文章编号:1005-0523(2011)03-0069-04

图的符号控制数的下界

徐保根,丁宗鹏,罗 茜

(华东交通大学基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要: 设 G 是一个图,一个函数 $f:V\to\{-1,+1\}$ 如果 $\sum_{v\in N[u]} f(v)\geqslant 1$ 对于每个点 $u\in V$ 成立,则称 f 为图 $G=(V,E)$ 的一个符号控制函数。一个图 G 的符号控制数定义为 $\gamma_s(G)=\min\left\{\sum_{v\in V(G)} f(v)\middle| f\text{为图}G\text{的符号控制函数}\right\}$。该文主要给出了一个图 G 的符号控制数 $\gamma_s(G)$ 的若干新下限,并刻划了满足 $\gamma_s(G)=|V(G)|$ 的所有图 G。

关键词: 图;符号控制函数;符号控制数

中图分类号: O157.5 **文献标识码:** A

1 引言及定义

本文中所指的图均为无向简单图,文中未说明的符号和术语同文献[1]。

图的控制理论是图论中的重要分支,美国图论学者W. T. Haynes等人在1998年出版的专著[2]较为系统地综述了这一领域的一些主要研究成果,E. J. Cockayne等[3]引入了图的控制多种变化形式。近来人们已经将图的点控制概念转向研究图的边控制问题[4],并获得了一些初步的研究成果[5-7],尤其是对图的符号控制和符号边控制,得到许多新的结论[8]。在本文中,将继续探讨图的符号控制数的新下界,并刻划满足 $\gamma_s(G)=|V(G)|$ 的所有图 G。

设 G 为一个图, $N_G(v)$为v 点在 G 中的邻域, $N_G[v]=N_G(v)\cup\{v\}$ 称为 v 点的闭邻域。δ 和 Δ 分别为图 G 的最小度和最大度,有时 $N_G(e)$ 和 $N_G[e]$ 分别简记为 $N(e)$ 和 $N[e]$。

定义[8] 设 G 是一个图,一个函数 $f:V\to\{-1,+1\}$ 如果满足 $\sum_{v\in N[u]} f(v)\geqslant 1$ 对于每个点 $u\in V$ 成立,则称 f 为图 $G=(V,E)$ 的一个符号控制函数。一个图 G 的符号控制数定义为 $\gamma_s(G)=\min\left\{\sum_{v\in V(G)} f(v)\middle| f\text{为图}G\text{的符号控制函数}\right\}$。

2 主要结果及其证明

本节主要给出图的符号控制数的若干新的下界,并刻划了满足 $\gamma_s(G)=|V(G)|$ 的所有图 G。

定理1 对于任意 n 阶图 G, Δ和 δ 分别为图 G 的最大度和最小度,则有

$$\gamma_s(G)\geqslant\frac{n-(\Delta-\delta)\left(n-\left\lceil\frac{\Delta}{2}\right\rceil-1\right)}{\Delta+1}$$

收稿日期: 2011-04-07

基金项目: 国家自然科学基金项目(11061014);江西省教育厅科研项目(GJJ09235)

作者简介: 徐保根(1963-),男,教授,研究方向为图论与组合数学。

证明 记图 G 的度序列为 $\delta=d_1\leqslant d_2\leqslant\cdots\leqslant d_n=\Delta$，$V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$d_i=d_G(v_i)\,(i=1,2,\cdots,n)$。

设 f 为图 G 的一个最小符号控制函数，即 $\gamma_s(G)=\sum_{v\in V(G)}f(v)$。由定义知：由于对每一个点 v_i，$\sum_{u\in N[v_i]}f(u)\geqslant 1$，从而有 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{u\in N[v_i]}f(u)\geqslant n$，即得

$$\sum_{v_i\in V(G)}\left[(d_i+1)f(v_i)\right]\geqslant n \tag{1}$$

令 $A=\{u\in V\,|\,f(u)=1\}$，$B=\{u\in V\,|\,f(u)=-1\}$。考察 G 的最大度点 v_n 的闭邻域 $N[v_n]$，设 $N[v_n]$ 中有 α 个 A 中点，有 β 个 B 中点，可见满足 $\begin{cases}\alpha+\beta=\Delta+1\\ \alpha-\beta\geqslant 1\end{cases}$ 得 $\alpha\geqslant\frac{\Delta}{2}+1$，注意到 α 为整数，所以 $|A|\geqslant\alpha\geqslant\left\lceil\frac{\Delta}{2}\right\rceil+1$，故有 $|B|\leqslant n-\left\lceil\frac{\Delta}{2}\right\rceil-1$。

另一方面，由(1)式得到

$$(\Delta+1)\sum_{v\in A}f(v)+(\delta+1)\sum_{v\in B}f(v)\geqslant n \tag{2}$$

在(2)式两边同加上 $(\Delta+1)\sum_{v\in B}f(v)$ 得到

$$(\Delta+1)\sum_{v\in V}f(v)\geqslant n+(\Delta-\delta)\sum_{v\in B}f(v)\geqslant n-(\Delta-\delta)\left(n-\left\lceil\frac{\Delta}{2}\right\rceil-1\right)$$

因此，$\gamma_s(G)=\sum_{v\in V(G)}f(v)\geqslant\dfrac{n-(\Delta-\delta)\left(n-\left\lceil\frac{\Delta}{2}\right\rceil-1\right)}{\Delta+1}$，定理证毕。

由上述定理可直接得到下面的已知结论：

推论1 对任意 n 阶 r 正则图 G，均有 $\gamma_s(G)\geqslant\frac{n}{r+1}$。

定理2 设 n 阶连通图 G 的度序列为 $\delta=d_1\leqslant d_2\leqslant\cdots\leqslant d_n=\Delta$，其直径为 $d=d(G)$，令 $t=\left\lceil\frac{d+1}{3}\right\rceil$，则有

$$\gamma_s(G)\geqslant\frac{n-(\Delta-\delta)\left(n-t-\sum_{i=1}^{t}\left\lceil\frac{d_i}{2}\right\rceil\right)}{\Delta+1}$$

证明 由条件知 G 中存在一条路 $P_{d+1}=(v_0v_1v_2\cdots v_d)$，使得 v_0 与 v_d 在 G 中的的距离 $d_G(v_0,v_d)=d$，可见 P_{d+1} 中有 t 个点 $v_{3i}(i=0,1,2,\cdots,t-1)$，使得 $N_G[v_{3i}]\cap N_G[v_{3j}]=\phi\,(0\leqslant i\neq j\leqslant t-1)$。

设 f 为图 G 的一个最小符号控制函数，即 $\gamma_s(G)=\sum_{v\in V(G)}f(v)$。令 $A=\{u\in V\,|\,f(u)=1\}$，$B=\{u\in V\,|\,f(u)=-1\}$。考察 P_{d+1} 中这 t 个点 $v_{3i}(i=0,1,2,\cdots,t-1)$ 的闭邻域 $N[v_{3i}]$，由定义知 $N[v_{3i}]$ 中至少有 $\left\lceil\frac{d(v_{3i})}{2}\right\rceil+1$ 个点在 A 中，因此有

$$|A|\geqslant\sum_{i=0}^{t-1}\left(\left\lceil\frac{d(v_{3i})}{2}\right\rceil+1\right)\geqslant t+\sum_{i=1}^{t}\left\lceil\frac{d_i}{2}\right\rceil$$

故 $|B|\leqslant n-t-\sum_{i=1}^{t}\left\lceil\frac{d_i}{2}\right\rceil$。与定理1证明一样得到

$$(\Delta+1)\sum_{v\in A}f(v)+(\delta+1)\sum_{v\in B}f(v)\geqslant n$$

两边同加上 $(\Delta+1)\sum_{v\in B}f(v)$ 得到

$$(\Delta+1)\sum_{v\in V}f(v)\geqslant n+(\Delta-\delta)\sum_{v\in B}f(v)\geqslant n-(\Delta-\delta)|B|\geqslant n-(\Delta-\delta)\left(n-t-\sum_{i=1}^{t}\left\lceil\frac{d_i}{2}\right\rceil\right)$$

注意到 $\gamma_s(G)=\sum_{v\in V(G)}f(v)$,因此 $\gamma_s(G)\geqslant\dfrac{n-(\Delta-\delta)(n-t-\sum_{i=1}^{t}\left\lceil\frac{d_i}{2}\right\rceil)}{\Delta+1}$,定理证毕。

定理3　对于任意 n 阶无三角形图 G ,Δ和 δ 分别为图 G 的最大度和最小度,则有

$$\gamma_s(G)\geqslant\frac{n-(\Delta-\delta)\left(n-\left\lceil\frac{\Delta+\delta}{2}\right\rceil-1\right)}{\Delta+1}$$

证明　当 $\Delta=0$ 时, G 为空图,定理成立,下设 $\Delta\geqslant 1$ 。设 f 为图 G 的一个最小符号控制函数,即 $\gamma_s(G)=\sum_{v\in V(G)}f(v)$ 。令 $A=\{u\in V|f(u)=1\}$, $B=\{u\in V|f(u)=-1\}$ 。取图 G 的一个最大度点 u , $d(u)=\Delta$, w 为 u 的一个邻点, $d(w)\geqslant\delta$,由定义知 $N[u]$ 中至少有 $\left\lceil\frac{\Delta}{2}\right\rceil+1$ 个 A 中的点, $N[w]$ 中至少有 $\left\lceil\frac{\delta}{2}\right\rceil+1$ 个 A 中的点,由于 G 是无三角形图, $N[u]\cap N[w]=\{u,w\}$,故 $N[u]\cup N[w]$ 中至少有 $\left\lceil\frac{\Delta+\delta}{2}\right\rceil$ 个 A 中的点,即 $|A|\geqslant\left\lceil\frac{\Delta+\delta}{2}\right\rceil$,从而 $|B|\leqslant n-\left\lceil\frac{\Delta+\delta}{2}\right\rceil$ 。

与定理1证明一样得到

$$(\Delta+1)\sum_{v\in A}f(v)+(\delta+1)\sum_{v\in B}f(v)\geqslant n$$

两边同加上 $(\Delta+1)\sum_{v\in B}f(v)$ 得到

$$(\Delta+1)\sum_{v\in V}f(v)\geqslant n+(\Delta-\delta)\sum_{v\in B}f(v)\geqslant n-(\Delta-\delta)|B|\geqslant n-(\Delta-\delta)\left(n-\left\lceil\frac{\Delta+\delta}{2}\right\rceil\right)$$

因此 $\gamma_s(G)=\sum_{v\in V}f(v)\geqslant\dfrac{n-(\Delta-\delta)\left(n-\left\lceil\frac{\Delta+\delta}{2}\right\rceil\right)}{\Delta+1}$,定理证毕。

下面来刻划满足 $\gamma_s(G)=|V(G)|$ 的图 G 。

给定一个图 H,如果 H 的每个点都增加一些悬挂边(每个点至少增加一条悬挂边),所得的图 G 称为 H 的一个全冠图。

定理4　设 G 为一个 n 阶连通图 $(n\geqslant 2)$,则 $\gamma_s(G)=n$ 当且仅当 G 是一个连通图的全冠图。

证明　(充分性)设 G 是一个连通图 H 的全冠图,设 f 为图 G 的一个最小符号控制函数,即 $\gamma_s(G)=\sum_{v\in V(G)}f(v)$ 。对于 G 中任意点 u ,则必有 $d_G(u)=1$ 或者 $u\in V(H)$,后者 u 点必与 G 中的1度点 w 邻接。均由定义得知 $f(u)=1$,从而 $\gamma_s(G)=\sum_{u\in V}f(u)=n$ 。

(必要性)若 $\gamma_s(G)=n$,则对 G 的任意一个符号控制函数 f 和 G 的任意点 u ,均有 $f(u)=1$ 。令 $V_1=\{v\in V(G)|d_G(v)=1\}$ 。

若 $V_1=V(G)$,由于 G 为连通图,故 $G=K_2$,即 G 为 K_1 的全冠图。

若 $V_1\neq V(G)$,令 $V_0=V(G)\backslash V_1$,可见 $V_0\neq\phi$,记 $H=G[V_0]$ 为 V_0 在 G 中的导出子图,显然 H 为一个连通图。

下证图 G 是图 H 的一个全冠图,即证 H 的每个点在 G 中均与 G 中的1度点邻接。

(反证)假若存在 $u\in V(H)$,使得 $N_G(u)\cap V_1=\phi$,即在 G 中 u 点到 V_1 中任何点的距离均不小于2,定义

图 G 的一个符号控制函数 f 如下：$f(u)=-1$；当 $v\neq u$ 时 $f(v)=1$ 。故 $\gamma_s(G)\leqslant\sum_{w\in V(G)}f(w)=n-2$ ，与 $\gamma_s(G)=n$ 矛盾，定理证毕。

对于不连通图 G ，考虑 G 的每个分支，由上述定理可直接得出下面结论。

推论 2 对任意图 G ，则 $\gamma_s(G)=|V(G)|$ 当且仅当 G 的每个分支均为 K_1 或者为一个连通图的全冠图。

参考文献：

[1] BONDY J A，MURTY V S R. Graph theory with applications[M]. New York：Elsevier，1976.

[2] HAYNES T W ，HEDETNIEMI S T ，SLATER P J. Domination in graphs[M]. New York：Marcel Dekker，INC，1998.

[3] COCKAYNE E J，MYNHART C M. On a generalization of signed domination functions of graphs[J]. Ars Combin，1996，43：235-245.

[4] 徐保根，李春华. 图的符号星 K 控制数[J]. 纯粹数学与应用数学，2009，25（4）：638-641.

[5] XU BAOGEN. On signed edge domination numbers of graphs [J]. Discrete Math，2001，239：179-189.

[6] XU BAOGEN. On signed cycle domination in graphs[J]. Discrete Math，2009，309（4）：1007-1012.

[7] XU BAOGEN. On minus domination and signed domination in graphs[J]. Journal of Mathematical Research & Exposition，2003，23（4）：585-590.

[8] 徐保根. 图的控制理论[M]. 北京：科学出版社，2008.

The Lower Bounds of Signed Domination Numbers in Graphs

Xu Baogen，Ding Zongpeng，Luo Xi

(School of Basic Sciences，East China Jiaotong University，Nanchang 330013，China)

Abstract: Let $G=(V,E)$ be a graph, a function $f:V\rightarrow\{-1,1\}$ is said to be the signed dominating function (SDF) of G if $\sum_{V\in N[u]}f(v)>1$ holds for every vertex $u\in V(G)$. The signed domination number $\gamma_s(G)$ of G is defined as $\gamma_s(G)=\min\left\{\sum_{v\in V(G)}f(v)|f \text{ is an SDF of } G\right\}$. In this paper, we mainly give some new lower bounds of the signed domination number $\gamma_s(G)$ of a graph G , and characterize all graphs G satisfying $\gamma_s(G)=|V(G)|$.

Key words: graph；signed dominating function；signed domination number