这里规定前 N 项为复数项,后 M 项为实数项; β_n 为待定系数。

将式(4)~(6)代入式(3)得到

$$\pi_t^e = -\beta^T H \beta / 2 + \beta^T G q_t \quad (7)$$

上式中, G 和 H 可表示为

$$H = \int_{\Gamma_1} [\Sigma_C^T n^T U_C + U_C^T n \Sigma_C] dS / 2, \quad G = \int_{\Gamma_1} \Sigma^T n^T L dS。$$

根据函数 π_t^e 的静态值 $\delta \pi_t^e = 0$, 可得出消去 β 后的泛函 π_t^e 的表达式

$$\pi_t^e = q_t^T (G^T H^{-1} G) q_t / 2 = q_t^T K_t q_t / 2 \quad (8)$$

式中: K_t 为切口尖端单元刚度矩阵。

2 算例

在数值计算中,切口角部的广义应力强度因子定义为

$$K_{I, \lambda_1} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2} r^{-\lambda_1} \sigma_{\theta\theta}(r, \theta_0) \quad (9)$$

$$K_{II, \lambda_2} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2} r^{-\lambda_2} \sigma_{r\theta}(r, \theta_0) \quad (10)$$

式中: θ_0 为切口角部邻域角平分线与 x 轴的夹角。算例中,假定为平面应变问题,泊松比 $\nu = 0.3$ 。

2.1 双菱形孔水平分布

如图2所示,考虑受远场拉伸载荷 σ_y^∞ 的无限大体含有水平分布的双菱形孔。菱形孔中心的间距为 $2d$,菱形边在 x 轴上的投影长为 l ,菱形左右两角度为 α 。为了考察菱形孔切口角部 o 附近的奇异性应力场,可采用1个切口尖端单元,在其他部分采用传统4节点单元。由于对称性,仅对右半部分进行网格划分。切口尖端单元的尺寸用 h_x 和 h_y ,切口尖端单元的节点数可以根据需要而变化。从表1看出,与Noda^[4]结果相比,当 $h_x = h_y = 0.1l, 0.2l$ 和 $0.5l$ 时,本文解均能精确到小数点后第2位,可以认为, $h_x = h_y \leq 0.5l$ 的情况下,切口尖端单元的尺寸对计算结果的影响不明显。表2考察了 l/d 和 α 对广义应力强度因子的影响,Noda^[4]的结果一并给出。可以看出,当前解与参考解吻合,误差在2.87%以内;随着两孔距离减少和孔角增大,应力场干涉也增大。图3中, $l/d = 0.67$ 时菱形孔 o 点左延长线上的周向应力 $\sigma_{\theta\theta}(r/l, 180^\circ)$ 的当前解与Ansys解做了对比。可以看出,当前解的相对误差只有2.2%。值得一提的是,新型杂交元法只用了893个单元,而Ansys软件则用了5186个单元。

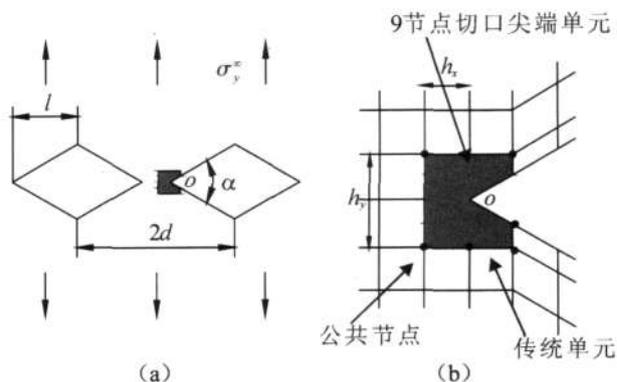


图2 水平分布双菱形孔及其 o 点附近单元划分
Fig.2 Unit classification of level-distributed double diamond hole near its point o

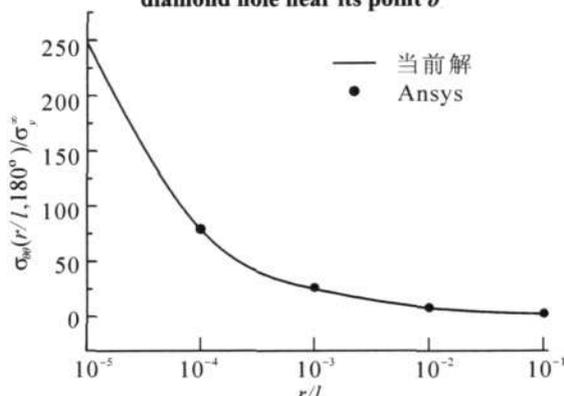


图3 当 $l/d=0.67$ 时切口尖端 o 点外延长线的应力 $\sigma_{\theta\theta}(r/l, 180^\circ)$
Fig.3 Stress $\sigma_{\theta\theta}(r/l, 180^\circ)$ of incision cutting-edge point o extension when $l/d=0.67$

表1 切口尖端单元尺寸对广义应力强度因子结果的影响

Tab.1 Influence of notch tip element size on the generalized stress intensity factor

l/d	应力强度因子	当前解				Noda解 ^[4]
		0.1×0.1	0.2×0.2	0.5×0.5	1.0×1.0	
0.67	$K_{I,\lambda_1} / \sigma_y^\infty l^{-\lambda_1}$	1.154	1.158	1.158	2.268	1.156
	$K_{II,\lambda_2} / \sigma_y^\infty l^{-\lambda_2}$	0.000	0.000	0.000	0.032	0.000
0.10	$K_{I,\lambda_1} / \sigma_y^\infty l^{-\lambda_1}$	1.028	1.028	1.027	1.025	1.042
	$K_{II,\lambda_2} / \sigma_y^\infty l^{-\lambda_2}$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

表2 水平分布双菱形孔角端部 o 的广义应力强度因子

Tab.2 Generalized stress intensity factor at corner tip o of double diamond hole in horizontal distribution

l/d	0°		30°		60°		90°	
	当前解	Noda解 ^[4]						
1/10	0.999	1.000	1.028	1.042	1.116	1.148	1.268	1.293
1/3	1.025	1.018	1.043	1.062	1.143	1.164	1.280	1.299
1/2	1.060	1.048	1.071	1.092	1.182	1.190	1.297	1.317
2/3	1.127	1.112	1.132	1.156	1.243	1.252	1.353	1.374

2.2 双正方形孔水平分布

考虑如图4所示的受远场拉伸载荷 σ_y^∞ 的无限大体含有水平分布的双正方形孔。正方形孔中心的间距为 $2d$, 边长为 $2l$ 。正方形孔切口角部 o 附近的奇异性应力场, 可采用1个7节点切口尖端单元, 尺寸为 $h_x = h_y = 0.2l$, 在其他部分采用传统4节点单元。表3考察了孔间距和相互位置关系对正方形角部 o 广义应力强度因子的影响, 括号内数值为使用单元数。结果表明: 本文解与 Ansys 解吻合, $K_{I, \lambda_1} / \sigma_y^\infty l^{-\lambda_1}$ 和 $K_{II, \lambda_2} / \sigma_y^\infty l^{-\lambda_2}$ 的相对误差均低于 2.1%; 从括号中的单元数看出, 当前方法能够大幅度降低单元数; 对水平方向和 45° 方向分布的双正方形孔问题, 随着两孔之间距离的减少, 孔角 o 周边应力场干涉增大; 但对垂直方向分布的双正方形孔问题, 随着两孔之间距离的减少, 孔角 o 周边应力场干涉也减少; $K_{I, \lambda_1} / \sigma_y^\infty l^{-\lambda_1}$ 的最大干涉达到 59.1% (出现于位置 II), 而 $K_{II, \lambda_2} / \sigma_y^\infty l^{-\lambda_2}$ 的最大干涉达到 45.5% (出现于位置 III)。

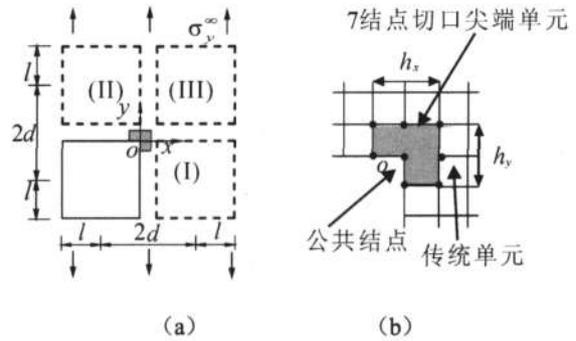


图4 无限大体中双正方形孔干涉的问题
Fig.4 Interference of the double square hole in the infinitely large body

表3 不同位置分布双正方形孔问题的广义应力强度因子

Tab.3 Generalized stress intensity factor of double square hole in different position distribution

l/d	$K_{I, \lambda_1} / \sigma_y^\infty l^{-\lambda_1}$			$K_{II, \lambda_2} / \sigma_y^\infty l^{-\lambda_2}$			
	当前解	Ansys解	Noda解 ^[5]	当前解	Ansys解	Noda解 ^[5]	
水平分布	1/10	0.596(1 967)	0.600(4 460)	0.591	2.234	2.241	2.208
	1/3	0.658(1 202)	0.663(4 555)	0.650	2.292	2.299	2.192
	1/2	0.728(1 080)	0.735(4 230)	0.710	2.432	2.449	2.311
	2/3	0.776(833)	0.780(4 100)	0.748	2.667	2.670	2.496
垂直分布	1/10	0.593(1 752)	0.597(3 320)	0.591	2.232	2.267	2.208
	1/3	0.513(1 548)	0.516(2 920)	0.507	2.046	2.060	1.946
	1/2	0.379(1 234)	0.381(2 760)	0.379	1.899	1.908	1.790
	2/3	0.242(1 172)	0.245(2 720)	0.248	1.873	1.879	1.757
45°分布	1/10	0.595(4 738)	0.608(8 290)		2.234	2.282	
	1/3	0.622(3 132)	0.635(4 690)		2.407	2.458	
	1/2	0.661(2 832)	0.675(3 772)		2.685	2.738	
	2/3	0.726(4 434)	0.739(6 484)		3.257	3.299	

3 结语

该文提出了一种求解多边形孔角部奇异性场的新型杂交元模型。通过两个数值算例分析, 可以得到以下结论:

1) 新型杂交元法计算结果精度高且使用单元数少。

2) 随着两水平分布的双菱形孔距离减少和孔角增大, 孔角 o 周边应力场干涉也增大。

3) 对水平方向和 45° 方向分布的双正方形孔问题, 随着两孔之间距离的减少, 孔角 o 周边应力场干涉增大; 但对垂直方向分布的双正方形孔问题, 随着两孔之间距离的减少, 孔角 o 周边应力场干涉也减少。

4) $K_{I,\lambda_1} / \sigma_y^\infty l^{-\lambda_1}$ 的最大干涉达到 59.1% (出现于位置 II), 而 $K_{II,\lambda_2} / \sigma_y^\infty l^{-\lambda_2}$ 的最大干涉达到 45.5% (出现于位置 III)。

5) 新型杂交元法可以用于分析各向异性材料的细观力学问题, 其简便性、准确性和高效性使其较传统有限元法和积分方程方法更具有优势。

参考文献:

- [1] KOHNO Y, ISHIKAWA H. Singularities and stress intensities at the corner point of a polygonal hole and rigid polygonal inclusion under antiplane shear[J]. Int J Eng Science, 1995, 33(11): 1547-1560.
- [2] UKADGAONKER V G, KAKHANDKI V. Stress analysis for an orthotropic plate with an irregular shaped hole for different in-plane loading conditions: Part 1[J]. Com Struct, 2005, 70(3): 255-274.
- [3] DONG C Y. Effective elastic properties of doubly periodic array of inclusions of various shapes by the boundary element method[J]. Int J Solids & Structures, 2006, 43(25/26): 7919-7938.
- [4] NODA N A, ODA K, INOUE T. Analysis of newly-defined stress intensity factors for angular corners using singular integral equations of the body force method[J]. Int J Fract, 1996, 76(3): 243-261.
- [5] NODA A K, TAKASE Y, HAMASHIMA T. Generalized stress intensity factors in the interaction within a rectangular array of rectangular inclusions[J]. Archive of Applied Mechanics, 2003, 73(5/6): 311-322.
- [6] PING XUECHENG, CHEN MENGCHENG, XIE JILONG. Singular stress analyses of V-notched anisotropic plates based on a novel finite element method[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2008, 75: 3819-3838.
- [7] CHEN MENGCHENG, PING XUECHENG. Analysis of the interaction within a rectangular array of rectangular inclusions using a new hybrid finite element method[J]. Eng Fract Mech, 2009, 76: 580-593.
- [8] CHEN MENGCHENG, PING XUECHENG. A novel hybrid finite element analysis of inplane singular elastic field around inclusion corners in elastic media[J]. Int J Solids & Structures, 2009, 46: 2527-2538.
- [9] 王海涛, 杨笑梅. 用裂纹单元分析双压电材料界面力电耦合奇异场[J]. 工程力学, 2007, 24(3): 170-178.
- [10] PIAN T H H, SUMIHARA K. Rational approach for assumed stress finite elements[J]. Int J Num Meth Eng, 1984, 20: 1685-1695.

On Interference of Singularity Stress of the Polygonal Holes

Chen Mengcheng¹, Ping Xuecheng¹, Liu Wanhui², Xie zheng²

(1. School of Civil Engineering and Architecture; 2. School of Mechanical and Electrical Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: A new hybrid finite element method is proposed to compute singular field near the hole corner of two interaction polygonal holes in an infinite elastic plate. Firstly, a super corner element is constructed to determine the strength of the singular field by using the varied principle of functional in which independently assumed stress and displacement variables are extracted from numerical eigensolutions. Then, the super corner tip element is conjunction with the conventional 4-node quadrilateral elements to establish a new FEM model. Finally, two numerical examples are given for an infinite plate containing interacting double diamond or square holes. The numerical results show that present method, which has its popularity and efficiency, gains satisfactory results with fewer elements and higher accuracies.

Key words: elasticity; double polygonal holes; generalized stress intensity factors; hybrid finite element method