

文章编号:1005-0523(2011)06-0053-10

最小方差控制中的最优输入信号设计

王建宏

(景德镇陶瓷学院机电学院,江西 景德镇 333403)

摘要:为研究最小方差控制中的最优输入信号设计问题,推导了最小方差控制器与闭环反馈结构中对象模型、噪声模型之间的关系。基于闭环反馈系统中频响函数估计的渐近分析,考虑系统对象模型、噪声模型和控制器三者之间的摄动性。分别采用输出端误差平方的均值、输入端误差平方的均值和输出端估计值平方的均值作为评价性能指标函数,推导三种情况下最优输入信号设计问题对应的约束优化问题。通过求解对应的约束优化问题,得到三种情况下最优输入信号的功率谱密度表达式。最后用仿真算例验证本文方法的有效性和可行性。

关键词:最小方差控制;最优输入信号;性能函数

中图分类号:TP273

文献标识码:A

最小方差控制是隶属于自适应控制中的一种基本控制策略,同时也是一最为简单的闭环反馈控制,其在某些工业过程中仍有较大的实用价值。最小方差控制的目的在于使得闭环反馈系统的输出方差值最小,所以该控制策略可用来作为衡量闭环反馈系统的外部干扰噪声对闭环反馈系统的影响大小。在自适应控制理论中,通常是假设开环或闭环系统的外部激励输入信号是持续充分激励的,在此假设条件下设计控制器并对所得的控制器进行分析。而持续激励的输入信号应该如何选取在自适应控制中却并未涉及太多内容。通常在最小方差闭环控制结构中包括3类模型:系统对象模型、对外部干扰噪声的滤波模型或简称为噪声模型及处于闭环反馈通道中的控制器模型。此控制器模型的设计要依赖于前向通道中的系统对象模型和噪声模型的真实数学表达式,因此最小方差控制是一种基于模型的控制策略。

最优输入信号的选取设计是系统辨识中的重要步骤,辨识试验条件的选取,如用于激励系统的参考输入信号,对辨识得到的模型精确度有很大的影响。文献[1]采用有限正交基函数作为模型的表示方法,去评价模型的指标为输入端误差平方的均值。文献[3]根据渐近方差理论设计了开环测试信号;文献[4]根据方差渐近理论推导出最优试验条件,给出了输入信号的功率谱密度和闭环最优控制器;文献[5]根据闭环系统中频域响应估计的渐近方差结果表达式推导了内模控制的最优输入信号设计。文献[6]从鲁棒控制出发,基于未知但有界的参数矢量,提出采用最坏情况下的距离函数作为最优输入信号设计中的衡量指标。通常所采用的指标函数都可以利用系统辨识中的渐近方差结构表达式来简化或分解,以得到仅关于输入功率谱为自变量的函数。对应的约束条件常常选择为关于闭环系统中输入和输出功率谱的限制条件。从而整个最优输入信号设计最优化问题可转化为一关于输入功率谱的优化问题。文献[7]把若干关于输入功率谱的约束条件全部用线性矩阵不等式的形式来表示,通过合适地选取一个切平面来求解优化问题的最优解。若交换上述优化问题中的目标函数和约束条件,即把关于输入功率谱的某个积分作为优化目标函数,而限制某个以功率谱为自变量的函数要远远小于某个事先已知的小数作为约束条件,此时得到的最优化问题在文献[10]中称之为最小代价的辨识试验。文献[8]根据输入功率谱的原始定义,把输入功率谱进行分解成较简单的连加形式,从而也把目标函数进行了利于计算的求和形式。文献[2]在概率框

收稿日期:2011-10-20

作者简介:王建宏(1980—),男,副教授,博士,研究方向为系统辨识和凸优化。

架体系下分析了频响函数估计的渐近方差,文献[9]在文献[2]的基础上,分析了当系统的全部极点已知时,利用一组由正交基定义的生成核来代替原渐近方差式中的模型阶数,可得到一较为准确的渐近方差公式。文献[11]在文献[2]的基础上,通过定义在预测误差梯度所张成的子空间中的一组正交基,并引入一个辅助函数,可将原渐近方差改为一辅助函数在预测误差梯度所张成的子空间上的正交投影,从而可直接利用线性代数中的运算法则来分析当增加参数或增加传感器时对参数估计精度的影响程度。

因文献[1]中采用的是一种最为经典的辨识方法——最小二乘法来辨识其未知参数,并且文献[1]在多处为了能够直接分析,进行了较多的省略或不考虑。如输出表达式的简化和频域优化目标函数中首项的忽略。为了改进和完善最小方差控制中的最优输入信号设计,基于最小方差控制器的显式表达式,可将闭环反馈控制系统中相关的渐近方差结果进行简化。利用简化后的渐近方差结果对最小方差闭环控制的外部激励输入信号进行设计,以得到满足期望要求的输入功率谱的具体表达式要求。在最优输入信号设计中分别采用闭环输出端误差平方的均值、系统对象的输入端误差平方的均值和仅闭环输出端平方的均值作为评价性能指标。在此3个评价性能指标中同时考虑系统对象模型和噪声模型的不确定性因素,推导3种不同评价性能指标下的闭环输入功率谱的表达式。从而将最小方差控制中的最优输入信号设计问题表示成带有约束条件的最优化问题。通过推导和计算发现:当选择系统对象的输出端估计信号平方的均值作为评价性能指标时,该最优化问题将会等价于采用闭环输出端误差平方的均值时的输入信号设计问题。

1 最小方差控制描述

包含系统对象模型、噪声模型及闭环反馈控制器的最小方差控制器设计的结构见图1所示。其中: $r(t)$ 表示闭环系统的外部激励输入信号; $u(t)$ 表示系统对象 $G(q)$ 的输入端信号;且 $G(q)$ 为一稳定的真实对象的传递函数。 $y(t)$ 为整个闭环系统的输出端信号; $e(t)$ 表示外部干扰噪声,此处可假设 $e(t)$ 为一方差为 λ ,均值为0的白噪声。 $v(t)$ 表示对外部的干扰噪声 $e(t)$ 滤波后的信号,它以加性的形式出现在闭环系统中。 $H(q)$ 表示对 $e(t)$ 实施滤波的噪声函数; $H(q)$ 常设为一稳定的最小相位滤波器。 $K(q)$ 表示闭环负反馈中的控制器; q 表示移位算子有 $q^{-1}u(t)=u(t-1)$ 。根据图1所示的最小方差控制结构框图,其对应的闭环输出响应 $y(t)$ 和输入信号 $u(t)$ 的表达式可计算如下

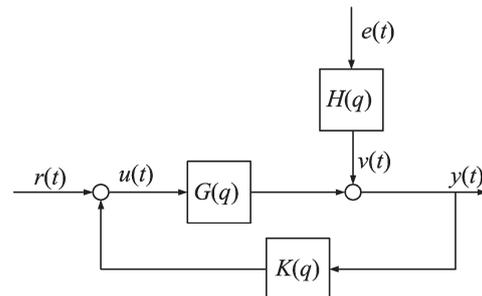


图1 最小方差控制结构框图
Fig.1 Structure diagram of minimum variance control

消去中间变量可得

$$\begin{cases} y(t) = G(q)u(t) + H(q)e(t) \\ u(t) = r(t) - K(q)y(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(t) = \frac{G(q)}{1 + G(q)K(q)}r(t) + \frac{H(q)}{1 + G(q)K(q)}e(t) \\ u(t) = \frac{1}{1 + G(q)K(q)}r(t) - \frac{H(q)K(q)}{1 + G(q)K(q)}e(t) \end{cases} \quad (1)$$

当没有外部激励输入信号 $r(t)$ 时,闭环系统的输出响应 $y(t)$ 恰好就等于外部的干扰噪声 $e(t)$ 。因此最小方差控制器 $K(q)$ 的求取可在(1)式中令

$$r(t) = 0, \quad y(t) = e(t)$$

即取

$$\frac{H(q)}{1+G(q)K(q)}=1$$

从而可得最小方差控制器为

$$K(q)=\frac{H(q)-1}{G(q)} \quad (2)$$

由上式可见:最小方差控制器 $K(q)$ 是紧紧依赖于对象模型 $G(q)$ 和噪声模型 $H(q)$ 。设真实模型对应的系统和最小方差控制器记为

$$\begin{cases} y(t)=\frac{G_0}{1+G_0K_0}r(t)+\frac{H_0}{1+G_0K_0}e(t)=\frac{G_0}{H_0}r(t)+e(t) \\ u(t)=\frac{1}{G_0K_0}r(t)-\frac{H_0K_0}{G_0K_0}e(t)=\frac{1}{H_0}r(t)-\frac{H_0^2-1}{G_0H_0}e(t) \\ K_0=\frac{H_0-1}{G_0} \end{cases} \quad (3)$$

参数化两模型对应的系统和参数化的最小方差控制器分别记为

$$\begin{cases} y(t)=\frac{G(\theta)}{H(\theta)}r(t)+e(t) \\ u(t)=\frac{1}{H(\theta)}r(t)-\frac{H^2(\theta)-1}{G(\theta)H(\theta)}e(t) \\ K(\theta)=\frac{H(\theta)-1}{G(\theta)} \end{cases} \quad (4)$$

θ 表示未知的参数矢量,其由对象模型 $G(\theta)$ 和噪声模型 $H(\theta)$ 中所有的未知参数构成。为了更好地便于最优输入信号设计中优化问题的简化及展开,以下给出在最小方差控制器(2)式的前提下,对闭环系统中的渐近方差分析结果进行简化,即用(2)式来全部替换渐近方差表达式中的控制器。

2 最小方差闭环控制下的渐近方差分析

给定一组关于系统对象模型的输入-输出观测数据:

$$Z^N=\{u(1) \quad y(1) \quad \cdots \quad u(N) \quad y(N)\}$$

参数化系统对象模型得到对应的参数化模型为

$$y(t)=G(q, \theta)u(t)+H(q, \theta)e(t) \quad (5)$$

式中的未知参数矢量 θ 可通过递推最小二乘辨识方法来进行估计。系统对象和噪声模型的频域响应可表示为

$$\mathbf{T}(e^{j\omega})=\begin{bmatrix} G(e^{j\omega}) \\ H(e^{j\omega}) \end{bmatrix}$$

而对应的辨识模型的频域响应可表示为

$$\hat{\mathbf{T}}(e^{j\omega}, \theta)=\begin{bmatrix} \hat{G}(e^{j\omega}, \theta) \\ \hat{H}(e^{j\omega}, \theta) \end{bmatrix}$$

当假设试验信号在 $[0, \pi]$ 中具有连续的功率谱,并且可采集到的输入-输出观测数据个数 N 趋于无穷时,有如下的趋近式成立:

$$\hat{T}(e^{jw}, \theta) \rightarrow T(e^{jw}), N \rightarrow +\infty$$

$\hat{T}(e^{jw}, \theta)$ 的误差服从高斯分布, 其对应方差矩阵为

$$\text{cov}[\hat{T}(e^{jw}, \theta)] \approx \frac{n}{N} \phi_v(w) \begin{bmatrix} \phi_u(w) & \phi_{ue}(w) \\ \phi_{eu}(w) & \lambda \end{bmatrix}^{-1} \quad (6)$$

上式中的 $\phi_u(w)$ 表示系统对象输入信号的功率谱, 最优输入信号设计问题就是要求解出最优 $\phi_u(w)$ 的表达式; $\phi_{ue}(w)$ 表示输入与白噪声之间的互谱; $\phi_v(w)$ 表示外部扰动的功率谱; n 表示辨识模型的阶数; N 表示观测数据的个数。

在反馈控制作用下, 输入 u 可表示为

$$u = r - Ky = \frac{1}{1+GK} r - \frac{HK}{1+GK} e = Sr - HKSe \quad (7)$$

其中的 $S(q)$ 表示灵敏度函数, 定义为

$$S(q) = \frac{1}{1+G(q)K(q)}$$

当试验信号 r 与白噪声 e 不相关时, 根据(7)式可将输入 u 的功率谱分解为两部分

$$\phi_u(w) = \phi_u^r(w) + \phi_u^e(w) = |S|^2 \phi_r(w) + |K|^2 |S|^2 |H|^2 \lambda \quad (8)$$

式中的第1项来源于 r , 第2项来源于 e , 利用关系式 $\phi_v(w) = |H|^2 \lambda$ 可得

$$\phi_{ue}(w) = -\frac{HK}{1+GK} \lambda = -HK S \lambda \quad (9)$$

将(8)式和(9)式同时代入到方差矩阵(6)式中可得

$$\text{cov}[\hat{T}(e^{jw}, \theta)] \approx \frac{n}{N} \phi_v(w) \begin{bmatrix} \phi_u(w) & \phi_{ue}(w) \\ \phi_{eu}(w) & \lambda \end{bmatrix}^{-1} = \frac{n}{N} \frac{|H|^2 \lambda}{|S|^2 \phi_r} \begin{bmatrix} \lambda & HK S \lambda \\ HK S \lambda & |S|^2 \phi_r(w) + |K|^2 |S|^2 |H|^2 \lambda \end{bmatrix} \quad (10)$$

展开可得系统对象模型的方差为

$$\text{var}[\hat{G}(e^{jw}, \theta)] \approx \frac{n}{N} \frac{|H|^2 \lambda}{|S|^2 \phi_r} = \frac{n}{N} \frac{\phi_v}{|S|^2 \phi_r} \quad (11)$$

噪声模型的方差为

$$\text{var}[\hat{H}(e^{jw}, \theta)] \approx \frac{n}{N} \left[|H(e^{jw})|^2 + \frac{\phi_v |K|^2 |S|^2 |H|^2}{|S|^2 \phi_r} \right] \quad (12)$$

根据输出响应 y 的关系式

$$y = \frac{G}{1+GK} r + \frac{H}{1+GK} e = GSr + HSe$$

可得到输出功率谱为

$$\phi_y(w) = |G|^2 |S|^2 \phi_r(w) + |S|^2 |H|^2 \lambda \quad (13)$$

利用(2)式定义的最小方差控制器计算如下各量

$$S = \frac{1}{1+GK} = \frac{1}{1+G \frac{H-1}{G}} = \frac{1}{H}$$

$$HKS = H \frac{H-1}{G} \frac{1}{H} = \frac{H-1}{G}$$

将上式代入到(10)式中可得

$$\text{cov}[\hat{T}(e^{jw}, \theta)] \approx \frac{n}{N} \phi_v(w) \begin{bmatrix} \phi_u(w) & \phi_{ue}(w) \\ \phi_{eu}(w) & \lambda \end{bmatrix}^{-1} = \frac{n}{N} \frac{|H|^4}{\phi_r} \begin{bmatrix} \lambda & \frac{H-1}{G} \lambda \\ \frac{H-1}{G} \lambda & \frac{1}{|H|^2} \phi_r(w) + \left| \frac{H-1}{G} \right|^2 \lambda \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$u(t) = \frac{1}{H} r(t) - \frac{H-1}{G} e(t) \quad (15)$$

$$\phi_u(w) = \frac{1}{|H|^2} \phi_r(w) + \left| \frac{H-1}{G} \right|^2 \lambda$$

$$y = \frac{G}{H} r + e, \quad \phi_y(w) = \frac{|G|^2}{|H|^2} \phi_r(w) + \lambda \quad (16)$$

3 最小方差控制中的最优输入信号设计

系统对象模型和噪声模型对应的参数化估计模型,分别记为 $\hat{G}(\theta)$ 和 $\hat{H}(\theta)$ 。利用最小方差控制器的求解关系(2)式,可得到对应的参数化最小方差控制器 $\hat{K}(\theta)$ 为

$$\hat{K}(\theta) = \frac{\hat{H}(\theta) - 1}{\hat{G}(\theta)}$$

最小方差控制器 \hat{K} 是 \hat{G} 和 \hat{H} 的函数,即可表示为

$$\hat{K} = K(\hat{G}, \hat{H})$$

根据(15)式和(16)式分别列写成闭环系统输出响应的真实值和基于参数矢量的估计值

$$y(t) = \frac{G}{H} r(t) + e(t) \quad (17)$$

$$\hat{y}(t) = \frac{\hat{G}}{\hat{H}} r(t) + e(t)$$

同样列写出闭环系统中关于系统对象模型输入端信号的真实值和基于参数矢量的估计值

$$u(t) = \frac{1}{H} r(t) - \frac{H-1}{G} e(t) \quad (18)$$

$$\hat{u}(t) = \frac{1}{\hat{H}} r(t) - \frac{\hat{H}-1}{\hat{G}} e(t)$$

假设估计值 \hat{G} 和 \hat{H} 充分接近于其各自的真值 G 和 H ,接近的含义表明估计值与真值之间仍然存在一定的摄动。为此记

$$\hat{G} = G + \Delta G, \quad \hat{H} = H + \Delta H \quad (19)$$

以下分3种不同的性能指标来分别考虑各自的闭环最优输入信号设计问题。

3.1 选择输出端误差平方的均值为性能指标

在这种情况下需要使得 $E\{\|y(t) - \hat{y}(t)\|_2^2\}$ 尽可能小,由(17)式可得

$$y(t) - \hat{y}(t) = \left(\frac{G}{H} - \frac{\hat{G}}{\hat{H}} \right) r(t) \approx \frac{1}{H^2} [-H \quad G] \begin{bmatrix} \Delta G \\ \Delta H \end{bmatrix} r(t) \quad (20)$$

其中使用了近似公式

$$\frac{1}{H + \Delta H} \approx \frac{1}{H} - \frac{\Delta H}{H^2}$$

从而输出端误差平方的均值为

$$E\{\|y(t) - \hat{y}(t)\|_2^2\} = E\left\{ \left\| \frac{1}{H^2} [-H \quad G] \begin{bmatrix} \Delta G \\ \Delta H \end{bmatrix} r(t) \right\|_2^2 \right\}$$

继续对上式进行计算并且使用巴塞伐尔定理可得

$$E\left\{\|y(t) - \hat{y}(t)\|_2^2\right\} = E\left\{\frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{H^4} [-H \ G] \begin{bmatrix} \Delta G \\ \Delta H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta G & \Delta H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -H \\ G \end{bmatrix} \phi_{r_c}\right\} \\ = \frac{1}{2\pi} \int \frac{n}{N\phi_r} [-H \ G] \begin{bmatrix} \lambda & \frac{H-1}{G}\lambda \\ \frac{H-1}{G}\lambda & \frac{1}{|H|^2}\phi_r + \left|\frac{H-1}{G}\right|^2\lambda \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -H \\ G \end{bmatrix} \phi_{r_c} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{n\lambda\phi_{r_c}}{N\phi_r} + \frac{1}{2\pi} \int \frac{n}{N\phi_r} \left|\frac{G}{H}\right|^2 \phi_{r_c} \quad (21)$$

上式在运算过程中利用了(14)式,其中的 ϕ_{r_c} 表示的是应用于控制设计中的参考信号所对应的功率谱,而 ϕ_r 才是最优输入信号设计中所采用参考信号的功率谱,其作为优化问题中的优化变量。因(39)式的第2项中不包含有输入信号的功率谱 ϕ_r ,所以仅考虑第1项的最小化运算,取

$$J_1(\phi_r) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{n\lambda\phi_{r_c}}{N\phi_r} \quad (22)$$

因最优输入信号设计的目的是要设计出最优的 ϕ_r ,以使得最小化 $E\left\{\|y(t) - y_0(t)\|_2^2\right\}$,同时有必要满足输入信号能量有限或输出信号能量有限。即概括为如下的定理1和定理2。

定理1 最小方差闭环系统中最优输入信号设计问题可概括为如下的满足输入信号能量有限约束条件的最优化问题

$$\begin{cases} \min_{\phi_r} J_1(\phi_r) = \min_{\phi_r} \frac{1}{2\pi} \int \frac{n\lambda\phi_{r_c}}{N\phi_r} \\ \text{subject to } \int \phi_u = \int \left[\frac{1}{H^2} \phi_r + \left| \frac{H-1}{G} \right|^2 \lambda \right] \leq L \end{cases} \quad (23)$$

最优输入信号的功率谱形式为

$$\phi_r^{opt}(e^{j\omega}) = \mu_1 H \sqrt{\frac{n\lambda\phi_{r_c}}{2\pi N}} \quad (24)$$

其中的 μ_1 需满足如下的等式成立

$$\mu_1 = \frac{L - 2\pi \left| \frac{H-1}{G} \right|^2 \lambda}{\frac{1}{H} \int \sqrt{\frac{n\lambda\phi_{r_c}}{2\pi N}}} \quad (25)$$

同理可以推导出当输出信号能量受限时最优输入信号的功率谱密度形式。

定理2 满足输出信号能量有限时的最优化问题描述为

$$\begin{cases} \min_{\phi_r} J_1(\phi_r) = \min_{\phi_r} \frac{1}{2\pi} \int \frac{n\lambda\phi_{r_c}}{N\phi_r} \\ \text{subject to } \int \phi_y = \int \left[\left| \frac{G}{H} \right|^2 \phi_r + \lambda \right] \leq L \end{cases} \quad (26)$$

最优输入信号的功率谱形式为

$$\phi_r^{opt}(e^{j\omega}) = \mu_2 \sqrt{\frac{n\lambda\phi_{r_c}}{2\pi N}} \quad (27)$$

其中的 μ_2 需满足如下的等式成立

$$\mu_2 = \frac{\left| \frac{H}{G} \right|^2 (L - 2\pi\lambda)\lambda}{\int \sqrt{\frac{n\lambda\phi_{r_c}}{2\pi N}}} \quad (28)$$

3.2 选择输入端误差平方的均值为性能指标

在这种情况下需要使得 $E\{\|u(t) - \hat{u}(t)\|_2^2\}$ 尽可能小,由(18)式可得

$$u(t) - \hat{u}(t) = \left(\frac{1}{H} - \frac{1}{H + \Delta H} \right) r(t) - \left(\frac{H-1}{G} - \frac{H + \Delta H - 1}{G + \Delta G} \right) e(t)$$

通过以下的近似公式计算有

$$\frac{1}{H} - \frac{1}{H + \Delta H} \approx \frac{1}{H} - \frac{1}{H} + \frac{1}{H^2} \Delta H = \frac{1}{H^2} \Delta H$$

$$\frac{H-1}{G} - \frac{H + \Delta H - 1}{G + \Delta G} \approx \begin{bmatrix} \frac{H-1}{G^2} & -\frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta G \\ \Delta H \end{bmatrix}$$

$$u(t) - \hat{u}(t) = \frac{1}{H^2} [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \Delta G \\ \Delta H \end{bmatrix} r(t) - \begin{bmatrix} \frac{H-1}{G^2} & -\frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta G \\ \Delta H \end{bmatrix} e(t)$$

同样由巴塞伐尔定理可得

$$E\{\|u(t) - \hat{u}(t)\|_2^2\} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{H^4} [0 \quad 1] \text{cov}[\hat{T}(\theta)] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \phi_{r_c} + \lambda \begin{bmatrix} \frac{H-1}{G^2} & -\frac{1}{G} \end{bmatrix} \text{cov}[\hat{T}(\theta)] \begin{bmatrix} \frac{H-1}{G^2} \\ -\frac{1}{G} \end{bmatrix}$$

分别计算上式被积函数中的两项,其中的第一项整理后为

$$\frac{1}{H^4} [0 \quad 1] \text{cov}[\hat{T}(\theta)] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \phi_{r_c} = [0 \quad 1] \frac{n}{N} \frac{\phi_{r_c}}{\phi_r} \begin{bmatrix} \lambda & \frac{H-1}{G} \lambda \\ \frac{H-1}{G} \lambda & \frac{1}{|H|^2} \phi_r + \left| \frac{H-1}{G} \right|^2 \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{n}{N} \frac{1}{|H|^2} \phi_{r_c} + \frac{n\lambda}{N} \left| \frac{H-1}{G} \right|^2 \frac{\phi_{r_c}}{\phi_r}$$

上式中的第一项不包含有输入信号的功率谱 ϕ_r ,在优化问题中可舍去。被积函数中的第二项整理后得

$$\begin{bmatrix} \frac{H-1}{G^2} & -\frac{1}{G} \end{bmatrix} \text{cov}[\hat{T}(\theta)] \begin{bmatrix} \frac{H-1}{G^2} \\ -\frac{1}{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{H-1}{G^2} & -\frac{1}{G} \end{bmatrix} \frac{n}{N} \frac{|H|^4}{\phi_r} \begin{bmatrix} \lambda & \frac{H-1}{G} \lambda \\ \frac{H-1}{G} \lambda & \frac{1}{|H|^2} \phi_r + \left| \frac{H-1}{G} \right|^2 \lambda \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{H-1}{G^2} \\ -\frac{1}{G} \end{bmatrix} = \frac{n}{N} \frac{|H|^4}{|GH|^2} = \frac{n}{N} \frac{|H|^2}{|G|^2}$$

从上式可发现被积函数中的整个第二项都可以忽略。取

$$J_2(\phi_r) = \frac{n\lambda}{2\pi N} \int \left| \frac{H-1}{G} \right|^2 \frac{\phi_{r_c}}{\phi_r} \quad (29)$$

因此当选择输入端误差平方的均值作为性能指标函数时的最优输入信号设计问题可概括为如下的定理3和定理4。

定理3 满足输入信号能量有限约束条件的最优化问题可描述如下

$$\begin{cases} \min_{\phi_r} J_2(\phi_r) = \min_{\phi_r} \frac{n\lambda}{2\pi N} \int \left| \frac{H-1}{G} \right|^2 \frac{\phi_{r_c}}{\phi_r} \\ \text{subject to } \int \phi_u = \int \left[\frac{1}{H^2} \phi_r + \left| \frac{H-1}{G} \right|^2 \lambda \right] \leq L \end{cases} \quad (30)$$

最优输入信号的功率谱形式为

$$\phi_r^{opt}(e^{j\omega}) = \mu_3 H \sqrt{\frac{n\lambda}{2\pi N} \left| \frac{H-1}{G} \right|^2} \phi_{r_c} \quad (31)$$

其中的 μ_3 需满足如下的等式成立

$$\mu_3 = \frac{L - 2\pi \left| \frac{H-1}{G} \right|^2 \lambda}{\frac{1}{H} \int \sqrt{\frac{n\lambda}{2\pi N} \left| \frac{H-1}{G} \right|^2} \phi_{r_c}} \quad (32)$$

同理可以推导出当输出信号能量受限时最优输入信号的功率谱密度形式。

定理 4 满足输出信号能量有限时的最优化问题描述为

$$\begin{cases} \min_{\phi_r} J_2(\phi_r) = \min_{\phi_r} \frac{n\lambda}{2\pi N} \int \left| \frac{H-1}{G} \right|^2 \phi_{r_c} \\ \text{subject to } \int \phi_y = \int \left[\left| \frac{G}{H} \right|^2 \phi_r + \lambda \right] \leq L \end{cases} \quad (33)$$

最优输入信号的功率谱形式为

$$\phi_r^{opt}(e^{j\omega}) = \mu_4 \sqrt{\frac{n\lambda}{2\pi N} \left| \frac{H-1}{G} \right|^2} \phi_{r_c} \quad (34)$$

其中的 μ_4 需满足如下的等式成立

$$\mu_4 = \frac{\left| \frac{H}{G} \right|^2 (L - 2\pi\lambda)}{\int \sqrt{\frac{n\lambda}{2\pi N} \left| \frac{H-1}{G} \right|^2} \phi_{r_c}} \quad (35)$$

3.3 选择输出端估计值平方的均值为性能指标

该性能指标是用来反映最小方差控制跟踪外部干扰白噪声的目的。在这种情况下,需要使得 $E\{\|\hat{y}(t)\|_2^2\}$ 尽可能小,由(17)式可得

$$\hat{y}(t) = \frac{G + \Delta G}{H + \Delta H} r(t) + e(t)$$

作近似运算得到

$$\frac{G + \Delta G}{H + \Delta H} \approx \frac{G}{H} + \left[\frac{1}{H} - \frac{G}{H^2} \right] \begin{bmatrix} \Delta G \\ \Delta H \end{bmatrix}$$

同样由巴塞伐尔定理可得

$$E\{\|\hat{y}(t)\|_2^2\} = \frac{1}{2\pi} \int \left| \frac{G}{H} \right|^2 \phi_{r_c} + \left[\frac{1}{H} - \frac{G}{H^2} \right] \text{cov}[\hat{T}(\theta)] \begin{bmatrix} \frac{1}{H} \\ -\frac{G}{H^2} \end{bmatrix} \phi_{r_c} + 2 \frac{G}{H} \left[\frac{1}{H} - \frac{G}{H^2} \right] E \begin{bmatrix} \Delta G \\ \Delta H \end{bmatrix} + \lambda$$

上式中的第一项和第四项都不包含有输入信号的功率谱 ϕ_r , 第三项取数学期望运算后为零。故只需计算第二项的展开式为

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{H} - \frac{G}{H^2} \right] \text{cov}[\hat{T}(\theta)] \begin{bmatrix} \frac{1}{H} \\ -\frac{G}{H^2} \end{bmatrix} \phi_{r_c} &= \left[\frac{1}{H} - \frac{G}{H^2} \right] \frac{n}{N} \frac{|H|^4}{\phi_r} \begin{bmatrix} \lambda & \frac{H-1}{G} \lambda \\ \frac{H-1}{G} \lambda & \frac{1}{|H|^2} \phi_r + \left| \frac{H-1}{G} \right|^2 \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{H} \\ -\frac{G}{H^2} \end{bmatrix} \phi_{r_c} \\ &= \frac{n\phi_{r_c}}{N} \left(\frac{\lambda}{\phi_r} + \frac{G^2}{H^2} \right) = \frac{n\lambda\phi_{r_c}}{N\phi_r} + \frac{n\phi_{r_c} G^2}{N H^2} \end{aligned}$$

同理上式中的第二项可忽略。取

$$J_3(\phi_r) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{n\lambda\phi_{r_c}}{N\phi_r} = J_1(\phi_r)$$

当选择闭环输出端估计值平方的均值作为性能指标函数时的最优输入信号设计问题等价于选择闭环输出端误差平方的均值为性能指标函数下的最优输入信号设计问题。

4 仿真算例

考虑如下的离散时间线性系统

$$y(t) = G(\theta)u(t) + H(\theta)e(t)$$

$$G(\theta) = \frac{B(\theta)}{A(\theta)}, \quad H(\theta) = \frac{C(\theta)}{A(\theta)}$$

其中的3个多项式的真实值分别为

$$A_0(q) = 1 - 1.6q^{-1} + 0.8q^{-2} - 0.64q^{-3} + 0.65q^{-4}$$

$$B_0(q) = 0.25q^{-1} + 0.12q^{-2}$$

$$C_0(q) = 1 + 0.24q^{-1} + 0.12q^{-2}$$

对于输入信号设计问题的仿真,需分以下两种情况来讨论:

1) 当选择输出端误差平方的均值为性能指标时:对于输入信号限制为二进制信号,幅值为 ± 2 ,信号长度取为10 S,采用本文的优化方法迭代的方法求解带约束的优化问题,经过20次迭代后所得的输入信号为图2所示的曲线。图3给出利用文献[1]中的方法所得到的最优输入信号曲线。由图2可见,采用本文优化方法得到的曲线恰为一个期望的二进制信号,且其幅值为 ± 2 。而图3中输入信号的幅度仅为 ± 1 ,与期望的输入信号复制存在较大的差异,其差异在于文献[1]省略了较多重要项。

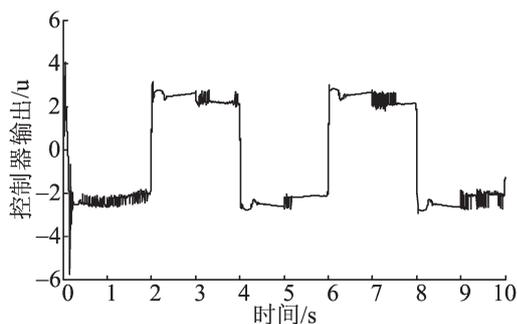


图2 最优输入信号
Fig.2 Optimal input signal

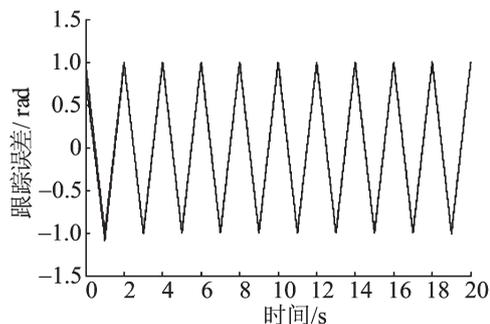


图3 采用文献1方法所得的最优输入信号
Fig.3 Optimal input signal obtained through method of literature 1

2) 当选择输入端误差平方的均值为性能指标时:

对于输入信号限制为二进制信号,幅值为 ± 2 ,信号长度取为20 s,采用本文优化迭代的方法求解带约束的优化问题,经过40次迭代后所得的输入信号为图4所示的曲线:

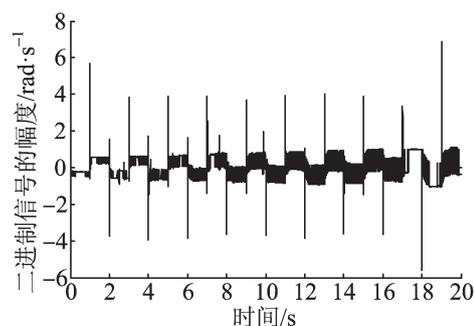


图4 最优输入信号
Fig.4 Optimal input signal

5 结语

本文研究最下方差控制中的闭环最优输入信号设计问题。对闭环系统频域响应函数估计的渐近方差矩阵进行了简化分析,将简化分析结果用于选择3种不同的性能指标函数下的最优输入信号设计问题中。利用最优化的求解方法推导了3种不同情况下最优输入信号的功率谱密度表达式。

参考文献:

- [1] 张立群,邵惠鹤. 基于最小方差控制的闭环辨识信号设计[J]. 上海交通大学学报,2004,38(10):521-523.
- [2] LJUNG L. System identification: Theory for the user[M]:Prentice Hall. 1999:441-445.
- [3] GEVERS M L. Optimal experiment designs with respect to the internal model application[J]. Automatica, 1986, 22(5): 543-555.
- [4] FORSSEL U, LJUNG, L. Some results on optimal experiment design[J]. Automatica, 2000, 36(5): 749-756.
- [5] ZHU YUCAI. BUTOYI F. Optimal closed-loop identification test design for internal model control[J]. Automatica, 2000, 36(4):1237-1241.
- [6] HILDEBRAND R. Identification for control: optimal input design with respect to a worst case gap cost function[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2003, 41(5): 1586-1608.
- [7] HILDEBRAND R. Identification for control: optimal input intended to identify a minimum variance control [J]. Automatica, 2007, 43(5): 758-767.
- [8] JANSSON H. Input design via LMIs admitting frequency wise model specifications in confidence regions[J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 2005, 50(10): 1534-1549.
- [9] HAKAN HJALMARSSON. Close loop experiment design for linear invariant dynamical systems via LMIs[J]. Automatica, 2008, 44(2):623-636.
- [10] BOMBOIS X. Least costly identification experiment for control[J]. Automatica, 2006, 42(10): 1651-1662.
- [11] MARTENSSON J. Conditions when minimum variance control is the optimal experiment for identifying a minimum variance control[J]. Automatica, 2011, 47(3): 578-583.
- [12] 窦立谦. 面向控制的迭代辨识与控制设计研究[D]. 天津:天津大学,2008:36-39.
- [13] 王建宏. 基于先进辨识的控制策略研究及其应用[D]. 南京:南京航空航天大学,2010:13-18.
- [14] 王建宏,王道波,王志胜. 多个未知时延的MISO系统的递推辨识[J]. 控制与决策, 2010, 25(1): 93-98.
- [15] 方崇智. 过程辨识[M]. 清华大学出版社,2003:192-197.

Optimal Input Signal Design for Minimum Variance Control

Wang Jianhong

(School of Mechanical and Electronic Engineering, Jingdezhen Ceramic Institute, Jingdezhen 333403, China)

Abstract: To study the problem of designing the optimal input signal in minimum variance control, the paper deduces the relationship between the system model and disturb model in the structure of the minimum variance controller and closed-loop feedback. Based on asymptotic analysis of frequency ring function estimation in the close-loop feedback system, perturbation of the relationship among system object model, noise model and the controller is considered. The average value of output error square, input error square and the output estimating value square as evaluating performance index function are adopted to deduce constraint optimization problems of the design of the optimal input signal in the three situations. By solving the corresponding constraint optimization problem, the power spectral density expression of the optimal input signal in the three situations is obtained. Finally, simulation results show the feasibility and effectiveness of the method in this paper.

Key words: minimum variance control; optimal input signal; performance function