文章编号:1005-0523(2012)01-0035-04

图的反符号全控制数

徐保根,张亚琼,罗 茜,丁宗鹏

(华东交通大学基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要:设 $G=(V,E)$ 是一个无孤立顶点的图,一个函数 $f:V\to\{-1,+1\}$ 称为图 G 的一个反符号全控制函数,如果 $f(N(v))\leqslant 1$ 对任何点 $v\in V(G)$ 成立。图 G 的反符号全控制数记为 $\gamma_{\mathrm{rst}}(G)=\max\{f(V)|f$ 为图 G 的一个反符号全控制函数 $\}$。该文对图的反符号全控制函数进行了研究,获得了一般图的反符号全控制数的若干界限,确定了完全图和完全二部图的反符号全控制数。

关键词:反符号全控制函数;反符号全控制数;完全图;完全二部图

中图分类号:O157.5 **文献标志码**:A

1 引言及定义

本文所考察的图均为无向简单图,文中的符号和术语若无特别说明均与文献[1]相同。

设 G 是一个连通的简单有限图,G 的顶点集记为 $V(G)$,边集记为 $E(G)$;顶点 v 的开邻域 $\{u|uv\in E(G)\}$ 记为 $N(v)$,闭邻域 $N[v]=N(v)\cup\{v\}$;图 G 的最大度和最小度分别用 Δ 和 δ 表示;若 $S\subseteq V(G)$,则 $G[S]$ 表示 S 在 G 中的导出子图。若 $A\in V(G)$ 和 $B\in V(G)$,则用 $E(A,B)$ 表示两个端点分别在 A 和 B 中的边集,即 $E(A,B)=\{uv\in E(G)|u\in A,v\in B\}$。

设 $S\subseteq V(G)$,f 是 $V(G)$ 上的一个实值函数,则记 $f(S)=\sum\limits_{v\in S}f(v)$。对于实数 x,记 $\lceil x\rceil$ 为不小于 x 的最小整数,$\lfloor x\rfloor$ 为不大于 x 的最大整数。

定义1[2] 设 $G=(V,E)$ 为一个图,一个函数 $f:V\to\{-1,+1\}$ 称为图 G 的一个反符号控制函数,如果 $f(N[v])\leqslant 1$ 对任何点 $v\in V(G)$ 成立。图 G 的反符号控制数记为 $\gamma_{\mathrm{rst}}(G)=\max\{f(V)|f$ 为图 G 的一个反符号控制函数$\}$。

图的符号控制[3]由Dunbar等人于1995年首先提出,并进行了广泛的研究,张忠辅等得到了一般图的符号控制数的界限[4],文献[5]对其进行了改进。符号控制已开始研究了其多种多样的变化形式[6-8],下面我们介绍一种符号控制的反形式。

定义2 设 $G=(V,E)$ 是一个无孤立点的图,一个函数 $f:V\to\{-1,+1\}$ 称为图 G 的一个反符号全控制函数,如果 $f(N(v))\leqslant 1$ 对任何点 $v\in V(G)$ 成立。图 G 的反符号全控制数记为 $\gamma_{\mathrm{rst}}(G)=\max\{f(V)|f$ 为图 G 的一个反符号全控制函数$\}$。

图的反符号全控制是图的符号控制的一种变化形式,正确地认识这种形式对于认识图的控制函数的变化有较大的价值。本文主要对图的反符号全控制数进行研究,给出一般图的反符号全控制数的若干界限,确定完全图和完全二部图的反符号全控制数。

收稿日期:2011-11-17

基金项目:国家自然科学基金(11061014);江西省自然科学基金(20114BAB201010)

作者简介:徐保根(1963-),男,教授,研究方向为图论与组合。

2 反符号全控制数的界限

定理1 对任意 n 阶图 G，若 G 的最小度 $\delta\geqslant 2$，则有 $\gamma_{rst}(G)\leqslant n-2\left\lceil\frac{-1+\sqrt{1+4n}}{2}\right\rceil$

证明 设 f 为图 G 的一个反符号全控制函数，且使得 $f(V(G))=\gamma_{rst}(G)$。令 $A=\{v\in V(G)|f(v)=1\}$，$B=\{v\in V(G)|f(v)=-1\}$，$|A|=s$，$|B|=t$。显然有 $s+t=n$，$\gamma_{rst}(G)=s-t=n-2t$。因为 $\delta\geqslant 2$，A 中的点至少邻接一个 B 中的点，故有 $|E(A,B)|\geqslant s$，即至少存在一点 $v\in B$ 使得 $|N(v)\cap A|\geqslant\left\lceil\frac{s}{t}\right\rceil$，由定义知，$v$ 至少邻接 $\left\lceil\frac{s}{t}\right\rceil-1$ 个 B 中的点，故 $t=|B|\geqslant\left\lceil\frac{s}{t}\right\rceil=\left\lceil\frac{n-t}{t}\right\rceil\geqslant\frac{n-t}{t}$，$t^2+t-n\geqslant 0$。由 t 的非负性导出 $t\geqslant\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1+4n}\right)$，注意到 t 为整数，故 $t\geqslant\left\lceil\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1+4n}\right)\right\rceil$，从而有 $\gamma_{rst}(G)=n-2t\leqslant n-2\left\lceil\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1+4n}\right)\right\rceil$。证毕。

定理2 对任意 n 阶图 G，若 G 的最小度 $\delta\geqslant 2$，则有

$$\gamma_{rst}(G)\leqslant n-2\left\lceil\frac{1}{4}\left(1-\delta+\sqrt{(\delta-1)^2+8(\delta-1)n}\right)\right\rceil$$

证明 设 f 为图 G 的一个反符号全控制函数，且使得 $f(V(G))=\gamma_{rst}(G)$。令 $A=\{v\in V(G)|f(v)=1\}$，$B=\{v\in V(G)|f(v)=-1\}$，$|A|=s$，$|B|=t$。由定义知，对任意 $v\in A$ 有 $\sum_{u\in N(v)}f(u)\leqslant 1$，故 $|N(v)\cap B|\geqslant\frac{d(v)-1}{2}$，从而有 $|E(A,B)|=\sum_{v\in A}|N(v)\cap B|\geqslant\frac{1}{2}(d(v)-1)|A|\geqslant\frac{\delta-1}{2}(n-t)$，因而 B 中至少存在一点 v，使 v 点在 A 中的邻点数目不少于 $\frac{(\delta-1)(n-t)}{2t}$，从而 v 至少与 B 中 $\frac{(\delta-1)(n-t)}{2t}-1$ 个点相邻，因而有 $t\geqslant\frac{(\delta-1)(n-t)}{2t}-1+1=\frac{(\delta-1)(n-t)}{2t}$，即 $2t^2\geqslant(\delta-1)(n-t)$。从而得 $t\geqslant\frac{1}{4}\left((1-\delta)+\sqrt{(\delta-1)^2+8(\delta-1)n}\right)$。因而是 $\gamma_{rst}(G)=n-2t\leqslant n-2\left\lceil\frac{1}{4}\left(1-\delta+\sqrt{(\delta-1)^2+8(\delta-1)n}\right)\right\rceil$，证毕。

定理3 对任意无孤立顶点的 n 阶图 G，若 $|E(G)|=m$，则有

$$\gamma_{rst}(G)\leqslant n-2\left\lceil\frac{(5-\delta)+\sqrt{(\delta-5)^2+40\left(4m+(\delta-3)n\right)}}{20}\right\rceil$$

证明 设 f 为图 G 的一个反符号全控制函数，且使得 $f(V(G))=\gamma_{rst}(G)$。令 $A=\{v\in V(G)|f(v)=1\}$，$B=\{v\in V(G)|f(v)=-1\}$，$|B|=t$。则 $|A|=n-t$ 且 $\gamma_{rst}(G)=|A|-|B|=n-2t$。$G[A]$ 和 $G[B]$ 是 A 和 B 在 G 中的导出子图，记 $s=|E(G[B])|$，则 $|E(G[A])|=m-s-|E(A,B)|$，由于 $\sum_{u\in A}|N(u)\cap B|=|E(A,B)|=\sum_{u\in B}|N(u)\cap A|$，$2s=2|E(G[B])|=\sum_{u\in B}|N(u)\cap B|=\sum_{u\in B}d_B(u)$，并且 $\sum_{u\in A}d_A(u)=2|E(G[A])|=2\left(m-s-|E(A,B)|\right)$。

由于 f 为图 G 的一个最大的反符号全控制函数，故对任意 $u\in V$，$|N(u)\cap A|\leqslant|N(u)\cap B|+1$ 成立。从而有

$$\sum_{u\in B}d_B(u)=2s=\sum_{u\in B}|N(u)\cap B|\geqslant\sum_{u\in B}\left(|N(u)\cap A|-1\right)=|E(A,B)|-|B|=\sum_{u\in A}|N(u)\cap B|-t\geqslant$$
$$\sum_{u\in A}\left(|N(u)\cap A|-1\right)-t=\sum_{u\in A}d_A(u)-(n-t)-t=\sum_{u\in A}d_A(u)-n$$

所以，$t(t-1)\geqslant\sum_{u\in B}d_B(u)=2s\geqslant|E(A,B)|-t\geqslant 2\left(m-s-|E(A,B)|\right)-n$

故 $3|E(A,B)|\geqslant 2(m-s)-(n-t)$。同定理2证明得:$|E(A,B)|\geqslant\left(\frac{\delta-1}{2}\right)(n-t)$,与上式相加得 $|E(A,B)|\geqslant\frac{4(m-s)+(\delta-3)(n-t)}{8}$,由于 $2s\geqslant|E(A,B)|-t\geqslant\frac{4(m-s)+(\delta-3)(n-t)}{8}-t$,$s\geqslant\frac{4m+(\delta-3)(n-t)-8t}{20}$,注意到 $s=|E(G[B])|\leqslant\frac{t(t-1)}{2}$,结合上式得到 $t\geqslant\frac{(5-\delta)+\sqrt{(\delta-5)^2+40(4m+(\delta-3)n)}}{20}$。注意到 t 为整数,故 $\gamma_{\mathrm{rst}}(G)=n-2t\leqslant n-2\left\lceil\frac{(5-\delta)+\sqrt{(\delta-5)^2+40(4m+(\delta-3)n)}}{20}\right\rceil$。证毕。

定理4 对任意 n 阶图 G,其度序列为 $1\leqslant d_1\leqslant d_2\leqslant\cdots\leqslant d_n$,则有 $\gamma_{\mathrm{rst}}(G)\leqslant -n+\frac{2}{d_1}\sum_{i=1}^{n}\left\lfloor\frac{1+d_i}{2}\right\rfloor$。

证明 设 g 为 $G=(V,E)$ 的一个反符号全控制函数,且使得 $g(V)=\gamma_{\mathrm{rst}}(G)$。由定义知,任意 $v\in V(G)$,有 $g(N(v))\leqslant 1$ 成立,对任意 $x\in V(G)$,令 $f(x)=\frac{g(x)+1}{2}$,f 为一个 $0-1$ 函数,且有 $\sum_{i=1}^{n}f(N(v_i))=\sum_{i=1}^{n}\left\lfloor\frac{g(N(v_i))+d_i}{2}\right\rfloor\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left\lfloor\frac{1+d_i}{2}\right\rfloor$。

另一方面,由于 $\sum_{i=1}^{n}f(N(v_i))=\sum_{i=1}^{n}d_i f(v_i)\geqslant\sum_{i=1}^{n}d_1 f(v_i)=d_1\sum_{i=1}^{n}f(v_i)=d_1 f(V)$,得到 $f(V)\leqslant\frac{1}{d_1}\sum_{i=1}^{n}\left\lfloor\frac{1+d_i}{2}\right\rfloor$

因此有 $g(V)=2f(V)-n\leqslant -n+\frac{2}{d_1}\sum_{i=1}^{n}\left\lfloor\frac{1+d_i}{2}\right\rfloor$。即有 $\gamma_{\mathrm{rst}}(G)\leqslant -n+\frac{2}{d_1}\sum_{i=1}^{n}\left\lfloor\frac{1+d_i}{2}\right\rfloor$。证毕。

3 特殊图的反符号全控制数

定理5 设 $n\geqslant 2$ 为整数,则有 $\gamma_{\mathrm{rst}}(K_n)=\begin{cases}0 & n\equiv 0\pmod 2\ \text{且}n\neq 2\\ -1 & n\equiv 1\pmod 2\\ 2 & n=2\end{cases}$

证明 当 $n=2$ 时显然。下设 $n\geqslant 3$ 设 f 为图 G 的一个反符号全控制函数,且使得 $f(V(K_n))=\gamma_{\mathrm{rst}}(K_n)$,令 $A=\{v\in V(G)|f(v)=1\}$,$B=\{v\in V(G)|f(v)=-1\}$,$|A|=s$,$|B|=t$。显然有 $|A|+|B|=s+t=n$,由定义知,对 $\forall v\in V(G)$,有 $f(N(v))\leqslant 1$ 故对 $\forall v\in A$ 有 $f(N(v))+f(v)=s-t\leqslant 2$,对 $\forall v\in B$,有 $f(N(v))+f(v)=s-t\leqslant 0$,从而有 $s-t\leqslant 0$,从而 $\gamma_{\mathrm{rst}}(K_n)\leqslant 0$,注意到 $\gamma_{\mathrm{rst}}(K_n)\equiv n\pmod 2$,故当 n 为奇数时 $\gamma_{\mathrm{rst}}(K_n)\leqslant -1$。

设 g 为这样一个函数:将 K_n 中的 $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ 个点分配 $+1$,剩余的 $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$ 个点分配 -1,显然 g 为 K_n 的一个反符号全控制函数,且 $g(V)=\frac{1-(-1)^n}{2}$,由定义得 $\gamma_{\mathrm{rst}}(K_n)\geqslant g(V)$。

综上所述,$\gamma_{\mathrm{rst}}(K_n)=\begin{cases}0 & n\equiv 0\pmod 2\text{且}n\neq 2\\ -1 & n\equiv 1\pmod 2\\ 2 & n=2\end{cases}$,定理5证毕。

定理6 设 $m\geqslant 2$,$n\geqslant 2$ 均为整数,则有 $\gamma_{\mathrm{rst}}(K_{m,n})=\frac{2-(-1)^m-(-1)^n}{2}$。

证明 设 f 是 $K_{m,n}$ 的一个反符号全控制函数,且使得 $f(V(K_{m,n}))=\gamma_{\mathrm{rst}}(K_{m,n})$,记 $V(K_{m,n})=V_1\cup V_2$,$|V_1|=m,|V_2|=n$。令 $V^+=\{u\in V_i|f(u)=1\}$,$V^-=\{u\in V_i|f(u)=-1\}$ $i=1,2$。由定义知,对每个 $u\in V_1$,有

$f\left(N(u)\right)\leqslant 1$，因此 $\left|V_2^+\right|-\left|V_2^-\right|\leqslant 1$，注意到 $\left|V_2^+\right|+\left|V_2^-\right|=n$，可见 $\left|V_2^+\right|-\left|V_2^-\right|\leqslant\dfrac{1-(-1)^n}{2}$。对每个 $u\in V_2$ 有，$f\left(N(u)\right)\leqslant 1$ 因此 $\left|V_1^+\right|-\left|V_1^-\right|\leqslant 1$，注意到 $\left|V_1^+\right|+\left|V_1^-\right|=m$，可见 $\left|V_1^+\right|-\left|V_1^-\right|\leqslant\dfrac{1-(-1)^m}{2}$。从而有

$$\gamma_{\mathrm{rst}}\left(K_{m,n}\right)=\left|V_1^+\right|-\left|V_1^-\right|+\left|V_2^+\right|-\left|V_2^-\right|\leqslant\frac{2-(-1)^n-(-1)^m}{2} \tag{1}$$

另一方面可拆分 $V_1=A_1\cup A_2$，$V_2=B_1\cup B_2$。使得 $1\geqslant\left|A_2\right|-\left|A_1\right|\geqslant 0$ 且 $1\geqslant\left|B_2\right|-\left|B_1\right|\geqslant 0$，定义一个函数 $f\colon V\left(K_{m,n}\right)\to\{-1,1\}$ 如下

$$f(v)=\begin{cases}-1 & v\in A_1\cup B_1\\ +1 & v\in A_2\cup B_2\end{cases}$$

不难验证 f 为 $K_{m,n}$ 的一个反符号全控制函数，从而有 $\gamma_{\mathrm{rst}}\left(K_{m,n}\right)\geqslant f\left(V\left(K_{m,n}\right)\right)=\dfrac{2-(-1)^m-(-1)^n}{2}$。结合式(1)有 $\gamma_{\mathrm{rst}}\left(K_{m,n}\right)=\dfrac{2-(-1)^m-(-1)^n}{2}$，证毕。

参考文献：

[1] BONDY J A，MURTY V S R. Graph Theory with Applications[M]. Amsterdam：Elsevier，1976：35-70.

[2] 徐保根. 图的控制理论[M]. 北京：科学出版社，2008：155-180.

[3] DUNBAR J，AL ET. Signed domination in graphs，graphy theory，combinatorics and application[M]. New York：Wiley，1995：311-322.

[4] ZHANG ZHONGFU，XU BAOGEN. A note on the lower bounds of the signded domination number of a graph[J]. Discrete Mathematices，1999，195：295-298.

[5] BROERE I，HATTING J E，HENNING M A，MCRAC A A. Majority domination in graphs[J]. Discrete Math，1995，138：125-135.

[6] BONDAN Z. Signed total domination number of a graph[J]. Czechoslovak Mathematical Joumal，2001，51(2)：225-229.

[7] XU BAOGEN. On minus domination and signed domination in graphs [J]. Journal of Mathematical Research and Exposition，2003，23(4)：586-590.

[8] KANG LIYING，SHEN ERFAN. Lower bounds on minus domination and k-subdomi-nation numbers [J]. Theoretical Computer Science，2003，296：89-98.

The Reverse Signed Total Domination Numbers of Graphs

Xu Baogen，Zhang Yaqiong，Luo Xi，Ding Zongpeng

(School of Basic Sciences，East China Jiaotong University，Nanchang 330013，China)

Abstract：Let $G=(V,E)$ be a graph without islate vertex，a function $f\colon V\to\{-1,1\}$ is said to be the reverse signed total dominating function (RSTDF) of G if $\sum\limits_{v\in N(u)}f(v)\leqslant 1$ holds for every vertex $u\in V(G)$. The reverse signed total domination number $\gamma_{\mathrm{rst}}(G)$ of G is defined as $\gamma_{\mathrm{rst}}(G)=\max\{\sum_{v\in V(G)}f(v)\mid f$ is an RSTDF of $G\}$. In this paper，we mainly study the reverse signed total domination of graphs，obtain some bounds of the reverse signed total domination number $\gamma_{\mathrm{rst}}(G)$ of a graph G，and determine the reverse signed total domination numbers of complete graphs and complete bipartite graphs.

Key words：the reverse signed total dominating function；the reverse signed total domination number；complete graph；complete bipartite graph.