文章编号:1005-0523(2012)01-0030-05

基于灰色马尔科夫链模型的交通量预测

刘宗明[1],贾志绚[2],李兴莉[3]

(太原科技大学1. 电子信息工程学院; 2. 交通与物流学院; 3. 应用科学学院,山西 太原 030024)

摘要: 交通量是一个不平稳的时间序列,在不确定性条件和缺乏数据资料的情况下,交通量的预测是一个较复杂的问题。灰色马尔科夫链模型是一种结合经典灰色理论和马尔科夫链的状态转移行为的预测模型。该模型在灰色预测理论的基础上,再对随机波动大的残差序列进行马尔科夫预测,实现了两者的优势互补,克服了两者的不足。以太原市漪汾桥断面的交通量的数据在传统灰色GM(1,1)预测模型的基础上建立交通量的灰色马尔科夫链模型,研究表明,该模型在交通量的预测方面相对传统的灰色GM(1,1)模型有更高的精度。

关键词: 灰色理论;马尔科夫链;残差;交通量预测;GM(1,1)模型

中图分类号: U491.1+4 **文献标志码:** A

利用道路交通量调查资料对未来交通量进行合理准确的预测是决策部门制定发展规划的重要依据[1]。灰色系统理论具有所需样本少,不需要计算统计特征量等特点。灰色系统理论在预测方面应用十分广泛,如电力负荷的灰色预测,城市噪声的灰色预测,以及自然灾害的灰色预测等。近些年来,交通领域的科研人员,也将灰色系统理论引入并应用交通系统的某些部分,比如在城市交通生成总量预测、道路交通流量预测,城市道路交通噪声预测,铁路货运量预测和公路客运量预测等方面。在交通量的预测方面国内科研人员也做了相应的研究[2-8],主要有灰色经济学模型,交通量演变模式检索方法,灰色残差GM(1,1)模型以及一些改进的灰色模型等。

灰色马尔科夫模型是一种结合灰色系统理论和马尔科夫链的理论的预测模型。首先灰色预测方法用于预测变化趋势较为明显的时间序列,对随机波动性大的时间序列则效果不是太好,马尔科夫链的理论适用于随机过程的状态转移行为,正好可以弥补灰色预测的局限,但马尔科夫链的预测对象要求具有平稳过程、等均值的特点,交通系统的变化多属于非平稳过程,如果采用GM(1,1)模型拟合系统,并在此基础上对随机波动大的残差序列进行马尔科夫预测,实现两者优势互补。运用灰色马尔科夫预测模型进行对太原市某街道15 min交通量进行预测,结果表明,该模型在交通量预测方面具有很好的精度。

1 建模

利用灰色马尔科夫预测建模过程如下:即先用灰色GM(1,1)对原始数据 $X^{(0)}$ 进行建模,在此基础上对残差进行GM(1,1)建模,然后结合马尔科夫链理论根据残差符号建立状态转移概率矩阵。

1.1 建立原始数据的GM(1,1)的预测模型

根据灰色系统理论,原始数据序列 $X^{(0)}=\{x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)\}$,为预测其未来发展趋势状况,对原始数据累加处理,增强数据的规律性,常采用一次累加生成处理得到一次累加序列 $X^{(1)}=\{x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n)\}$。

收稿日期: 2011-12-05

基金项目: 国家自然科学基金项目(10902076);山西省自然科学基金项目(2010011004)

作者简介: 刘宗明(1985-),男,硕士研究生,主要研究方向为交通信息工程及控制。

对$X^{(1)}(t)$建立GM(1,1),对应的线性微分方程为

$$\frac{dx^{(1)}}{dt}+ax^{(1)}=u \tag{1}$$

式中:a,u为待辨识的参数。

解该微分方程为

$$x^{(1)}(t)=\left[x^{(0)}(1)-\frac{u}{a}\right]e^{-at}+\frac{u}{a} \tag{2}$$

式中:$x^{(0)}(1)=x^{(1)}(1)$为初始值。

由最小二乘法求解待辨识的参数a,u表示为

$$\begin{pmatrix}a\\u\end{pmatrix}=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} \tag{3}$$

式中$\boldsymbol{Y}$和$\boldsymbol{B}$为

$$\boldsymbol{Y}=(x^{(0)}(2),x^{(0)}(3),\cdots,x^{(0)}(n))^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}(x^{(1)}(2)+x^{(1)}(1)) & -\frac{1}{2}(x^{(1)}(3)+x^{(1)}(2)) & \cdots & -\frac{1}{2}(x^{(1)}(n)+x^{(1)}(n-1))\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

根据GM(1,1)模型可以求出一次累加生成量$x^{(1)}(t)$的模型预测值,可以表示成如下式

$$\hat{x}^{(1)}(t)=[x^{(0)}(1)-\frac{u}{a}]e^{-2a}+\frac{u}{a}\quad(t=1,2,\cdots,n) \tag{4}$$

由于

$$\hat{x}^{(1)}(t)=\sum_{k}^{t}\hat{x}^{(0)}(k)\quad(k=1,2,\cdots,n) \tag{5}$$

因此得到原始数据模型值为

$$\hat{x}^{(0)}(t)=\hat{x}^{(1)}(t)-\hat{x}^{(1)}(t-1) \tag{6}$$

1.2　建立残差绝对值序列的GM(1,1)模型

由上面的分析得到残差绝对值序列为

$$\varepsilon^{(0)}(t)=\left|x^{(0)}(t)-\hat{x}^{(0)}(t)\right|\quad(t=1,2,\cdots,n) \tag{7}$$

令残差绝对值的累加序列:$\varepsilon^{(1)}(t)=\{\varepsilon^{(1)}(1),\varepsilon^{(1)}(2),\cdots,\varepsilon^{(1)}(n)\}$;然后对$\varepsilon^{(1)}(t)$建立GM(1,1)模型,对应的线性微分方程为

$$\frac{d\varepsilon^{(1)}}{dt}+a_1\varepsilon^{(1)}=u_1 \tag{8}$$

式中:u_1,a_1为待辨识的参数。

得到的微分方程为

$$\varepsilon^{(1)}(t)=\left[\varepsilon^{(0)}(1)-\frac{u_1}{a_1}\right]e^{-a_1t}+\frac{u_1}{a_1} \tag{9}$$

由最小二乘法求解待辨识的参数a,u,估计值a,u,系数$\begin{pmatrix}a_1\\u_1\end{pmatrix}=\left(\boldsymbol{B}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_1\right)^{-1}\boldsymbol{B}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_1$,$\boldsymbol{Y}_1$和$\boldsymbol{B}_1$如下式

$$\boldsymbol{Y}_1=(\varepsilon^{(0)}(2),\ \varepsilon^{(0)}(3),\cdots,\ \varepsilon^{(0)}(n))^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}(\varepsilon^{(1)}(2)+\varepsilon^{(1)}(1)) & -\frac{1}{2}(\varepsilon^{(1)}(3)+\varepsilon^{(1)}(2)) & \cdots & -\frac{1}{2}(\varepsilon^{(1)}(n)+\varepsilon^{(1)}(n-1))\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

得到改进后的原始数据的预测值为

$$\hat{x}^{(0)}(t+1)=(1-e^{a})\left[x^{(0)}(1)-\frac{u}{a}\right]e^{at}+\mathrm{sgn}(t+1)\left(1-e^{a_1}\right)\left[\varepsilon^{(0)}(1)-\frac{u_1}{a_1}\right]e^{-a_1 t} \tag{10}$$

式中:符号函数

$$\mathrm{sgn}(t+1)=\begin{cases}-1 & x^{(0)}(t+1)-\hat{x}^{(0)}(t+1)<0\\ 0 & x^{(0)}(t+1)-\hat{x}^{(0)}(t+1)=0\\ 1, & x^{(0)}(t+1)-\hat{x}^{(0)}(t+1)>0\end{cases} \tag{11}$$

由上面的分析可知,$1\leqslant t\leqslant n$时,$\mathrm{sgn}(t)$的值可由原残差的符号确定,因此提高灰色预测精度的关键是正确预测$t>n$时$\mathrm{sgn}(t)$值的概率。

根据马尔可夫理论,对于时间和状态都是离散的马尔科夫过程,称为马尔科夫链,马尔科夫的过程是研究系统的状态及状态的转移,即状态转移概率。由状态转移概率组成马氏链的转移概率矩阵如下

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n}\\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn}\end{bmatrix} \tag{12}$$

式中,状态转移概率满足:$p_{ij}\geqslant 0$,$\sum_{j=1}^{n}p_{ij}=1$,其中p_{ij}表示的是状态i转移到状态j的概率。

本文用马尔科夫过程来求解残差状态转移的概率,从而确定计算预测值时残差的符号,这里确定3种状态,残差为零时状态取为1,残差为正时状态取为2,残差为负时状态取为3,然后构建状态转移概率矩阵。

2 应用实例

以太原市漪汾桥断面为例,实地调查其交通量数据,从早7:00—9:30,每15分钟作为一个调查时间单位,测得交通流量数据如表1所示。

表1 交通量数据表

Tab.1 Data of traffic volume

时间段	7:00－7:15	7:15－7:30	7:30－7:45	7:45－8:00	8:00－8:15	8:15－8:30	8:30－8:45	8:45－9:00	9:00－9:15	9:15－9:30
交通量/辆	503	558	630	637	702	622	861	676	933	685

取表1中时间段7:00—9:00的数据作为原始数据,取9:00—9:30时间段的两组数据作为预测数据对照值,令$X^{(0)}(t)=\{503,558,630,637,702,622,861,676\}$建立灰色的马尔科夫链预测模型,步骤如下:

累加序列:$\{X^{(1)}(t)\}=\{503,1\,061,1\,691,2\,328,3\,030,3\,652,4\,513,5\,189\}$

构造矩阵$\boldsymbol{B}$和向量$\boldsymbol{Y}$:

$$\boldsymbol{Y}=[558,630,637,702,622,861,676]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-782 & -1\,326 & -2\,009.5 & -2\,679 & -3\,341 & -4\,082.5 & -4\,851\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

由最小二乘法求得

$$\begin{pmatrix}a\\u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.045\,1\\548.3\end{pmatrix}$$

得到累加序列的预测模型:$\hat{x}^{(1)}(t+1)=13\,021e^{0.045\,1t}-12\,518$

从而得到原始数据模型值:$\hat{x}^{(0)}(t+1)=(1-e^{-0.045\,1})13\,021e^{0.045\,1t}$

通过计算得到模型值及残差如表2所示。

表2　模型值及残差值

Tab.2　Value of model and residuals

时间段	计算值/辆	实际值/辆	残差/辆
7:00 – 7:15	503	503	0
7:15 – 7:30	601	558	–43
7:30 – 7:45	628	630	2
7:45 – 8:00	657	637	–20
8:00 – 8:15	687	702	15
8:15 – 8:30	719	622	–97
8:30 – 8:45	763	861	92
8:45 – 9:00	787	676	–111

对残差的绝对值建立GM(1,1)模型,令 $\varepsilon^{(0)}(t)=\{0,43,2,20,15,97,92,111\}$,得到的残差绝对值累加的预测模型为:$\hat{\varepsilon}^{(1)}(t+1)=39.2e^{0.333\,7t}-39.2$

由以上建模即得到修正模型为:$\hat{x}^{(0)}(t+1)=(1-e^{-0.045\,1})(13021e^{0.045\,1t})+\mathrm{sgn}(t+1)(1-e^{-0.333\,7})(39.2e^{0.333\,7t})$

通过该模型得到的结果如表3所示:

表3　模型值及残差值

Tab.3　Value of model and residuals

时间段	计算值/辆	实际值/辆	残差/辆
7:00 – 7:15	503	503	0
7:15 – 7:30	585	558	–27
7:30 – 7:45	648	630	–18
7:45 – 8:00	627	637	10
8:00 – 8:15	730	702	15
8:15 – 8:30	659	622	–37
8:30 – 8:45	841	861	20
8:45 – 9:00	658	676	16

根据原始残差的符号残差符号状态划分如表4所示。

表4　状态划分表

Tab.4　Status partition

状态	残差符号
1	$\varepsilon^{0}(t)=0$
2	$\varepsilon^{0}(t)>0$
3	$\varepsilon^{0}(t)<0$

由表2中残差的符号状态构建转移概率矩阵:

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

通过以上得到预测模型预测时间段9:00—9:30的交通量,结果如表5、6所示,可以看出:灰色马尔科夫链预测模型交通量的预测精度较高,相对误差较小。

表5　GM(1,1)结果表

Tab.5　Results of GM(1,1)

时间段	计算值/辆	实际值/辆	相对误差/%
9:00 – 9:15	823	933	11.7
9:15 – 9:30	862	685	25.8

表6　灰色马尔科夫链模型结果表

Tab.6　Results of Gray-Markov Chain model

时间段	计算值/辆	实际值/辆	相对误差/%
9:00 – 9:15	940	933	0.75
9:15 – 9:30	708	685	3.30

4 结论

1）灰色马尔科夫链模型是一种结合灰色系统理论和马尔科夫链的理论的预测模型，在此基础上，通过对原始数据的序列和残差绝对值序列二次建立GM（1，1）预测模型，引进马尔科夫链的状态转移概率矩阵建立了交通量预测模型。

2）当预测长期交通量时，可以根据已有的历史数据，重新选取原始数据进行建模，然后重构马尔科夫链的状态转移概率矩阵，达到长期预测的目的。

3）结合太原市漪汾桥断面的实际交通量数据，建立了其交通量预测模型，研究结果表明：与灰色GM（1，1）模型相比，相对误差明显减小，该模型在交通量预测精度上有了很大的改进。

参考文献：

［1］STEPHEN C. Traffic prediction using multivariate nonparametric regression［J］. Journal of Transportation Engineering，2003，129（2）：161-168.

［2］徐冲，孙晓燕，王海龙，等. 灰色经济计量学模型在交通量预测中的应用［J］. 公路工程，2010，35（5）：34-38.

［3］靳引利. 基于交通量演变模式检索的高速公路交通量预测方法［J］. 公路交通科技，2010，27（1）：116 -121.

［4］陈淑燕，陈家胜. 一种改进的灰色模型在交通量预测中的应用［J］. 公路交通科技，2004，21（2）：81- 83.

［5］周荣康，徐永，李若灵. 基于灰色残差GM（1，1）模型的道路交通量预测的研究［J］. 交通运输工程与信息学报，2008，21（3）：49-53.

［6］孙燕，陈森发，周振国. 灰色系统理论在无检测器交叉口交通流量预测中的应用［J］. 东南大学学报，2002，32（2）：256-258.

［7］严磊. 基于灰色理论与神经网络的交通量组合预测模型研究［D］. 重庆：重庆大学. 2010：32-37.

［8］许伦辉，傅惠. 交通信息智能预测理论与方法［M］. 北京：科学出版社，2009：135-142.

Traffic Volume Forecast Based on Gray Markov Chain Model

Liu Zongming[1]，Jia Zhixuan[2]，Li Xingli[3]

（1. School of Electronic Information Engineering；2. School of Traffic and Logistics；3. School of Applied Science，Taiyuan University of Science and Technology，Taiyuan 030024，China）

Abstract：Traffic volume is an unstable time series. Traffic volume forecast is a more complicated work under uncertain conditions or lacking of data. Gray Markov chain model is prediction model of the combination of Grey Theory and state transition behavior of Gray Markov Chain theory，which has the advantages of each method and overcomes the shortcomings of the Gray theory model. Based on the actual traffic data of Taiyuan YI-FEN Bridge section，a model of traffic volume prediction is established in this paper. The research shows that the forecast precision of the model in traffic volume is higher than traditional Gray GM（1，1）model.

Key words：Gray theory；Markov chain；deviation；traffic volume forecast；GM（1，1）model