

文章编号:1005-0523(2011)04-0030-03

完全正则序半群上的模糊理想

李春华

(华东交通大学基础科学学院, 江西 南昌 330013)

摘要:称 $(S, \cdot, \leq)$ 为序半群, 若 $(S, \cdot)$ 是半群, $(S, \leq)$ 是偏序且偏序对乘法运算是相容的。称序半群 $(S, \cdot, \leq)$ 为完全正则的, 若对任意 $a \in S$ 存在 $x \in S$ 使得 $a \leq a^2xa^2$ 。近来, Kehayopulu 和 Tsingelis 将模糊集, 模糊理想等概念引入到序半群中, 得到了一些好的结果。作为后续研究, 这里讨论了完全正则序半群上的模糊理想, 得到了完全正则序半群上模糊理想的一些性质。

关键词:模糊集; 序半群; 完全正则序半群; 模糊理想

中图分类号:O152.7

文献标识码:A

1971年, Rosenfeld 在文[1]中引入了模糊子群的概念, 率先进行了模糊代数理论的研究。随后, N. Kuraki^[2]正式开始模糊子半群理论的研究, 并引入了半群中的模糊理想和模糊同余的概念, 得到了一些漂亮结果。目前, 国内许多半群学者对各类半群上的模糊理想和(模糊)同余进行了卓有成效的研究^[3-10]。2002年, Kehayopulu 和 Tsingelis^[11]在序半群中首次引入了模糊双理想等概念, 给出了其等价条件的证明。众所周知, 完全正则序半群为序半群的真子类, 也是目前半群研究的热点之一, 因此, 开展完全正则序半群的模糊理想研究, 是有意义的。

1 预备知识

文中一般定义及记号均参见文献[11-12]。

称 $(S, \cdot, \leq)$ 为序半群, 若 $(S, \cdot)$ 是半群, $(S, \leq)$ 是偏序且偏序对乘法运算是相容的, 即 $(\forall a, b, c \in S) a \leq b \Rightarrow ac \leq bc, ca \leq cb$, 称序半群 $(S, \leq)$ 为完全正则的, 若对任意 $a \in S$ 存在 $x \in S$ 使得 $a \leq a^2xa^2$ 。为方便, 在本文的讨论中, 如无特别说明, S 总表示一序半群。令 A 为序半群 S 的子半群, A 称为 S 的内理想(拟理想), 若① $SAS \subseteq A$ ($AS \cap SA \subseteq A$); ② $a \in S, b \in A, a \leq b \Rightarrow a \in A$, 称映射 $f: S \rightarrow [0, 1]$ 为序半群 S 的一个模糊子集。对任意 $x \in S$, 称 $f(x)$ 为 x 对 f 的隶属度。令 f, g 为序半群 S 的两个模糊子集, 作如下定义:

- ① $\forall x \in S, f \supseteq g (f = g) \Leftrightarrow f(x) \geq g(x) (f(x) = g(x))$; ② $\forall x \in S, (f \cap g)(x) = f(x) \wedge g(x); (f \cup g)(x) = f(x) \vee g(x)$;
③ $\forall x \in S, (f \circ g)(x) = \begin{cases} \bigvee_{x=yz} \{f(y) \wedge g(z)\} & \exists y, z \in S, \text{ 满足 } x=yz \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ 。

显然, 以上“ $\circ$ ”满足结合律。序半群 S 的模糊子集 f 称为 S 的模糊子半群, 若① $\forall a, b \in S, f(ab) \geq f(a) \wedge f(b)$; ② $a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$, f 称为 S 的模糊左理想(模糊右理想), 若① $\forall a, b \in S, f(ab) \geq f(b)$ ($f(ab) \geq f(a)$); ② $a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$, f 称为 S 的模糊理想, 若 f 既是 S 的模糊左理想又是 S 的模糊右理想。

定义1^[12] 令 f 为序半群 S 的模糊子集, f 称为 S 的广义模糊双理想, 若

- ① $\forall x, a, y \in S, f(xay) \geq f(x) \wedge f(y)$; ② $a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$ 。

特别地, 称序半群 S 的广义模糊双理想 f 为模糊双理想, 若 f 为 S 的模糊子半群。

收稿日期:2011-06-11

基金项目:国家自然科学基金项目(11061014);江西省教育厅科技研究项目(赣教技字[2010]453号)

作者简介:李春华(1973—),男,副教授,博士研究生,主要研究方向为正则半群及富足半群理论。

定义2^[12] 令 f 为序半群 S 的模糊子半群, f 称为 S 的模糊内理想(模糊拟理想), 若① $\forall x, a, y \in S$, $f(xay) \geq f(a)$ ($(f \circ S) \cap (S \circ f) \subseteq f$); ② $a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$ 。

易知, 序半群 S 的模糊拟理想为 S 的模糊内理想, 反之则不一定成立。令 P 为序半群 S 的子集, P 称为半素的, 若 $\forall a \in S, a^2 \in P \Rightarrow a \in P$ 。

定义3 令 S 为序半群, S 的模糊子集 f 称为模糊半素的, 若① $\forall a \in S$, $f(a) \geq f(a^2)$; ② $a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$ 。

2 主要结果

命题1 令 S 为序半群, A 为 S 的非空子集, 则 A 为 S 的拟理想当且仅当 A 的特征函数 C_A 为 S 的模糊拟理想。

证明 必要性: 显然, 对任意 $a, b \in S$, 当 $a \notin A$ 或 $b \notin A$ 时, 有 $C_A(a) = 0$ 或 $C_A(b) = 0$ 。于是, $C_A(ab) \geq 0 = C_A(a) \wedge C_A(b)$; 当 $a \in A$ 且 $b \in A$ 时, 有 $C_A(a) = C_A(b) = 1$, 且有 $ab \in A$, 即 $C_A(ab) = 1$ 。故对任意 $a, b \in S$, $C_A(ab) \geq C_A(a) \wedge C_A(b)$ 。下证 C_A 满足模糊拟理想的两个条件。令 $a, b \in S$ 且 $a \leq b$, 则分两种情形: ① 若 $b \in A$, 则 $C_A(b) = 1$ 。又 A 为 S 的拟理想, 故由 $b \in A, a \leq b \Rightarrow a \in A$ 。即 $C_A(a) = 1$ 。② 若 $b \notin A$, 则 $C_A(a) \geq 0 = C_A(b)$ 。综上所述, $C_A(a) \geq C_A(b)$ 。另一方面, 由 A 为 S 的拟理想, 易证 $C_A \circ S \cap S \circ C_A \subseteq C_A$ 。故 C_A 为 S 的模糊拟理想。

充分性: 令 $a \in S, b \in A$ 且 $a \leq b$, 则由 C_A 为 S 的模糊拟理想, 得 $C_A(a) \geq C_A(b) = 1$ 。即 $C_A(a) = 1$ 。于是, $a \in A$ 。另一方面, 由 $C_A \circ S \cap S \circ C_A \subseteq C_A$, 易证 $AS \cap SA \subseteq A$, 因此, A 为 S 的拟理想。

命题2 令 S 为序半群, f 为 S 的模糊子半群, 则以下各款等价:

① f 称为模糊半素的; ② $(\forall a \in S) f(a) = f(a^2)$ 。

证明 ② $\Rightarrow$ ① 显然成立。

① $\Rightarrow$ ② 令 f 为模糊半素的, 则 $\forall a \in S f(a \geq f(a^2) \geq f(a) \wedge f(a) = f(a)$, 即 $f(a) = f(a^2)$ 。

定理3 令 S 为序半群, 则以下各款等价:

① S 为完全正则序半群; ② 对 S 的任意广义模糊双理想 f 均有 $(\forall a \in S) f(a) = f(a^2)$; ③ 对 S 的任意模糊双理想 f 均有 $(\forall a \in S) f(a) = f(a^2)$; ④ 对 S 的任意模糊拟理想 f 均有 $(\forall a \in S) f(a) = f(a^2)$; ⑤ S 的任意模糊拟理想 f 均为模糊半素的; ⑥ S 的任意拟理想均为半素的。

证明 ① $\Rightarrow$ ② 令 $a \in S$, 则由 S 为完全正则序半群, 得 $a \leq a^2 xa^2$, 其中 $x \in S$ 。于是, $a^2 \leq a(a^2 xa^2)$ 。又令 f 为 S 的任意广义模糊双理想, 则 $f(a) \geq f(a^2 xa^2) \geq f(a^2) \wedge f(a^2) = f(a^2) \geq f(a(a^2 xa^2)) = f(a(a^2 xa)a) \geq f(a) \wedge f(a) = f(a)$, 即 $f(a) = f(a^2)$ 。

② $\Rightarrow$ ③ $\Rightarrow$ ④ 显然成立。④ $\Rightarrow$ ⑤ 可由命题2推得。

⑤ $\Rightarrow$ ⑥ 令 A 为 S 的任意拟理想, $a \in S, a^2 \in A$, 则 $C_A(a^2) = 1$ 。另一方面, 由命题1, C_A 为 S 的模糊拟理想。故由题设可知 C_A 为模糊半素的。于是 $C_A(a) \geq C_A(a^2) = 1$ 。即 $C_A(a) = 1$ 。于是, $a \in A$ 。因此, A 为半素的。

⑥ $\Rightarrow$ ① 令 $a \in S$, 则易知 $Q[a^2] = \{a^2\} \cup (a^2 S \cap S a^2)$ 为 S 的拟理想。显然, $a^2 \in Q[a^2]$ 。而由题设知 $Q[a^2]$ 为半素的。故 $a \in Q[a^2]$ 。若 $a = a^2$, 则 $a = a^2 = aa = a^2 a^2 = a^2 aa = a^2 aa^2$; 若 $a \in a^2 S \cap S a^2$, 则易知 $a \in a^2 S a^2$, 即 $a = a^2 xa^2$, 其中 $x \in S$ 。综上所述, 对任意 $a \in S$, 有 $a \leq a^2 xa^2$ 。因此, S 为完全正则序半群。

注记: 由定理3易知, 序半群 S 的任一拟理想 A 为半素的等价于 S 的模糊拟理想 C_A 为模糊半素的。但对于序半群 S 的一般子集 P 为半素的却不能推出其特征函数 C_P 为模糊半素的(而在普通半群中却成立^[10])。

例: 令 S 为序半群, 乘法和偏序“ $\leq$ ”定义如下:

$aa = b, ab = b, ac = d, ad = d; ba = b, bb = b, bc = d, bd = d; ca = d, cb = d, cc = c, cd = d; cc = c, da = d, db = d, dc = d, dd = d$ 。 $\leq \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (d, b), (d, c)\}$

现取 S 的一般子集 $P=\{a,b\}$, 易知 P 为半素的。但对于 $b,d \in S$, 尽管有 $d \leq b$, 而 $0=C_p(d)<C_p(b)=1$ 。故 C_p 不为模糊半素的。

定理4 令 S 为完全正则序半群, f 为 S 的模糊子集, 则以下各款成立:

- ① f 为 S 的模糊理想当且仅当 f 为 S 的模糊内理想;
- ② f 为 S 的广义模糊双理想当且仅当 f 为 S 的模糊双理想。

证明 ① 必要性显然成立。下证充分性。令 f 为 S 的模糊内理想, $a,b \in S$ 且有 $a \leq b$, 则 $f(a) \geq f(b)$ 。另一方面, 对任意 $a,b \in S$, 由 S 为完全正则序半群, 易知存在 $x,y \in S$ 使得 $a \leq a^2xa^2, b \leq b^2yb^2$ 。于是, $f(ab) \geq f(a^2xa^2b^2yb^2) = f((a^2x)a(ab^2yb^2)) \geq f(a)$ 。同理可证, $f(ab) \geq f(b)$ 。因此, f 为 S 的模糊理想。

② 充分性显然成立。下证必要性。令 f 为 S 的广义模糊双理想, 则仅需证 f 为 S 的模糊序半群即可。令 $a,b \in S$, 则由 S 为完全正则序半群, 易知存在 $x \in S$ 使得 $b \leq b^2xb^2$ 。于是, $ab \leq ab^2yb^2$ 。又 f 为广义模糊双理想, 故 $f(ab) \geq f(ab^2yb^2) = f(a(b^2yb^2)b) \geq f(a) \wedge f(b)$ 。另一方面, 对任意 $a,b \in S$ 且 $a \leq b$, 有 $f(a) \geq f(b)$ 。因此, f 为 S 的模糊序半群。至此, 完成定理证明。

参考文献:

- [1] ROSENFELD A. Fuzzy groups[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1971, 35(3): 512-517.
- [2] KUROKI N. Fuzzy bi-ideals in semigroups[J]. Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli, 1979, 28(1): 17-21.
- [3] XIE XIANGYUN, TANG JIAN. Fuzzy radicals and prime fuzzy ideals of ordered semigroups[J]. Information Sciences 2008, 178(22): 4357-4374.
- [4] XIE XIANGYUN. Fuzzy ideals extensions in semigroups[J]. Kyungpook Mathematical Journal, 2002, 42(1): 39-49.
- [5] XIE XIANGYUN, TANG JIAN, YAN FENG, A characterization of prime fuzzy ideals of ordered semigroups[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2008, 22(1): 39-44.
- [6] LI CHUNHUA, GUO XIAOJIANG, LIU ERGEN. Good congruences on perfect rectangular bands of adequate semigroups[J]. Advances in Mathematics, 2009, 38(4): 465-476.
- [7] 李春华, 刘二根, 徐保根. 关于左型 A 半群上的 fuzzy 同余[J]. 纯粹数学与应用数学, 2009(4): 681-685.
- [8] 李春华, 徐保根. 富足半群上的 F-好同余[J]. 模糊系统与数学, 2008, 22(4): 39-41.
- [9] 李春华, 徐保根. IC 拟适当半群上的 Fuzzy 好同余[J]. 吉林大学学报: 理学版, 2009, 47(4): 667-670.
- [10] 李春华, 刘二根. 富足半群上的模糊 Rees-好同余[J]. 兰州理工大学学报, 2010, 36(4): 128-130.
- [11] JOHN N M, DAVENDER S M, NOBUAKI K. Fuzzy semigroups[M]. New York: Springer-verlag Berlin Heidelberg, 2003.
- [12] KEHAYOPULU N, TSINGELIS M. Fuzzy sets in ordered groupoids[J]. Semigroup Forum, 2002, 65(1): 128-132.

Fuzzy Ideals on Completely Regular Ordered Semigroups

Li Chunhua

(School of Basic Sciences, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: $(S, \cdot, \leq)$ is called an ordered semigroup if $(S, \cdot)$ is a semigroup, $(S, \leq)$ is a partial order and the partial order $\leq$ is compatible with the multiplication. An ordered semigroup $(S, \cdot, \leq)$ is called completely regular if for any $a \in S$ there exists an element $x \in S$ such that $a \leq a^2xa^2$. Recently, Kehayopulu and Tsingel is introduced into the notion of a fuzzy set, a fuzzy ideal on ordered semigroups, and some good results are gained This paper studies fuzzy ideals of completely regular ordered semigroups, and obtains some of their properties on such semigroups.

Key words: fuzzy set; ordered semigroup; completely regular ordered semigroup; fuzzy ideal