

文章编号:1005-0523(2011)05-0001-04

关于图的集控制数

徐保根, 罗 茜, 丁宗鹏

(华东交通大学基础科学学院 江西 南昌 330013)

摘要: 设 G 是一个图, 如果 $V(G)$ 能划分为 t 个两两不交的控制集 $D_i (i=1, 2, \dots, t)$, 则称 G 有 t -控制集划分。图 G 的集控制数定义为 $d(G) = \max \{t \mid G \text{ 有 } t\text{-控制集划分}\}$ 。该文主要研究乘积图与联图的集控制问题, 给出其集控制数的界限, 并确定一些特殊图的集控制数。

关键词: 图; 乘积图; 联图; 控制集; 集控制数

中图分类号: O157.5

文献标志码: A

1 引言及定义

文中所指的图均为无向简单图, 文中未说明的符号和术语同文献[1]。

设 G 为一个图, 对于任意 v , 则 $N_G(v)$ 表示 v 点在 G 中的邻域, $d_G(v) = |N_G(v)|$ 表示 v 点在 G 中的度, $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ 称为 v 点的闭邻域, δ 和 Δ 分别为图 G 的最小度和最大度, 有时, $N_G[v]$ 和 $d_G(v)$ 分别简记为 $N[v]$ 和 $d(v)$ 。

设 G 和 H 为两个点不交的图, 在 $G \cup H$ 中将 G 的每个顶点与 H 的每个顶点均邻接起来, 所得的图称为 G 与 H 的联图, 记为 $G \vee H$ 。

对于两个点不交的图 G 和 H , 则 G 与 H 的乘积图记为 $G \times H$, 其定义为

$$V(G \times H) = \{(u, v) \mid u \in V(G), v \in V(H)\};$$

$$E(G \times H) = \{(u_1, v_1)(u_2, v_2) \mid u_1 = u_2 \text{ 且 } v_1 \text{ 邻接 } v_2, \text{ 或者 } v_1 = v_2 \text{ 且 } u_1 \text{ 邻接 } u_2\}。$$

设 G 为一个图, $D \subseteq V(G)$, 如果对于 $V(G) \setminus D$ 中的每个顶点 v , 存在 $u \in D$, 使得 u 与 v 在 G 中邻接, 则称 D 为 G 的一个控制集, 容量最小的控制集包含的点数称为 G 的控制数, 记为 $\gamma(G)$ 。

图的控制理论是图论中的重要分支, 美国图论学者 W.T.Haynes 等^[2]在 1998 年出版的专著较为系统地综述了这一领域的一些主要研究成果。在 1977 年, E. J. Cockayne 和 S.T.Hedetniemi^[3]引入了图的集控制概念并研究图的集控制数, B.Zelinka^[4-5]在图的集控制方面做了大量工作, 得出了集控制数与图的其它参数之间的关系, 如集控制数与线性点荫度的关系^[4]等。

定义 1^[3] 设 G 是一个图, 如果 $V(G)$ 能划分为 t 个两两不交的控制集 $D_i (i=1, 2, \dots, t)$, 则称 G 有 t -控制集划分。图 G 的集控制数记为 $d(G)$, 其定义为: $d(G) = \max \{t \mid \text{存在 } G \text{ 的 } t\text{-控制集划分}\}$ 。

对于任何图 G , 由于 $D = V(G)$ 本身就是 G 的一个控制集, 故 $d(G)$ 总是存在的, 并且不难证明下面的结论。

引理 1^[6] 对任意图 G , 均有 $d(G) \leq 1 + \delta(G)$ 。

收稿日期: 2011-06-13

基金项目: 国家自然科学基金项目(11061014, 10661007); 江西省教育厅科研项目(GJJ09235)

作者简介: 徐保根(1963—), 男, 教授, 研究方向为图论与组合数学。

在本文中,我们主要研究乘积图与联图的集控制问题,给出这两种图集控制数的界限,并确定了一些特殊性图的集控制数,这包括 $K_m \times K_n$ 和 $P_m \times P_n$ 等。

2 主要结果及其证明

首先给出两个图的乘积图与联图的集控制数的界限,然后确定 $K_m \times K_n$ 和 $P_m \times P_n$ 的集控制数。

定理1 对于任意 n 阶图 G 和 m 阶图 H , 均有

$$\max\{n, m\} \geq d(G \times H) \geq \max\{d(G), d(H)\}$$

并且此上界和下界均是可达的。

证明 记 $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, $t = d(G \times H)$ 。

1) 先证 $\max\{n, m\} \geq d(G \times H)$, 不妨设 $n \geq m$, 即证 $n \geq t$ 。

(反证) 假若 $n \leq t - 1$, 由定义知: $V(G \times H)$ 能划分为 t 个两两不交的控制集 $D_i (i = 1, 2, \dots, t)$, 即 $V(G \times H) = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_t$, 并且 $D_i \cap D_j = \emptyset (1 \leq i \neq j \leq t)$, 注意到 $|V(G \times H)| = mn$, 故上述划分中存在一个 D_k , 使得 $|D_k| \leq m - 1$ 。

记 $D_k = \{(u_{i1}, v_{j1}), (u_{i2}, v_{j2}), \dots, (u_{is}, v_{js})\}$, 即有 $s \leq m - 1 \leq n - 1$ 。

令 $V_1 = V(G) \setminus \{u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{is}\}$, $V_2 = V(H) \setminus \{v_{j1}, v_{j2}, \dots, v_{js}\}$, 可见 $V_1 \neq \emptyset$, $V_2 \neq \emptyset$ 。

$\forall u \in V_1, v \in V_2$, 由乘积图的定义知: 图 $G \times H$ 中的点 (u, v) 不与 D_k 中的任何点相邻, 这与 D_k 为 $G \times H$ 的控制集矛盾, 从而 $n \geq t$ 。

2) 下面证明 $d(G \times H) \geq \max\{d(G), d(H)\}$ 。

记 $d(G) = p$, $d(H) = q$, 不妨设 $p \geq q$, 将 $V(G)$ 划分为 p 个两两不交的控制集 $A_i (i = 1, 2, \dots, p)$, 即 $V(G) = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p$, 并且 $A_i \cap A_j = \emptyset (1 \leq i \neq j \leq p)$ 。

现将 $V(G \times H)$ 分成 p 个子集如下

$$D_i = \{(u, v) | u \in A_i, v \in V(H)\} \quad (i = 1, 2, \dots, p)。$$

由于每个 A_i 均是 G 的控制集, 故每个 D_i 均是 $G \times H$ 的控制集, 即 $d(G \times H) \geq p$ 。

特殊地, 当 $G = K_n$ 为 n 阶完全图, 且 $n \geq m$ 时, 定理给出的上、下界限均可达。至此, 定理1证毕。

注意到 $d(K_n) = n$, 故由上述定理1可直接得到下面两个推论。

推论1 设 n 和 m 为整数, 且 $n \geq m$, 则对任意 m 阶图 H , 均有 $d(K_n \times H) = n$ 。

推论2 对于任意正整数 m 和 n , 均有 $d(K_m \times K_n) = \max\{m, n\}$ 。

定理2 对于任意 n 阶图 G 和 m 阶图 H , 均有

$$\min\{m, n\} \leq d(G \vee H) \leq \min\{m + d(G), n + d(H)\}$$

并且此上界和下界均是可达的。

证明 不妨设 $n \geq m$ 。记 $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, $t = d(G \vee H)$ 。先证 $d(G \vee H) \geq m$ 。

只需将 $V(G \vee H)$ 划分为 m 个控制集即可, 事实上, 可令

$$D_1 = \{u_1, v_1\}, D_2 = \{u_2, v_2\}, \dots, D_{m-1} = \{u_{m-1}, v_{m-1}\}, D_m = \{u_m, u_{m+1}, \dots, u_n, v_m\}。$$

可见上述每个 $D_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 均为 $G \vee H$ 的控制集, 即 $d(G \vee H) \geq m$ 。

下面证明 $d(G \vee H) \leq \min\{m + d(G), n + d(H)\}$ 。

由对称性, 只需证明 $d(G \vee H) \leq m + d(G)$ 即可。记 $d(G \vee H) = t$, $d(G) = r$ 。

(反证) 假若 $t \geq m + r + 1$, 由定义知 $V(G \vee H)$ 能划分为 t 个图 $G \vee H$ 的控制集, 即

$V(G \vee H) = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_t$, 且 $D_i \cap D_j = \emptyset (1 \leq i \neq j \leq t)$ 。注意到 $|V(H)| = m$, $t \geq m + r + 1$, 故这些控制集中

至少有 $r+1$ 个控制集均不包含图 H 中的点,这 $r+1$ 个控制集记为 $D_{i1}, D_{i2}, \dots, D_{i(r+1)}$, 它们均不包含图 H 中的点,且均为 $G \vee H$ 的控制集,故每个 $D_{ij} (j=1, 2, \dots, r+1)$ 均为图 G 的控制集,注意到其为两两不交的,从而 $d(G) \geq r+1$, 矛盾。定理2证毕。

定理3 对于任意正整数 $m \geq 3$ 和 $n \geq 2$, 均有 $d(P_m \times P_n) = 3$

证明 令 $G = P_m \times P_n$, 可见 $\delta(G) = 2$, 由引理1知 $d(G) \leq 3$ 。

记 $V(G) = \{v_{ij} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$,

$E(G) = \{v_{i,k}v_{i+1,k} | 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq k \leq n\} \cup \{v_{k,j}v_{k,j+1} | 1 \leq k \leq m, 1 \leq j \leq n-1\}$ 。

下面只需将 $V(G)$ 划分为3个控制集 $V(G) = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ 。

情况1 当 $n \equiv 0(\text{mod } 3)$ 时, 令

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{cases} v_{i,3j+1} & i=2k+1, 1 \leq k \leq m, j=0, 1, 2, \dots, n \\ v_{i,3j+3} & i=2k, 1 \leq k \leq m, j=0, 1, 2, \dots, n \end{cases} \\ D_2 &= \{v_{i,3j+2} | i=1, 2, 3, \dots, m, j=0, 1, 2, \dots, n\} \\ D_3 &= \begin{cases} v_{i,3j+3} & i=2k+1, 1 \leq k \leq m, j=0, 1, 2, \dots, n \\ v_{i,3j+1} & i=2k, 1 \leq k \leq m, j=0, 1, 2, \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$

情况2 当 $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ 时, 令 $V = V_1 \cup V_2$,

其中, $V_1 = \{v_{i,j} | i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n-1\}$, $V_2 = \{v_{i,n} | i=1, 2, \dots, m\}$, V_1 中的点可以仿照情况1进行划分,我们只需对 V_2 中的点进行划分即可。那么

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{cases} v_{i,3j+1} & i=2k+1, 1 \leq k \leq m, j=0, 1, 2, \dots, n-1 \\ v_{i,3j+3} & i=2k, 1 \leq k \leq m, j=0, 1, 2, \dots, n-1 \\ v_{3i+1,n} & i=0, 1, 2, \dots, m \end{cases} \\ D_2 &= \{v_{i,3j+2} | i=1, 2, 3, \dots, m, j=0, 1, 2, \dots, n\} \\ D_3 &= \begin{cases} v_{i,3j+3} & i=2k+1, 1 \leq k \leq m, j=0, 1, 2, \dots, n-1 \\ v_{i,3j+1} & i=2k, 1 \leq k \leq m, j=0, 1, 2, \dots, n-1 \\ v_{3i,n} & i=1, 2, 3, \dots, m \end{cases} \end{aligned}$$

情况3 当 $n \equiv 2(\text{mod } 3)$ 时, 令 $V = V_1 \cup V_2$,

其中, $V_1 = \{v_{i,j} | i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n-1\}$, $V_2 = \{v_{i,n} | i=1, 2, \dots, m\}$, V_1 中的点可以仿照情况2进行划分,我们只需对 V_2 中的点进行划分即可。那么

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{cases} v_{i,3j+1} & i=2k+1, 1 \leq k \leq m, j=0, 1, 2, \dots, n-2 \\ v_{i,3j+3} & i=2k, 1 \leq k \leq m, j=0, 1, 2, \dots, n-2 \\ v_{3i+1,j} & i=0, 1, 2, \dots, m, j=1, 2, 3, \dots, n-1 \\ v_{3i,n} & i=1, 2, 3, \dots, m \end{cases} \\ D_2 &= \{v_{i,3j+2} | i=1, 2, 3, \dots, m, j=0, 1, 2, \dots, n\} \\ D_3 &= \begin{cases} v_{i,3j+3} & i=2k+1, 1 \leq k \leq m, j=0, 1, 2, \dots, n-2 \\ v_{i,3j+1} & i=2k, 1 \leq k \leq m, j=0, 1, 2, \dots, n-2 \\ v_{3i,j} & i=1, 2, 3, \dots, m, j=1, 2, 3, \dots, n-1 \\ v_{3i+1,n} & i=0, 1, 2, \dots, m \end{cases} \end{aligned}$$

综上所述, $V(G)$ 能划分为3个控制集,定理3证毕。

参考文献:

- [1] BOND J A, MURTY V S R. Graph theory with applications[M]. Amsterdam: Elsevier, 1976: 247-250.
- [2] HAYNES T W, HEDETNIEMI S T, SLATER P J. Domination in graphs[M]. New York: Marcel Dekker INC, 1998: 150-155.
- [3] COCKAYNE E J, HEDETNIEMI S T. Towards a theory of domination in graphs [J]. Networks, 1977(7): 247-261.
- [4] ZELINKA B. Domatic number and linear arboricity of cacti[J]. Slovaca Math, 1986(36): 41-54.
- [5] ZELINKA B. Domatic number and degrees of vertices of a graph[J]. Slovaca Math, 1989(39): 7-11.
- [6] 徐保根. 图的控制理论[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 103-113.

On the Domatic Numbers of Graphs

Xu Baogen, Luo Xi, Ding Zongpeng

(School of Basic Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: Let $G=(V, E)$ be a graph, if the set $V(G)$ may be partitioned into t disjoint dominating set, then G has a t -domination partition. The domatic number $d(G)$ of G is defined as $d(G)=\max \{t \mid G \text{ has a } t\text{-domination partition}\}$. In this paper, we study the domatic number problems for the product graph and the join graph, some bounds of the domatic numbers, and determined the domatic number for some special graphs are obtained.

Key words: graph; product graph; join graph; dominating set; domatic number