文章编号:1005-0523(2011)06-0096-05

利用3次样条插值确定室内压缩试验先期固结压力

姬付全,经 绯,刘志彬,居 俊

(东南大学交通学院,江苏 南京 210096)

摘要:土的先期固结压力是评价天然地基土的应力历史和固结状态的一项重要指标。基于Casagrande作图,提出了利用分段3次样条插值模型来拟合e-lg p曲线的方法,并编写了模型的计算程序,旨在准确、快捷地确定地基土的先期固结压力。通过算例表明,所提出的曲线模型的拟合度比3次、4次多项式以及著名的Harris模型更高,具有一定的工程应用价值。

关键词:先期固结压力;e-lg p曲线;3次样条插值

中图分类号:TU431 **文献标志码**:A

土的先期固结压力是反映土在其沉积历史过程中所承受的最大有效应力,用于评价天然地基土的应力历史和固结状态,也是考虑土的应力历史进行沉降计算时的重要参数。因此,准确确定先期固结压力十分重要。目前,测定土的先期固结压力的方法主要有Casagrande法[1]、Schmertmann法、Burmister法以及日本三笠氏法[2]。国际上普通采用Casagrande法,并被国家行业标准收录。但该法也存在缺点,如手工绘制曲线繁琐,较难判定曲线上最小曲率半径点,尤其当曲线曲率变化缓慢时,人为判读误差较大。

为了解决这一问题,提高Casagrande法的计算精度,许多学者提出了不同的依据数学分析的计算机绘图方法,用以替代手工绘图和目测判读。如张书宪[3]、刘春平等[4]采用3次多项式拟合e-lg p曲线,姬宏等[5]、姜安龙等[6]采用4次多项式拟合,刘用海等[7]采用3次多项式和最小二乘法回归拟合e-lg p曲线,王志亮等[8]采用Harris模型拟合e-lg p曲线。此外,季国强[9]、韦琪等[10]采用关键区段数值量板法,对Casagrande法进行数值模拟,邹越强等[11]采用逐步逼近法推求先期固结压力。上述这些方法所采用的拟合函数不同,或者数值计算方法不同,但其关键是确定e-lg p曲线的最小曲率半径的位置。在分析比较前人研究成果基础上,笔者提出采用分段3次样条插值模型来拟合e-lg p曲线,以及3点定圆逐步逼近法确定最小曲率半径点,并编写计算程序。

1 数学模型分析

1.1 3次样条插值原理

采用分段3次样条插值函数,构造通过一系列形值点的一条光滑曲线。设在区间$[a,b]$上给定$n+1$个插值节点$a\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_{n+1}\leqslant b$及其函数$f(x)$相应的值$y_1=f(x_1),y_2=f(x_2),\cdots,y_{n+1}=f(x_{n+1})$。

若函数$s(x)$满足条件

$$\left.\begin{array}{l} s(x)\in C^2[a,b] \\ s(x)\text{在每个子区间}[x_i,x_{i+1}]\ (i=1,2,\cdots,n)\text{上是3次多项式} \\ s(x_i)=f_i\ (i=1,2,\cdots,n+1) \end{array}\right\} \tag{1}$$

则称$s(x)$是$[a,b]$上的3次样条插值函数[12]。

若补充上相应的边界条件

收稿日期:2011-09-14

基金项目:江苏省交通厅资助项目(09Y33)

作者简介:姬付全(1987—),男,硕士研究生,研究方向为地基处理和现代原位测试技术。

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$s'(x_1)=f'_1, s'(x_{n+1})=f'_{n+1} \tag{2}$$

通过解三弯矩方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_n & 2 & \lambda_n \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_n \\ M_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \\ d_{n+1} \end{bmatrix} \tag{3}$$

式中：$M_i=s''(x_i)\quad (i=1,2,\cdots,n+1)$；$\mu_i=\dfrac{x_i-x_{i-1}}{x_{i+1}-x_{i-1}}$；$\lambda_i=1-\mu_i$；$d_i=6f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}]\ (i=2,3,\cdots,n)$；$d_1=\dfrac{6}{x_2-x_1}(f[x_1,x_2]-f'_1)$；$d_{n+1}=\dfrac{6}{x_{n+1}-x_n}(f'_{n+1}-f[x_n,x_{n+1}])$。

便可得到形值区间$[x_i,x_{i+1}]$上的3次样条插值函数

$$s(x)=\frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h_i}M_i+\frac{(x-x_i)^3}{6h_i}M_{i+1}+\frac{x_{i+1}-x}{h_i}(f_i-\frac{h_i^2}{6}M_i)+\frac{x-x_i}{h_i}(f_{i+1}-\frac{h_i^2}{6}M_{i+1}) \tag{4}$$

综上所述,样条插值数学模型的计算过程分两步:首先解三弯矩方程组(3),确定参数M_i;然后利用显式公式(4)进行插值。

1.2　3点定圆

采用3点定圆逐步逼近法确定曲线上最小曲率半径点[3]。对于曲线上初始的n+1个试验数据点,依次计算(1,2,3),(2,3,4),(3,4,5),…,(n–2,n–1,n),(n–1,n,n+1)每3个相邻点确定的圆半径R_i,如图1所示,计算公式为

$$R_i=\sqrt{(x_o-x_i)^2+(y_o-y_i)^2}\quad (i=1,2,\cdots,n-1) \tag{5}$$

式中：$x_o=\dfrac{(y_p-y_q)-(k_px_p-k_qx_q)}{k_q-k_p}$；$y_o=y_p+k_p(x_o-x_p)$；$x_p=\dfrac{x_i+x_{i+1}}{2}$；$y_p=\dfrac{y_i+y_{i+1}}{2}$；$x_q=\dfrac{x_{i+1}+x_{i+2}}{2}$；$y_q=\dfrac{y_{i+1}+y_{i+2}}{2}$；$k_p=\dfrac{x_i-x_{i+1}}{y_{i+1}-y_i}$；$k_q=\dfrac{x_{i+1}-x_{i+2}}{y_{i+2}-y_{i+1}}$。

首先,根据公式(5)确定曲率半径最小的区段,然后把该区段划分成若干等间距小段,通过公式(5)计算各相邻3点的曲率半径,再次确定曲率半径最小的区段。如此迭代下去,逐步缩小范围,直至满足要求的精度,确定曲线的最小曲率半径点。

总之,求先期固结压力的数学模型主要包括两个内容:一是利用分段3次样条插值函数拟合试验压缩曲线,构造e-lg$p$曲线方程;二是利用3点定圆逐步逼近法确定e-lg$p$曲线上最小曲率半径点。按照上述分析思路,编写计算程序,实现模型的可操作性。

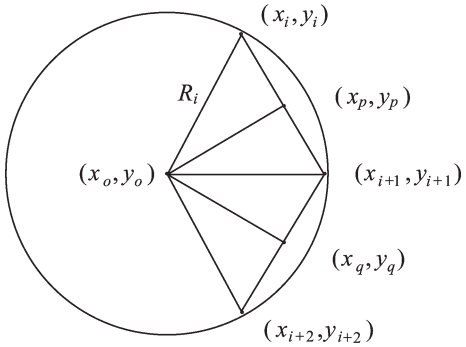

图1　计算曲率半径示意图

Fig.1　Schematic diagram of curvature radius

2　模型优越性检验

采用分段3次样条插值函数拟合e-lg$p$曲线时,没有改变原试验数据形值点,只对形值区间作插值,插值点处具有2阶光滑度和一致收敛性。下面通过实例分析,检验模型的优越性,所选用的土样压缩试验数据见表1。

对土样1,分别采用3次、4次多项式以及Harris模型和分段3次样条插值模型来拟合e-lg$p$曲线方程。结果如下。

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

3次多项式的拟合方程式为

$$e=0.003\,2(\lg p)^3-0.076\,9(\lg p)^2+0.130\,2(\lg p)+0.796\,1 \tag{6}$$

表1 土样压缩试验数据

Tab.1 Data from consolidation tests

土样1[文献8]			土样2[文献10]		
p/kPa	$\lg p$	e	p/kPa	$\lg p$	e
12.5	1.097	0.852	6.25	0.796	0.601
25	1.398	0.835	12.5	1.097	0.6
50	1.699	0.810	25	1.398	0.598
100	2	0.777	50	1.699	0.593
200	2.301	0.728	100	2	0.587
400	2.602	0.674	200	2.301	0.574
800	2.903	0.604	400	2.602	0.529
1 600	3.204	0.529	800	2.903	0.479
3 200	3.505	0.449	1 600	3.204	0.43

4次多项式的拟合方程式为

$$e=0.006\,4(\lg p)^4-0.055\,2(\lg p)^3+0.115\,5(\lg p)^2-0.135\,9(\lg p)+0.925\,8 \tag{7}$$

Harris模型的拟合方程式为[10]

$$e=\frac{1}{1.168\,9+0.007\,6(\lg p)^{3.925}} \tag{8}$$

分段3次样条插值函数的拟合方程式为

$$e=a(x_{i+1}-\lg p)^3+b(\lg p-x_i)^3+c(x_{i+1}-\lg p)+d(\lg p-x_i)\quad(\text{区间}i) \tag{9}$$

式中：x_i为应力值，见表1中土样1的$\lg p$值；系数a，b，c，d的具体值见表2。

表2 3次样条函数拟合系数

Tab.2 Fitting coefficients of cubic spline functions

区间i	a	b	c	d
1	−0.002	−0.068	2.830	2.780
2	−0.068	−0.019	2.780	2.692
3	−0.019	−0.150	2.692	2.595
4	−0.150	0.033	2.595	2.415
5	0.033	−0.164	2.415	2.254
6	−0.164	0.037	2.254	2.003
7	0.037	−0.167	2.003	1.772
8	−0.167	0.446	1.772	1.451

利用上述数学模型的e-$\lg p$曲线方程，计算出不同应力水平的孔隙比，结果见表3。由表3可知，3次多项式拟合结果最差，4次多项式和Harris模型拟合结果较好，但相对误差都大于实验室量测允许误差（百分表的精度为0.01 mm，天然孔隙比为0.852，则孔隙比e精确到0.000 93），不能满足要求。而分段3次样条插值模型计算出的孔隙比和试验值完全相同，实现了零误差精度。因此，笔者认为用分段3次样条插值模型来拟合e-$\lg p$曲线是合理的。

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

表3　*e*-lg *p* 曲线拟合值比较

Tab.3　Comparison of fitting values of *e*-lg *p* curve

p/kPa	lg *p*	*e*								
		试验值	3次多项式拟合值	相对误差/%	4次多项式拟合值	相对误差/%	Harris模型拟合值	相对误差/%	3次样条插值	相对误差/%
12.5	1.097	0.852	0.851	0.162 9	0.852	0.000 1	0.848	0.005 2	0.852	0.000 0
25	1.398	0.835	0.837	0.187 9	0.835	0.000 2	0.835	0.000 3	0.835	0.000 0
50	1.699	0.81	0.811	0.126 4	0.811	0.001 1	0.813	0.003 9	0.81	0.000 0
100	2	0.777	0.775	0.321 8	0.777	0.0003	0.779	0.002 1	0.777	0.000 0
200	2.301	0.728	0.728	0.065 9	0.732	0.004 9	0.730	0.003 3	0.728	0.000 0
400	2.602	0.674	0.671	0.503 1	0.675	0.001 6	0.670	0.006 3	0.674	0.000 0
800	2.903	0.604	0.604	0.048 0	0.609	0.007 8	0.600	0.006 9	0.604	0.000 0
1 600	3.204	0.529	0.529	0.016 3	0.535	0.011 2	0.526	0.006 6	0.529	0.000 0
3 200	3.505	0.449	0.446	0.774 7	0.457	0.018 8	0.452	0.006 4	0.449	0.000 0

3　算例分析与比较

为了验证上述数学模型的可行性,从两个算例进行分析。土样压缩试验数据见表1,据此可绘出 *e*-lg *p* 曲线,如图2、图3所示。

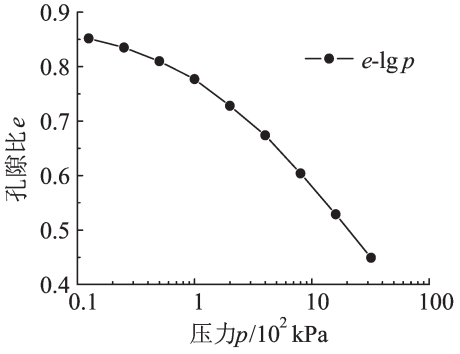

图2　土样1压缩曲线

Fig. 2　Compressive curves of soil 1#

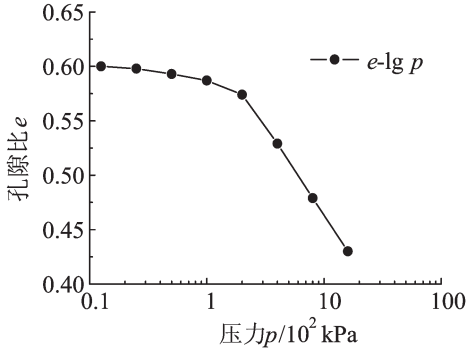

图3　土样2压缩曲线

Fig. 3　Compressive curves of soil 2#

通过运行程序,求得土样1压缩曲线的最小曲率半径值为3.828,在点(0.983,0.778)处,得出先期固结压力为210 kPa,与文献[8]计算值202 kPa的相对误差为4%,图形化显示结果如图4所示。对土样2,最小曲率半径值为1.888,在点(1.966,0.575)处,先期固结压力为215 kPa,与文献[10]试验值209 kPa的相对误差为3%,图形化显示结果如图5所示。

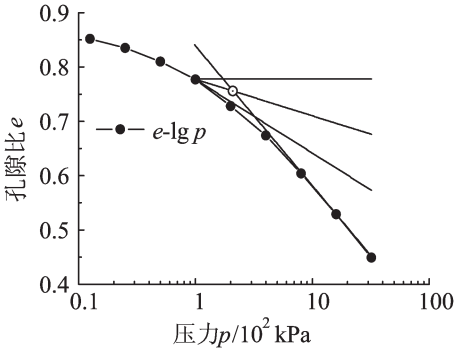

图4　土样1求先期固结压力示意图

Fig.4　Sketch of deciding pre-consolidation pressure of soil 1#

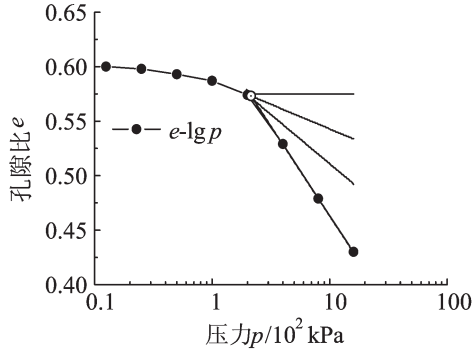

图5　土样2求先期固结压力示意图

Fig.5　Sketch of deciding pre-consolidation pressure of soil 2#

结果表明,应用计算机编程求先期固结压力的计算误差很小,是可以接受的,故利用分段3次样条插值

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

模型确定地基土的先期固结压力是可行的。

4 结语

1）拟合 e-lg p 曲线时，数学模型的选择对先期固结压力的影响很大。建议采用分段3次样条插值模型，其拟合度比3次、4次多项式以及著名的Harris模型更高。

2）基于Casagrande法作图时，采用3点定圆逐步逼近法，确定 e-lg p 曲线的最小曲率半径的位置，取得了很好的效果。

3）应用计算机编程求先期固结压力，计算速度快，精确度高，可避免人为因素所引起的误差。

参考文献：

[1] CASAGRANDE A.The determination of the preconsolidation load and its practical significance[J]. Proc of First ICMFE, 1936(3):60-64.
[2] 徐亚非. 求取先期固结压力方法的发展与综述[J]. 山西建筑,2008,34(23):107-108.
[3] 张书宪. 用计算机绘图确定先期固结压力的一种方法[J]. 岩土工程界,2000,3(8):45-46.
[4] 刘春平,李中秋,张书宪. 如何确定土的先期固结压力的探讨[J]. 地质与勘探, 2003,39(1):91-92.
[5] 姬宏,宋新江. e-lg p 曲线中曲率半径最小值的数值求法[J]. 水利水电技术,2001,32(10):46-47.
[6] 姜安龙,赵春风,高大钊. 确定先期固结压力的数学模型法[J]. 岩土力学,2003,24(2):292-295.
[7] 刘用海,朱向荣,常林越. 基于Casagrande法数学分析确定先期固结压力[J]. 岩土力学,2009,30(1):211-214.
[8] 王志亮,郑明新,李永池. 求前期固结应力的数学模型研究及应用[J]. 岩土力学,2005,26(10):1587-1590.
[9] 季国强. 计算先期固结压力的关键区段数值量板法[J]. 勘察科学技术,1990(2):39-42.
[10] 韦琪,董忠级. 准确测求土的先期固结压力[J]. 大坝观测与土工测试,2000,24(4):43-44.
[11] 邹越强,王建斌,邵孟新. 推求先期固结压力的逐步逼近法[J]. 岩土工程学报,1994,16(3):54- 61.
[12] 孙志忠,袁慰平,闻震初. 数值分析[M]. 南京:东南大学出版社,2002:139-147.

Determining Pre-consolidation Pressure of Clays with Cubic Spline Interpolation in Three Consolidation Tests

Ji Fuquan, Jing Fei, Liu Zhibin, Ju Jun

(School of Transportation, Southeast University, Nanjing 210096, China)

Abstract: Pre-consolidation pressure is an index of deciding the stress history of a soil layer, and is also an important parameter in differentiating the consolidation state of soft soil. Based on Casagrande method, the thought of adopting cubic spline functions to fit e-lgp curve is put forward. Besides, a calculating program of the mathematic model is written, which aims to accurately and quickly obtain pre-consolidation pressure of clays. Finally, two cases are presented. By comparisons and analyses, the fitting degree of this new model is better than that of the cubic and quartic polynomial models and Harris model, which has good engineering applying value.

Key words: pre-consolidation pressure; e-lg p curve; cubic spline interpolation

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net