

文章编号:1005-0523(2011)05-0005-04

关于冠图与 queens-图的若干结果

邓毅雄

(华东交通大学软件学院,江西 南昌 330013)

摘要:文献[3]引入了 queens-图的概念。一个 $(0, 1)$ -矩阵 A 的 queens-图的点集对应于 A 中的 1, 两个点邻接当且仅当它们对应的 1 在 A 的同一条线上。一个基本问题是判断哪些图是 queens-图, 该文证明了两类冠图是 queens-图。

关键词:图; $(0, 1)$ -矩阵; queens-图; 冠图

中图分类号:O157.5

文献标志码:A

本文讨论的图都是简单无向图, 文中未加说明的术语和符号参阅文献[1][2]。

L. W. Beineke 等^[3]引入了 queens-图的概念, 并且证明了在一定条件下的完全块图、树、 $K_n \times P_m$ 、 $P_n \times P_m$ 、 $C_{2n} \times P_m$ 等是 queens-图, 并解决了二部及多部图的问题。到目前, 这方面的研究成果比较少, 另外的结果有: 证明了 θ -图是 queens-图, 并给出了 $B(m, n, r)$ 图是 queens-图的充分必要条件^[4]; 讨论了 queens-图的构造问题, 也得到了一些 queens-图^[5]。

1 定义及引理

设 A 是 $(0, 1)$ -矩阵。一个图称为 A 的 queens-图, 记为 $Q(A)$, 如果这个图的点与 A 中的 1 相对应, 图的两个点邻接当且仅当 A 中对应的 1 同在某线或对角线上。(这里的“线”是指矩阵的行或列。)

我们称一个图 G 是 queens-图, 如果存在某 $(0, 1)$ -矩阵 A , 使得 G 是 A 的 queens-图。注意到, 给出一个 $(0, 1)$ -矩阵, 很容易获得其对应的 queens-图, 但是, 给出一个图 G , 判断它是否为 queens-图, 却常常不是一件容易的事情。所以, 这方面研究的一个主要问题是: 哪些图是 queens-图?

文献[3]给出了下面两个引理:

引理 1^[3] 图 G 是 queens-图当且仅当它的点可以对应坐标 (i, j) , 并且两个不同的点 (i, j) 和 (k, l) 邻接当且仅当① $i=k$, 或② $j=l$, 或③ $i+j=k+l$, 或④ $i-j=k-l$ 。

引理 2^[3] 如果图 G 是 queens-图, 那么 G 不包含导出子图 $K_{1,5}$ 。

引理 1 给出的 4 个条件, 依次分别指的是两个点在同一行、列、主对角线和斜对角线上, 用于 queens-图的验证和判断。引理 2 给出的 queens-图的必要条件是基于一矩阵只有 4 条“线”, 它在判断一个图不是 queens-图时, 非常有用。

确定一个图 G 是否为 queens-图, 就是构造对应的 $(0, 1)$ -矩阵 A , 也就是确定 1 的位置, 或者说是 1 的坐标 (i, j) , 而 1 的位置就是图 G 的点的位置, 所以, 图 G 是否为 queens-图, 就是看能否构造满足定义或者说满足引理 1 要求的点的坐标 (i, j) 。

另外, 如果 queens-图 G 对应的 $(0, 1)$ -矩阵为 A , 那么 A 的转置矩阵 A^T 对应的 queens-图仍然是 G 。

悬挂边是度为 1 的点所关联的边。我们注意到, 去掉一个 queens-图的悬挂点, 就相当于在其对应的

收稿日期: 2011-07-10

作者简介: 邓毅雄(1963—), 男, 教授, 研究方向为图论与组合优化、Rough 集与数据挖掘。

(0,1)-矩阵中把该悬挂点所对应的元素“1”改为元素“0”,而这不会影响其它的元素。特别由于它是悬挂点,这个元素的改变,不会影响其它点的结构关系,所以我们有:

引理3 如果 G 是 queens-图,那么去掉 G 的若干悬挂点所得之子图仍然是 queens-图。

易知:

引理4 完全图 K_n 、圈 C_n 是 queens-图。

定义 图 G 的 r -正则冠图 $I_r(G)$ 是指在 G 的每个点上都粘接 r 条悬挂边所得之图,而图 G 的 r -弱冠图 $I_r(G)$ 是指在 G 的每个点上至多粘接 r 条悬挂边所得之图。图 G 的 1-正则冠图称为王冠图,记为 $I(G)$ 。

当 $G=K_n$ 时,称 $I_r(K_n)$ 为完全 r -冠图;而当 $G=C_n$ 时,称 $I_r(C_n)$ 为 r -皇冠图,记为 $C_n \odot rK_1$ 。

2 主要结论

根据引理3,易于得到:

定理1 如果冠图 $I_r(G)$ 是 queens-图,那么图 G 也是 queens-图。

由定理1引出问题:如果图 G 也是 queens-图,那么冠图 $I_r(G)$ 是 queens-图吗?显然,一般情况下并不是这样的,这个命题一般是不成立的。下面的定理2给出了一个必要条件,定理3和定理4给出了两类满足这个问题的图。

所谓零图是没有边的图。注意到,当 $r \geq 4$ 时,如果 G 不是零图,冠图 $I_r(G)$ 含有导出子图 $K_{1,5}$,结合引理2,有

定理2 当 G 不是零图时,如果冠图 $I_r(G)$ 是 queens-图,那么 $r \leq 3$ 。

定理3 完全 r -冠图 $I_r(K_n)$ 是 queens-图当且仅当 $r = 1, 2, 3$ 。

证明 设 $V(K_n) = \{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\}$, 与 $u_i (i=0, 1, \dots, n-1)$ 邻接的 r 个悬挂点为 $w_{ij} (j=0, 1, \dots, r-1)$ 。

首先, $r \leq 3$ 是 $I_r(G)$ 是 queens-图的必要性由定理1获知。其次,我们证明当 $r=3$ 时,完全 r -冠图 $I_r(K_n)$ 是 queens-图。事实上,令各点的坐标分别为

$$\begin{aligned} u_i &= (0, 3i) \quad (i=0, 1, \dots, n-1), \\ w_{i0} &= (4i+1, -i-1) \quad (i=0, 1, \dots, n-1), \\ w_{i1} &= (5n+4i-2, 3i) \quad (i=0, 1, \dots, n-1), \\ w_{i2} &= (9n+2i-5, 9n+5i-5) \quad (i=0, 1, \dots, n-1). \end{aligned}$$

首先, $u_i (i=0, 1, \dots, n-1)$ 的横坐标均为0,他们相互邻接构成 K_n 。

注意到,对 u_i 与 w_{i0} , 它们的横坐标与纵坐标之和为 $0+(3i+1)=(4i+1)+(-i-1)$, 则 u_i 与 w_{i0} 邻接;对 u_i 与 w_{i1} , 它们的纵坐标均为 $3i$, 则 u_i 与 w_{i1} 邻接;对 u_i 与 w_{i2} , 它们的横坐标减纵坐标为 $0-3i=(9n+2i-5)-(9n+5i-5)$, 则 u_i 与 w_{i2} 邻接。

另外,注意到 $0 \leq i \leq n-1$, w_{i0} 、 w_{i1} 、 w_{i2} 之间横坐标、纵坐标,以及横坐标与纵坐标之和分别均不相同,并且 w_{i0} 、 w_{i1} 、 w_{i2} 的横坐标减纵坐标分别为 $5i+2$ 、 $5n+i-2$ 、 $-3i (i=0, 1, \dots, n-1)$, 这3组数据之间相互不可能存在相等的情况,根据引理1, w_{i0} 、 w_{i1} 、 w_{i2} 互不邻接;很容易验证,当 $j \neq i$ 时, w_{i0} 、 w_{i1} 、 w_{i2} 与 u_j 也均不邻接。

综上,完全 3-冠图 $I_3(K_n)$ 是如上 $\{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\} \cup \{w_{ij} | i=0, 1, \dots, n-1, j=0, 1, 2\}$ 坐标对应的 queens-图。

最后,由引理3,我们从完全 3-冠图 $I_3(K_n)$ 是 queens-图,立即得到完全 2-冠图 $I_2(K_n)$ 和完全 1-冠图 $I_1(K_n)$ 都是 queens-图。

由引理3和定理3,得

推论1 当 $r \leq 3$ 时,完全 r -弱冠图是queens-图。

定理4 皇冠图 $C_n \odot rK_1$ 是queens-图当且仅当 $r=1$ 或 $r=2$ 。

证明 首先我们注意到,当 $r > 2$ 时, $C_n \odot rK_1$ 含有导出子图 $K_{1,5}$,根据引理2, $C_n \odot rK_1$ 不是queens-图。

类似于定理3的证明,我们只要证明 $C_n \odot rK_1$ 是queens-图即可。

设 $V(C_n) = \{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\}$, 与 $u_i (i=0, 1, \dots, n-1)$ 邻接的2个悬挂点为 $w_{ij} (j=0, 1)$, 而 $C_n \odot 2K_1$ 的各点的坐标定义如下:

情形1 当 $n=2k$ 时,

$$u_{2i} = (i, 3i) \quad (i=0, 1, \dots, k-1),$$

$$u_{2i+1} = (i+1, 3i+1) \quad (i=0, 1, \dots, k-2),$$

$$u_{2k-1} = (0, 4k-4);$$

$$w_{2i,0} = (4k+5i-3, 3i) \quad (i=0, 1, \dots, k-1),$$

$$w_{2i+1,0} = (4k+5i-1, 3i+1) \quad (i=0, 1, \dots, k-2),$$

$$w_{2k-1,0} = (10k-8, 4k-4);$$

$$w_{i,1} = (-4k-i+3, 4k+3i-3) \quad (i=0, 1, \dots, 2k-3),$$

$$w_{2k-2,1} = (10k-7, 12k-9), w_{2k-1,1} = (10k-6, 14k-10)。$$

情形2 当 $n=2k+1$ 时,

$$u_{2i} = (i, 3i) \quad (i=0, 1, \dots, k-1),$$

$$u_{2i+1} = (i+1, 3i+1) \quad (i=0, 1, \dots, k-1),$$

$$u_{2k} = (0, 4k-2);$$

$$w_{2i,0} = (4k+5i-1, 3i) \quad (i=0, 1, \dots, k-1),$$

$$w_{2i+1,0} = (4k+5i+1, 3i+1) \quad (i=0, 1, \dots, k-1),$$

$$w_{2k,0} = (10k+1, 4k-2);$$

$$w_{i,1} = (-4k-i+1, 4k+3i-1) \quad (i=0, 1, \dots, 2k-2);$$

$$w_{2k-1,1} = (10k+2, 12k), w_{2k,1} = (10k+3, 14k+1)。$$

下面验证情形1给出的坐标按照定义得到的queens-图恰好就是图 $C_n \odot 2K_1$ 。

首先,对于 u_{2i} 与 $u_{2i+1} (i=0, 1, \dots, k-2)$, 由于 $i-3i=(i+1)-(3i+1)$, 所以点 u_{2i} 与 $u_{2i+1} (i=0, 1, \dots, k-2)$ 邻接; 由于 $(k-1)+(3k-3)=0+(4k-4)$, 所以 u_{2k-2} 与 u_{2k-1} 邻接; 而 u_0 与 u_{2n-1} 的横坐标均为0, 所以 u_0 与 u_{2n-1} 邻接, 故 $u_i (i=0, 1, \dots, 2k-1)$ 恰构成圈 C_n 。

由于 u_i 和 $w_{j0} (i=0, 1, \dots, 2k-1)$ 的纵坐标对应分别相同, 所以 u_i 与 w_{j0} 邻接; 且容易验证, 当 $i \neq j (i, j=0, 1, \dots, 2k-1)$ 时, u_i 与 w_{j0} 不邻接。

注意到, 由 $w_{i1}, u_i (i=0, 1, \dots, 2k-3)$ 的横坐标与纵坐标之和相同, 即 $(-4k-i+3)+(4k+3i-3)=2i$, 所以 w_{i1} 与 u_i 邻接; 而 u_{2k-2} 与 $w_{2k-2,1}$ 各自的横坐标与纵坐标之差均为 $-2k+2$, u_{2k-1} 与 $w_{2k-1,1}$ 各自的横坐标与纵坐标之差均为 $-4k-4$, 所以 u_{2k-2} 与 $w_{2k-2,1}$, u_{2k-1} 与 $w_{2k-1,1}$ 分别邻接; 且容易验证, 当 $i \neq j (i, j=0, 1, \dots, 2k-1)$ 时, u_i 与 w_{j1} 不邻接。

同样根据引理1, 可以证明 $w_{i0}, w_{i1} (i=0, 1, \dots, 2k-1)$ 均不相互邻接。

类似可以验证情形2。

综上, $C_n \odot 2K_1$ 是queens-图。

由引理3和定理4, 得:

推论2 当 $r=1$ 或 $r=2$, 皇冠图 $C_n \odot rK_1$ 的弱冠图是 queens-图。

参考文献:

- [1] HARARY F. Graph theory[M]. New York: Addison Wesley, Publishing Company, 1969: 1-274.
- [2] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory with application[M]. New York: Elsevier Science Publishing Company, 1976: 1-65.
- [3] BEINEKE L W, BROERE I, HENNING M A. Queens graphs[J]. Discrete Mathematics, 1999, 206(1-3): 63-75.
- [4] 邓毅雄, 熊金泉, 等. 关于 Queens-图的若干结果[J]. 华东交通大学学报, 2003, 20(1): 82-85.
- [5] 邓毅雄, 周尚超, 等. Queens-图的构造[J]. 华东交通大学学报, 2004, 21(4): 119-121.
- [6] GALLIAN J A. A survey: recent results, conjectures, and open problems in labeling graphs[J]. Graph Theory, 1989, 13(4): 491-504.
- [7] 胡红亮. 图 C_n 及其 r -冠的新的优美标号[J]. 纯粹数学与应用数学, 2010, 26(6): 454-457.
- [8] 斯琴巴特尔, 等. 关于皇冠 Q_n 调和的相关性质[J]. 大学数学, 2010, 26(12): 71-75.

Some Results on Crown Graphs and Queens Graphs

Deng Yixiong

(School of Software, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: According to the concept of queens graphs, the queens graph of a $(0, 1)$ -matrix A is the graph whose vertices correspond to the 1's in A and in which two vertices are adjacent if and only if some diagonal or line of A contains the corresponding 1's. A basic question is the determination of which graphs are queens graphs. This paper shows two classes crown graphs that is queens graphs.

Key words: graph; $(0, 1)$ -matrix; queens graphs; crown graphs