

文章编号:1005-0523(2011)04-0042-05

四原子 Tavis-Cummings 模型中两体及多体纠缠的研究

吴坤华¹, 张建松¹, 张小青², 王 洵¹

(1. 华东交通大学应用物理系, 江西 南昌 330013; 2. 北京建筑工程学院, 北京 100044)

摘要:首先, 研究4个二能级原子与1个单模腔场相互作用下量子系统的演化情况, 在此基础上, 再运用 concurrence 和 tangle 两种度量对4个二能级原子之间及与腔场的相互纠缠的周期性演化进行计算并对其结果进行讨论和分析。通过比较两种度量之间的关系发现此量子系统只存在两体纠缠, 而不存在多体之间的纠缠, 另外, 在恰当选择时间的情况下, 可以产生四原子相互作用下的W态。

关键词:纠缠演化; T-C模型; W态

中图分类号:0431

文献标识码:A

众所周知量子纠缠是量子信息发展过程中重要的量子资源之一, 它是众多量子协议得以实现的重要依托^[1-2], 而 QED 腔提供一个很好的操控量子纠缠和展示量子信息过程的平台^[1-4]。其中, J-C 模型^[5]就是人们最熟悉和引用最广的场与原子相互作用的模型之一, J-C 模型展示的是量子化的场与量子化的二能级原子之间相互作用之间的全量子化过程。拥有很多纯量子化特性, 如: Rabi 震荡下的塌缩与复活; 场的压缩; 光子反群聚等在 J-C 模型都有很好的展示^[6-7]。

该文探讨的主要内容是 Tavis-Cummings(简称 T-C)模型^[8]下4个二能级原子之间纠缠的演化情况。T-C 模型主要描述的多个二能级原子与单模场之间相互作用^[6-7]。它可运用于量子信息过程和加深对基础量子力学的理解^[2, 8]。在文献[9]中, 作者就运用 tangle 运算方法对两原子的 T-C 模型的量子纠缠进行了探讨和研究。这里将对四个二能级原子在一个光学腔中的相互作用情况进行讨论, 主要是对不同原子之间相互作用和原子与场之间相互作用的探讨。假设所有原子开始都处于基态 $|g\rangle$, 腔场处于粒子数态 $|1\rangle$ 。首先, 将讨论如何获得量子化系统; 其次, 将运用 concurrence 和 tangle 对系统在两两相互作用情况下的纠缠进行计算; 最后, 将讨论在一定条件下, 原子与腔场相互作用时系统量子态的表示(W态)。

1 模型的选择和讨论

在旋波近似情况下, 4个二能级原子在 T-C 模型下的哈密顿量可表示为^[8-10]: (文章中取 $\hbar = 1$)

$$H = \sum_{i=1}^4 \frac{w_i}{2} \sigma_i^z + wa^+a + \sum_{i=1}^4 g_i (a\sigma_i^+ + a^+\sigma_i^-) \quad (1)$$

式中: g_i 为场和原子之间相互作用的系数; $\sigma_i^z = |e_i\rangle\langle e_i| - |g_i\rangle\langle g_i|$; σ_i^+ 为原子的上升算符; σ_i^- 为原子的下降算符; w_i 为二能级原子的跃迁频率; a^+ , a 为原子的产生和湮灭算符; w 为腔场的频率。系统模型为4个二能级原子与1个单模腔场的相互作用系统, 其中原子间距离足够大, 因此原子间相互作用可忽略。如图1。

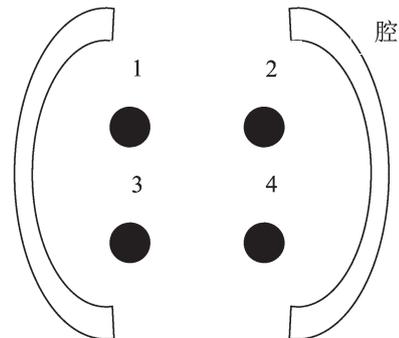


图1 四个二能级原子与一个单模场相互作用系统
Fig.1 Interaction system of four two-level atoms and a single-mode field

收稿日期:2011-04-17

基金项目:国家自然科学基金项目(11047115);江西省教育厅青年科学基金项目(GJJ10135)

作者简介:吴坤华(1982-),男,硕士研究生,研究方向为多粒子纠缠演化和纠缠应用。

下面,将对系统做一定的假设,以便有利于系统的计算,假设原子的跃迁频率与腔场的固有频率相等;原子与原子之间的相互作用系数和原子与腔场之间的作用系数相等,即 $w = w_i$, $g = g_i$ 。因此,系统的哈密顿量可表示为

$$H = \frac{w}{2} \sum_{i=1}^4 \sigma_i^z + wa^+a + g \sum_{i=1}^4 (a\sigma_i^+ + a^+\sigma_i^-) \quad (2)$$

假设二能级原子开始都处于基态 $|g_i\rangle$, 腔场处于粒子数态 $|1\rangle$, 因此,系统所处的初始量子态 $|\phi(0)\rangle$ 可表示为

$$|\phi(0)\rangle = |1\rangle|g_1\rangle|g_2\rangle|g_3\rangle|g_4\rangle \quad (3)$$

2 concurrence 和 tangle 的运算及比较

由运动方程和系统的初始态情况可知^[11], 系统任意时刻 t 的量子态表示为

$$\begin{aligned} |\phi(t)\rangle = & \cos(2gt)|1\rangle|g_1\rangle|g_2\rangle|g_3\rangle|g_4\rangle - \frac{i \sin(2gt)}{2}|0\rangle \\ & (|e_1\rangle|g_2\rangle|g_3\rangle|g_4\rangle + |g_1\rangle|e_2\rangle|g_3\rangle|g_4\rangle + |g_1\rangle|g_2\rangle|e_3\rangle|g_4\rangle + |g_1\rangle|g_2\rangle|g_3\rangle|e_4\rangle) \end{aligned} \quad (4)$$

由于能量守恒定律(即旋波近似情况下), 在这里省略了快变量项 $e^{i\omega t/2}$ 。(在运算式中,用大写字母 C 表示 concurrence 的值)

下面,将对该系统运用 concurrence 进行纠缠度量的运算,由 concurrence 得定义为^[12]

$$C = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\} \quad (5)$$

式中: $\lambda_i (i=1, 2, 3, 4)$ 为约化密度算符本征值平方根,且当 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$ 时,反转自旋约化密度算符 R 为

$$R = \rho(\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y) \quad (6)$$

σ_y 表示 Pauli 矩阵算符,有 $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, 而且,约化密度矩阵可表示为

$$\rho = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & z & 0 \\ 0 & z^* & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \quad (7)$$

(*表示复合函数的复共轭)在这种情况下 concurrence 可以表示为

$$C = \max\{0, |z| - \sqrt{ad}\} \quad (8)$$

首先,对腔场与第 i 原子之间的纠缠情况予以分析,在约化掉其他原子的情况下,可以得到腔场与第 i 原子之间的约化密度矩可以表示为

$$\rho_{fa_i}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |a_1(t)|^2 & a_1(t)a_2(t)^* & 0 \\ 0 & a_1(t)^*a_2(t) & |a_2(t)|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2|a_2(t)|^2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

这里 $a_1(t) = \cos(2gt)$; $a_2(t) = -i \sin(2gt)/2$, 联立(8)(9), 腔场与原子 i 之间相互作用 concurrence 表达式可写为

$$C_{fa_i}(t) = 2|a_1(t)a_2(t)| \quad (10)$$

原子 i 与原子 j 之间相互作用的约化密度矩阵可表示为

$$\rho_{a_i a_j}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |a_2(t)|^2 & |a_2(t)|^2 & 0 \\ 0 & |a_2(t)|^2 & |a_2(t)|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |a_1(t)|^2 + |a_2(t)|^2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

同上,原子 i 与 j 原子之间相互作用 concurrence 表达式可表示为

$$C_{a_i a_j}(t) = 2|a_2(t)|^2 \quad (12)$$

下面,对 $C_{f_{a_1}}(t)$ 和 $C_{a_i a_j}(t)$ 随时间 t 的变化进行作图,并进行对比分析,如图2所示。

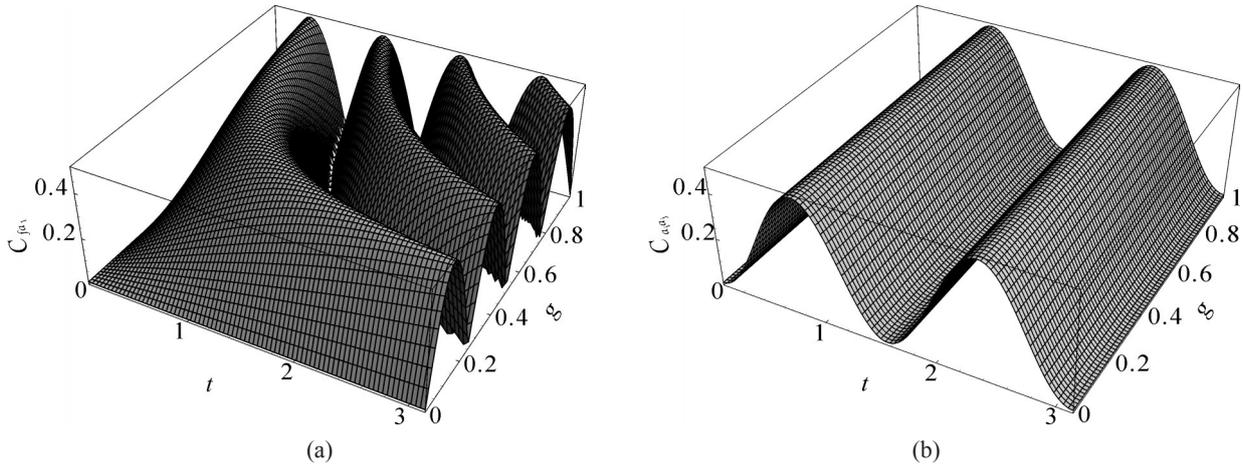


图2 Concurrence $C_{f_{a_1}}(t)$ 和 $C_{a_i a_j}$ 随时间 t 在弱相互作用下 ($0 < g < 1$) 时演化情况

Fig.2 Evolution of concurrence $C_{f_{a_1}}(t)$ and $C_{a_i a_j}$ with time t in weak interaction region ($0 < g < 1$)

由图2可以看出,随着相互作用系数 g 的不断加强,在一个周期内,腔场与原子之间的 concurrence $C_{f_{a_1}}(t)$ 出现不稳定的变化,且变化周期越来越小;然而,原子与原子之间的 concurrence $C_{a_i a_j}(t)$ 非常稳定,这也就是说在该系统中不管相互作用系数 g 如何变化,原子与原子之间的 concurrence $C_{a_i a_j}(t)$ 不变。

现在,对该系统运用 tangle 运算方法来探讨该系统中多体纠缠之间的关系,这种运算方法首先由 Coffman, Kundu 和 Wootters 提出^[13],主要观点是:系统中某一粒子或腔场与系统中其他粒子或腔场组成的整体之间的纠缠关系,并且讨论了系统的纠缠分配情况。在 tangle 中某一 qubit 与系统其他部分(rest)的关系可以表示为^[10]

$$\tau_{1, \text{rest}}(\rho) = 4 \det(\rho_1) = 2(1 - \text{Tr} \rho_1^2) \quad (13)$$

其中 ρ_1 是系统中原子1的约化密度矩阵。由 tangle 定义可知只有整个系统处于纯态时,才可运用其对系统进行运算。由(4)(13)可以得出在约化腔场后的表达式:

$$\tau_{f, (a_1 a_2 a_3 a_4)}(t) = 16|a_1(t)a_2(t)|^2 \quad (14)$$

同理,可以得出在约化任一原子后得 tangle 表达式:

$$\tau_{a_i, (f_{a_1} a_2 a_3 a_4)}(t) = 4|a_2(t)|^2(1 - |a_2(t)|^2) \quad (15)$$

下面,将对 $\tau_{f, (a_1 a_2 a_3 a_4)}(t)$ 和 $\tau_{a_i, (f_{a_1} a_2 a_3 a_4)}(t)$ 的 tangle 函数随时间 t 变化进行画图,并对它们的图线进行对比和分析。如图3所示。

从图3(a)tangle $\tau_{f, (a_1 a_2 a_3 a_4)}(t)$ 和图3(b) $\tau_{a_i, (f_{a_1} a_2 a_3 a_4)}(t)$ 随时间 t 及相互作用系数 g 的演化图像中,可以知道随着 g 的变化 $\tau_{f, (a_1 a_2 a_3 a_4)}(t)$ 的周期变化比 $\tau_{a_i, (f_{a_1} a_2 a_3 a_4)}(t)$ 周期变化要快,且还可以看出 $\tau_{a_i, (f_{a_1} a_2 a_3 a_4)}(t) \geq \tau_{f, (a_1 a_2 a_3 a_4)}(t)$ 。由图2和图3,可以看出 $\tau_{f, (a_1 a_2 a_3 a_4)}(t)$, $\tau_{a_i, (f_{a_1} a_2 a_3 a_4)}(t)$ 都大于 $C_{f_{a_1}}(t)$, $C_{a_i a_j}(t)$ 。而且,可以得出 $\tau_{f, (a_1 a_2 a_3 a_4)}(t) \geq C_{f_{a_1}}^2(t) \geq C_{f_{a_1}}^2(t)$ 和 $\tau_{a_i, (f_{a_1} a_2 a_3 a_4)}(t) \geq C_{a_i a_j}(t) \geq C_{a_i a_j}^2(t)$, 结果与文献[13]相符,由推导可以得出:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{f, (a_1 a_2 a_3 a_4)}(t) &= C_{f_{a_1}}^2(t) + C_{f_{a_2}}^2(t) + C_{f_{a_3}}^2(t) + C_{f_{a_4}}^2(t) \\ \tau_{a_i, (f_{a_1} a_2 a_3 a_4)}(t) &= C_{f_{a_1}}^2(t) + C_{a_1 a_2}^2(t) + C_{a_1 a_3}^2(t) + C_{a_1 a_4}^2(t) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

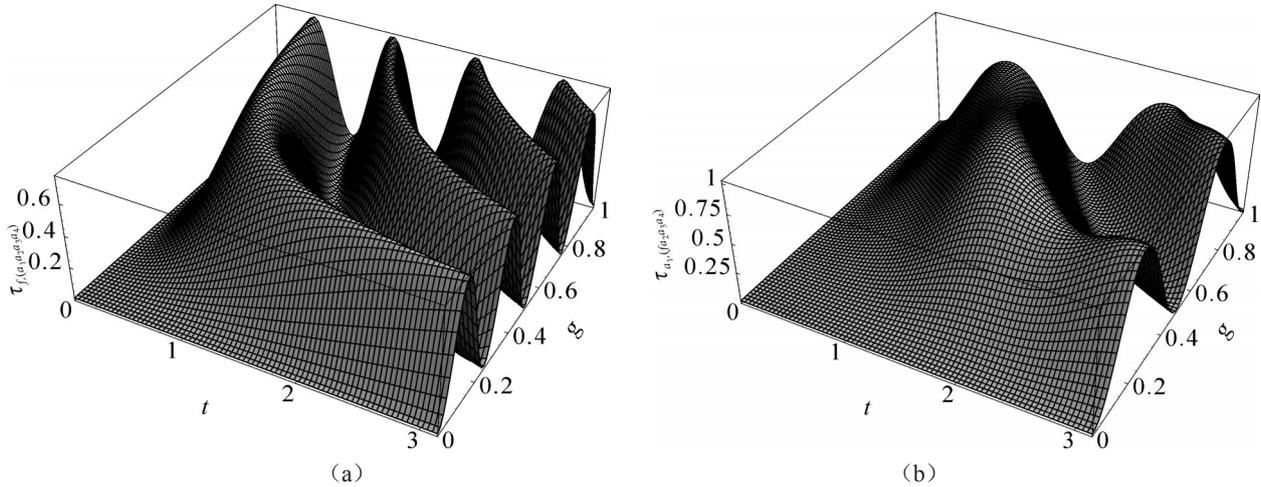


图3 Tangle $\tau_{f,(a_1,a_2,a_3,a_4)}(t)$ 和 tangle $\tau_{a_1,(fa_2,a_3,a_4)}$ 随时间 t 及相互作用系数 g 的演化情况

Fig.3 Chang of tangle $\tau_{f,(a_1,a_2,a_3,a_4)}(t)$ and $\tau_{a_1,(fa_2,a_3,a_4)}(t)$ with time t and interacting constant g

这说明 tangle 运算过程中都是两体之间的纠缠,而不存在三体纠缠^[13]。由文献[10][14]可以知道,腔场与原子及原子与原子之间的相互作用产生纠缠随原子数的增加 concurrence 和 tangle 都在不断变小,而原子之间相互纠缠的 concurrence 在各自系统中却保持不变。

值得注意的是在表达式(4)中,当表达式的第一项系数为0时,即当时间 t 满足以下条件时:

$$t = \frac{(2k+1)\pi}{4g} \tag{17}$$

表达式(4)可表示为 W 态

$$|\phi(t)\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle(|e_1\rangle|g_2\rangle|g_3\rangle|g_4\rangle + |g_1\rangle|e_2\rangle|g_3\rangle|g_4\rangle + |g_1\rangle|g_2\rangle|e_3\rangle|g_4\rangle + |g_1\rangle|g_2\rangle|g_3\rangle|e_4\rangle) \tag{18}$$

这里运用了三角函数特性:当 $\cos(2gt)=0$ 时, $\sin(2gt)=1$ 。从(17)式,由结果可以看出该式即为二能级原子系统的 W 态。也即在一定的条件下, W 态可以由一个单模腔场与多个二能级原子相互作用系统来制备。

3 总结

主要讨论在 T-C 模型下, 1 个单模腔场与 4 个二能级原子之间的相互作用情况下的纠缠演化。通过运用 concurrence 和 tangle 对系统纠缠量进行了详细的计算和分析,两种方法的共同点是:原子之间的相互作用产生的纠缠明显大于或等于腔场与原子相互作用产生的纠缠,即 $C_{a_i a_j}(t) \geq C_{fa_i}(t)$ 。然而这两种方法也有各自的特色,如:由 concurrence 可知,原子与原子之间的相互纠缠量并不随时间及它们之间的相互作用系数改变而改变,原子与原子之间相互纠缠相当稳定,因此对实际应用有很大的帮助。由 tangle 结果可知:场与原子之间的纠缠变化明显比原子与原子及场之间的纠缠的变化不相同,且 $\tau_{a_1,(fa_2,a_3,a_4)}(t) \geq \tau_{f,(a_1,a_2,a_3,a_4)}(t)$;而且,当在一定条件下,可以使得单模腔场与多个二能级原子相互作用情况下制备 W 态。

参考文献:

[1] TERHAL B M. Detecting quantum entanglement[J]. Journal of Theoretical Computer Scicence, 2002, 287(1): 313-315.
 [2] BENNETT C H, BRASSARD G. Quantum cryptography: public key distribution and coin tossing[C]// Proceedings of the IEEE International and Conference on Computers, Bangalore: Systems and Signal Processing, 1984: 175-179.
 [3] SHOR P W. Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory[J]. Phys Rev A, 1995, 52: 2493-2496.

- [4] BENNETT C H, BRASSARD G, CREPEAU C, et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels[J]. Phys Rev Lett, 1993, 70(2): 1895-1899.
- [5] JAYNES E T, CUMMINGS F W. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to beam maser[J]. Proc IEEE, 1963, 51(1): 89-109.
- [6] MANDEL L, WOLF E. Optical coherence and quantum optics[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- [7] SCULLY M, ZUBAIRY M S. Quantum optics[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [8] TAVIS M, CUMMINGS F W. Exact solution for an n-molecule-radiation-field Hamiltonian[J]. Phys Rev, 1968, 170(2): 379-384.
- [9] TESSIER T E, DEUTSCH I H, DELGADO A. Entanglement sharing in the two-atom Tavis-Cummings model[J]. Phys Rev A, 2003, 68(1): 25-35.
- [10] ZHANG JIANGSONG, CHEN AIXI, ABDELATY M. Two atoms in dissipative cavities in dispersive limit: entanglement sudden death and long-lived entanglement[J]. J Phys B: At Mol Opt Phys, 2010, 43(2): 501-508.
- [11] XU J B, ZOU X B. Dynamic algebraic approach to the system of a three-level atom in the Λ configuration[J]. Phys Rev A, 1999, 60(1): 4743-4751.
- [12] WOOTTERS W K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubit [J]. Phys Rev Lett, 1998, 80(2): 2245-2252.
- [13] COFFMAN V, KUNDU J, WOOTTERS W K. Distributed entanglement[J]. Phys Rev A, 2000, 61(2): 556-561.
- [14] ZHANG J S, XU J B, LIN Q. Controlling entanglement sudden death in cavity QED by classical driving fields[J]. The European Physical Journal: D, 2008, 51(2): 283-288.

A Study on Pair-wise and Multipartite Entanglement Dynamics of Four-atom Tavis-Cummings Model

Wu Kunhua¹, Zhang Jiansong¹, Zhang Xiaoqing², Wang Xun¹

(1. Department of Applied Physics, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China; 2. Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing 100044, China)

Abstract: The entanglement dynamics of four two-level atoms within a single-mode cavity using concurrence and tangle is discussed. The concurrence and tangle of the system are periodic functions of time. The results show that the entanglement of the present system is restricted to the class of pair-wise entanglement. In addition, the four-qubit W state could be generated in the present model if the interaction time of the atoms and the cavity is chosen appropriately.

Key words: entanglement dynamics; T-C model; W-states