

文章编号:1005-0523(2012)04-0012-07

非齐次空间上几类积分算子的有界性

叶晓峰,胡媛媛

(华东交通大学信息与计算科学系,江西 南昌 330013)

摘要:在上双倍可测的度量空间上,我们刻画了 Lipschitz 空间及其一些等价性条件,并考虑了其异积分算子 (Calderón-Zygmund, C-Z), 分数次积分算子, 超奇异积分算子在 Lipschitz 空间上的有界性问题。

关键词:上双倍可测度量空间; 分数次积分算子; 超奇异积分算子; Lipschitz 空间

中图分类号:0174.2

文献标志码:A

1 介绍及其定义

设 (X, d) 是度量空间, μ 是 X 上的 Borel 测度, d 是 X 上的距离, 若对 X 中以 x 为中心, 以 r 为半径的任意球 $B(x, r) \subset X$, $x \in X$, $r \in (0, \infty)$, 存在正常数 C_λ , 使得

$$\mu(B(x, r)) \leq \lambda(x, r) \leq C_\lambda \lambda(x, r/2) \quad (1)$$

其中: $\lambda: X \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 是非负控制函数, 并且对任意的 $x \in X$, $r \rightarrow \lambda(x, r)$ 是 $(0, \infty)$ 上的递增函数。则 μ 满足上双倍条件, 称 (X, d, μ) 为上双倍可测度量空间。

上双倍测度是 Hytönen 在文[1]中引入的, 它将 X. Tolso 提到的非双倍测度与经典的双倍测度有机地统一起来^[2]。在该类度量空间上, 杨大春定义了 Hardy 空间和正则有限平均振动函数空间即 RBMO(μ) 空间, 并证明了一系列有界性结论。

本文主要在上双倍可测度量空间上刻画齐次 Lipschitz 空间并讨论各类积分算子在齐次 Lipschitz 空间上的有界性问题。所谓 β 阶的齐次 Lipschitz 空间 $\text{Lip}(\beta)$, $0 < \beta \leq 1$, 为任意函数 $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ 满足:

$$\sup_{x \neq y \in X} \frac{|f(x) - f(y)|}{d^\beta(x, y)} < \infty, \text{ 易知 } \text{Lip}(\beta) \text{ 是以 } \|f\|_{\text{Lip}(\beta)} = \sup_{x \neq y \in X} \frac{|f(x) - f(y)|}{d^\beta(x, y)} \text{ 为范数的 Banach 空间。}$$

对于度量空间 (X, d) , 还需附加些几何双倍条件的概念。

定义 1 度量空间 (X, d) 被称为几何双倍的, 若存在某一正整数 N_0 , 使得对于任意球 $B(x, r) \subseteq X$, 存在有限个球 $\{B(x_i, r/2)\}_i$ 覆盖 $B(x, r)$ 且这个覆盖的基数不超过 N_0 个。

定义 2 设 (X, d) 是度量空间, Hytönen 在文[1]中指出下列条件是相互等价的。

(X, d) 是几何双倍的; 对任意实数 $\varepsilon \in (0, 1)$, 任意球 $B(x, d) \subseteq X$, 存在有限个球 $\{B(x_i, \varepsilon r)\}_i$ 覆盖 $B(x, r)$, 使得这个覆盖的基数至多为 $N_0 \varepsilon^{-n}$, 其中 N_0 同定义 1.1 中的 N_0 , 记 $n \equiv \log_2 N_0$;

对任意实数 $\varepsilon \in (0, 1)$, 任意球 $B(x, d) \subseteq X$ 能够被 $N_0 \varepsilon^{-n}$ 个以 $\{x_i\}_i$ 为中心以 εr 为半径的不相交的球所

收稿日期:2012-06-20

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10961015, 11161021)

作者简介:叶晓峰(1980—),男,副教授,博士,研究方向为调和与分析。

覆盖,从而可以得任意球 $B(x, d) \subseteq X$ 能够包含至多 $N_0 4^n$ 个以 $\{x_{ij}\}$ 为中心的不相交的球 $\{B(x_{ij}, r/4)\}_{i=1}^{N_0 4^n}$;

A. Gatto 在文[3]中研究了非双倍测度条件下分数次积分算子,奇异积分算子,超奇异积分算子关于非齐次 Lipschitz 空间的有界性^[4-5],最近, A. Eduardo 推广了分数次积分算子在高斯测度条件下关于 Lipschitz 空间的有界性。本文,考虑与上双倍可测度量空间有关的相应算子关于齐次 Lipschitz 空间的有界性。首先回顾上双倍度量空间上的 C-Z 核定义^[6](Calderón-Zygmund)。

定义3 令 $\Delta := \{(x, x): x \in X\}$, 函数 $k(x, y): X \times X \setminus \Delta \rightarrow C$ 被称为标准 C-Z 核,如果存在正常数 $\delta \in (0, 1]$ 和 C 使得

$$\text{对任意的 } x, y \in X \text{ 且 } x \neq y, \text{ 有 } |k(x, y)| \leq C \frac{1}{\lambda(x, d(x, y))};$$

$$\text{对任意的 } x_1, x_2, y \in X, \text{ 当 } d(x_1, y) \geq 2d(x_1, x_2), \text{ 有 } |k(x_1, y) - k(x_2, y)| \leq C \frac{d^\delta(x_1, x_2)}{\lambda(x, d(x, y))d^\delta(x_1, y)}, \text{ 其中}$$

$$0 < \delta \leq 1, \text{ 存在实数 } R > 0, \text{ 对任意的 } 0 < \varepsilon < R, \text{ 有 } \left| \int_{\varepsilon < d(x, y) < R} k(x, y) d\mu(y) \right| \leq C, \text{ 其中几乎处处 } x \in X;$$

则称 $k(x, y): X \times X \setminus \Delta \rightarrow C$ 被称为标准 C-Z 核; $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < d(x, y) < R} k(x, y) d\mu(y)$ 存在。

T. Hytönen 和 H. Martikainen 介绍了上双倍可测度量空间上的 C-Z 核函数对任意实数 $\varepsilon > 0$, 定义截断核函数:

$$k_\varepsilon(x, y) = k(x, y) \chi_{d(x, y) > \varepsilon}(x, y)$$

则仿照前面的定义有

$$\text{定义4 设 } f \in \text{Lip}(\beta), 0 < \beta < \delta \leq 1, \text{ 我们定义 } \tilde{T}_\varepsilon f(x) = \int_X (k_\varepsilon(x, y) - k_\varepsilon(x_0, y)) f(y) d\mu(y)$$

$$\text{则有 } \tilde{T} f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{T}_\varepsilon f(x)$$

定理1 设 k 是奇异 C-Z 核函数, $\tilde{T}$ 是相应奇异积分算子。若 $0 < \beta < \delta \leq 1$, 则 $\tilde{T}$ 是 $\text{Lip}(\beta)$ 上的有界算子的充要条件是 $\tilde{T}(1)$ 是常数。

下面,我们介绍分数次积分算子的定义。

定义5 设 $\alpha > 0, 0 < \gamma \leq 1$, 函数 $k_\alpha: X \times X \rightarrow C$ 称为阶数是 α 的 γ 正则分数核,若满足以下条件:

$$\text{任意的 } x \neq y \text{ 有, } |k_\alpha(x, y)| \leq C \frac{d^\alpha(x, y)}{\lambda(x, d(x, y))};$$

$$\text{当 } d(x, y) \geq 2d(x_1, x_2) \text{ 有, } |k_\alpha(x_1, y) - k_\alpha(x_2, y)| \leq C \frac{d^\gamma(x_1, x_2) \cdot d^\alpha(x_1, y)}{\lambda(x_1, d(x_1, y)) \cdot d^\gamma(x_1, y)};$$

假设 T_α 是分数次积分算子,被定义为: $T_\alpha(f)(x) = \int_X k_\alpha(x, y) f(y) d\mu(y)$, 其中 $f \in \text{Lip}(\beta)$ 。

类似的,我们能够在 Lipschitz 空间上推广分数次积分算子的定义。

定义6 设 $\alpha > 0, 0 < r \leq 1, k_\alpha$ 是阶数为 α 的 γ 正则分数核, $f \in L^P(\mu), P > n/\alpha, \alpha - \frac{n}{p} < \gamma$, 我们定义

$$\tilde{T}_\alpha(f)(x) = \int_X (k_\alpha(x, y) - k_\alpha(x_0, y)) f(y) d\mu(y)$$

式中: x_0 是 X 中某一固定的点,注意上述积分在无穷处是局部收敛的,显然,函数的定义仅仅依赖 x_0 的选取,但任某两个通过上述算子(运算)并选取不同的 x_0 后的函数仅差一个常数,因此,得到下述定理。

定理2 设 k_α 是正则分数核, $\tilde{T}$ 是分数次积分算子,若 $0 < \alpha < \gamma \leq 1, \alpha + \beta < \gamma$, 则算子 $\tilde{T}_\alpha$ 是从 $\text{Lip}(\beta)$ 到

$\text{Lip}(\alpha+\beta)$ 有界的充要条件是 $\tilde{T}_\alpha(1)$ 是常数。

最后,考虑一类超奇异积分算子。

定义 7 设 $0 < \alpha < \beta \leq \gamma, \beta - \alpha < 1$, 函数 $D_\alpha: X \times X \rightarrow C$ 被称为阶数为 α 的 γ 正则超奇异核若满足下面条件:

任意的 $x \neq y$ 有, $|D_\alpha(x, y)| \leq C \frac{c}{\lambda(x, d(x, y)) d^\alpha(x, y)}$;

当 $d(x, y) \geq 2d(x_1, x_2)$ 有, $|D_\alpha(x_1, y) - D_\alpha(x_2, y)| \leq C \frac{d^\gamma(x_1, x_2)}{\lambda(x_1, d(x_1, y)) \cdot d^{\alpha+\gamma}(x_1, y)}$;

则定义超奇异积分算子 H_α : $H_\alpha(f)(x) = \int_X D_\alpha(x, y)(f(y) - f(x)) d\mu(y)$ 。

并且得到下面定理。

定理 3 设 D_α 是正则超奇异核, H_α 是奇异积分算子。 $0 < \beta < \gamma \leq 1$, 则算子 H_α 是从 $\text{Lip}(\beta)$ 到 $\text{Lip}(\beta - \alpha)$ 有界的。

由超奇异积分 H_α 的定义, 我们有 $H_\alpha(1) = 0$ 。接下来 C 是一个和主要参数无关的正常数, 但随着位置的不同它会变化成带有下标的常数, 比如 C_λ 和 λ 有关。

2 预备知识和 Lipschitz 空间的刻画

为了证明主要定理, 我们须引入以下定义和引理。

定义 8 对于任意的 $\alpha, \beta > 1$, 若 $\mu(\alpha\beta) \leq \beta\mu(\beta)$, 球 $B \subseteq X$ 被称为 (α, β) -倍。

给出 $\alpha, \beta > 1$, 即使几何双倍条件和上双倍这样的弱条件也能确保许多大的和小的 (α, β) -双倍球。

引理 1 设 (X, d, μ) 是可测度量空间, 使得 μ 满足上双倍条件, 则有

$$\begin{aligned} \int_{d(x, y) < r} \frac{d^\delta(x, y)}{\lambda(x, d(x, y))} d\mu(y) &\leq Cr^\delta, \delta > 0 \\ \int_{d(x, y) > r} \frac{1}{\lambda(x, d(x, y)) d^\delta(x, y)} d\mu(y) &\leq Cr^{-\delta}, \delta > 0 \\ \int_{r/2 \leq d(x, y) < r} \frac{1}{\lambda(x, d(x, y))} d\mu(y) &\leq C \end{aligned}$$

证明 设若 μ 满足上双倍条件, 即对任意 $r > 0$, $\mu(B(x, r)) \leq \lambda(x, r) \leq C_\lambda \lambda\left(x, \frac{r}{2}\right)$, 从而有

$$\begin{aligned} \int_{d(x, y) < r} \frac{d^\delta(x, y)}{\lambda(x, d(x, y))} d\mu(y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{-k-1}r \leq d(x, y) < 2^{-k}r} \frac{d^\delta(x, y)}{\lambda(x, d(x, y))} d\mu(y) \leq \\ \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{-k-1}r \leq d(x, y) < 2^{-k}r} \frac{(2^{-k}r)^\delta}{\lambda(x, 2^{-k-1}r)} d\mu(y) &\leq \sum_{k=0}^{\infty} (2^{-k}r)^\delta \frac{\mu(B(x, 2^{-k}r))}{\lambda(x, 2^{-k-1}r)} \leq \sum_{k=0}^{\infty} C_\lambda (2^{-k}r)^\delta \leq Cr^\delta \end{aligned}$$

应用类似的估计得

$$\begin{aligned} \int_{d(x, y) \geq r} \frac{1}{\lambda(x, d(x, y)) d^\delta(x, y)} d\mu(y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k r \leq d(x, y) < 2^{k+1}r} \frac{1}{\lambda(x, d(x, y)) d^\delta(x, y)} d\mu(y) \leq \\ \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k r \leq d(x, y) < 2^{k+1}r} \frac{1}{\lambda(x, 2^k r) (2^k r)^\delta} d\mu(y) &\leq \sum_{k=0}^{\infty} (2^k r)^{-\delta} \frac{\mu(B(x, 2^{k+1}r))}{\lambda(x, 2^k r)} \leq \sum_{k=0}^{\infty} C_\lambda (2^k r)^{-\delta} \leq Cr^{-\delta} \end{aligned}$$

$$\int_{r/2 \leq d(x,y) < r} \frac{1}{\lambda(x, d(x,y))} d\mu(y) \leq \frac{\mu(B(x,y))}{\lambda(x, r/2)} \leq C_\lambda.$$

引理 2 设 (X, d) 是几何双倍度量空间, μ 是有限集 X 上的 Borel 测度, 若 $\bar{\beta} > 5^n$, 则任意 $f \in L^1_{\text{loc}}(X, \mu)$, 对几乎处处的 $x \in X$, 存在一列以 x 为中心的 $(5, \bar{\beta})$ -双倍球 $\{B_k\}_k$, $r(B_k) \rightarrow 0$, 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(B_k)} \int_{B_k} f d\mu = f(x)$$

这个引理是 Hytönen 的结论, 见文[1]。因此, 我们可以陈述并刻画关于 Lipschitz 空间的等价条件。

定理 4 设 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mu)$, 其中 μ 是 Borel 测度, 下列条件是等价的:

1) 对于任意球 B , 存在一个数列集 f_B , 使得这两条性质成立

对于任意以 r 为半径的球 B 有

$$\frac{1}{\mu(5B)} \int_B |f(x) - f_B| d\mu(x) \leq Cr^\beta \quad (2)$$

任意球 U , 使得 $B \subset U$, $r(U) \leq 2r$,

$$|f_B - f_U| \leq Cr^\beta \quad (3)$$

2) 对于 μ 测度下的几乎处处的 $x \in X$, y 在 μ 的支集中

$$|f(x) - f(y)| \leq Cd(x, y)^\beta \quad (4)$$

3) 任意实数 p , $0 \leq p \leq \infty$, 对于任意以 r 为半径的球 B , 则

$$\left(\frac{1}{\mu(5B)} \int_B |f(x) - m_B(f)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \leq Cr^\beta \quad (5)$$

其中 $m_B(f) = \frac{1}{\mu(B)} \int_B f(y) d\mu(y)$, 对于任意球 U , 使得 $B \subset U$, $r(U) \leq 2r$

$$|m_B(f) - m_U(f)| \leq Cr^\beta \quad (6)$$

证明 由引理 2, 对 μ 测度下几乎处处的 $x \in X$, $f \in L^1_{\text{loc}}(\mu)$, 存在一列以 x 为中心的 $(5, \bar{\beta})$ -双倍球 $\{B_j\}_j$, $r(B_j) \rightarrow 0$, 使得 $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(B_j)} \int_{B_j} f d\mu = f(x)$ 。

另一方面, 由条件 1) 对每个球 B_j 存在一个数 f_{B_j} , 使得

$$|m_{B_j}(f) - f_{B_j}| \leq \frac{1}{\mu(B_j)} \int_{B_j} |f(y) - f_{B_j}| d\mu(y) \leq \frac{\mu(5B_j)}{\mu(B_j)} \frac{1}{\mu(5B_j)} \int_{B_j} |f(y) - f_{B_j}| d\mu(y) \leq Cr_j^\beta$$

因此, 我们有 $\lim_{j \rightarrow \infty} f_{B_j} = f(x)$, 同理, 存在一列以 y 为中心的 $(5, \bar{\beta})$ -双倍球 $\{B'_j\}_j$, $r(B'_j) \rightarrow 0$, 使得

$\lim_{j \rightarrow \infty} f_{B'_j} = f(y)$, 则 $|f_{B_j} - f_{B'_j}| \leq Cd(x, y)^\beta$ 。

任取球 $B = B(x, r)$, $r \leq |x - y|$, 设 $U = B(x, 2|x - y|)$, $B_k = B(x, 2^k r)$, N 是使得 $2^N r > |x - y|$ 成立的最小整数, 由式(3)得

$$|f_B - f_U| \leq \sum_{k=0}^{N-1} |f_{B_k} - f_{B_{k+1}}| + |f_{B_N} - f_U| \leq C \sum_{k=0}^{N-1} (2^k r)^\beta + C(2^N r)^\beta \leq C|x - y|^\beta$$

同理, 对于点 y , 任意球 $B' = B(y, s)$, 使得 $s \leq |x - y|$, $V = B(y, 3|x - y|)$ 。

因此 $|f_B - f_{B'}| \leq |f_B - f_U| + |f_U - f_V| + |f_V - f_{B'}| \leq C|x - y|^\beta$ 。

最后,我们由下式得不等式:

$$|f(x) - f(y)| = \lim_{j \rightarrow 0} |f_{B_j} - f_{B_j}| \leq C|x - y|^\beta$$

2) $\rightarrow$ 3) 显然。

3) $\rightarrow$ 1) 首先定义 $f_B = m_B(f)$, 由 Hytönen 不等式, 则由条件 3) 可推导出条件 1)。综上完成定理 4 的证明。

3 定理的证明

首先我们讨论定理 1 的证明, 即奇异积分算子在 $\text{Lip}(\beta)$ 空间上的有界性。

首先注意到 $1 \in \text{Lip}(\beta)$, 所以只考虑充分条件, 通过 Lipschitz 空间的定义, 有

$$\|\tilde{T}f\|_{\text{Lip}(\beta)} = \sup_{x_1 \neq x_2} \frac{|\tilde{T}f(x_1) - \tilde{T}f(x_2)|}{d^\beta(x_1, x_2)}$$

设 $d(x_1, x_2) = r$, $\tilde{T}(1)$ 是常数, 则得

$$\begin{aligned} |\tilde{T}f(x_1) - \tilde{T}f(x_2)| &\leq \left| \int_{d(x_1, y) < 3r} (k_\varepsilon(x_1, y) - k_\varepsilon(x_2, y))(f(y) - f(x_1)) d\mu(y) \right| + \\ &\left| \int_{d(x_1, y) > 3r} (k_\varepsilon(x_1, y) - k_\varepsilon(x_2, y))(f(y) - f(x_1)) d\mu(y) \right| = I_1 + I_2 \end{aligned}$$

对于 I_1 , 我们有

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_{d(x_1, y) < 3r} |k_\varepsilon(x_1, y)(f(y) - f(x_1))| d\mu(y) + \int_{d(x_1, y) < 3r} |k_\varepsilon(x_2, y)(f(y) - f(x_2))| d\mu(y) + \\ &\left| \int_{d(x_1, y) < 3r} k_\varepsilon(x_2, y)(f(x_2) - f(x_1)) d\mu(y) \right| = J_1 + J_2 + J_3 \end{aligned}$$

对于 J_1 , 由定义 6 和引理 1, 我们有

$$J_1 \leq \int_{d(x_1, y) < 3r} \frac{C}{\lambda(x_1, d(x_1, y))} d(x_1, y)^\beta \|f\|_{\text{Lip}(\beta)} d\mu(y) \leq Cr^\beta \|f\|_{\text{Lip}(\beta)}$$

同理对于 J_2 , 我们有

$$J_2 \leq \int_{d(x_2, y) < 4r} |k_\varepsilon(x_2, y)(f(y) - f(x_2))| d\mu(y) \leq Cr^\beta \|f\|_{\text{Lip}(\beta)}$$

对于 J_3 , 由定义 3 和引理 1, 我们改写为

$$\begin{aligned} J_3 &\leq \left(\left| \int_{\varepsilon < d(x_2, y) < r} k(x_2, y) d\mu(y) \right| + \left| \int_{r < d(x_2, y), d(x_1, y) < 3r} k(x_2, y) d\mu(y) \right| \right) r^\beta \|f\|_{\text{Lip}(\beta)} \leq \\ &\left(C + \left| \int_{r < d(x_2, y) < 4r} k(x_2, y) d\mu(y) \right| \right) r^\beta \|f\|_{\text{Lip}(\beta)} \leq Cr^\beta \|f\|_{\text{Lip}(\beta)} \end{aligned}$$

另一方面, 由引理 1 和 $\beta < \delta$, 则有

$$|I_2| \leq C \int_{d(x_1, y) > 3r} \frac{d(x_1, x_2)^\delta}{\lambda(x_1, d(x_1, y)) d(x_1, y)^\delta} d(x_1, y)^\beta d\mu(y) \|f\|_{\text{Lip}(\beta)} \leq Cr^\beta \|f\|_{\text{Lip}(\beta)}$$

因此, 我们完成了定理 1 的证明。

下面讨论定理 2 证明

首先注意到 $1 \in \text{Lip}(\beta)$, 所以只考虑充分条件, 通过 Lipschitz 空间的定义, 我们有

$$\|\tilde{T}_\alpha f\|_{\text{Lip}(\alpha+\beta)} = \sup_{x_1 \neq x_2} \frac{|\tilde{T}_\alpha f(x_1) - \tilde{T}_\alpha f(x_2)|}{d^{\alpha+\beta}(x_1, x_2)}$$

设 $d(x_1, x_2) = r$ 和 $\tilde{T}_\alpha(1)$ 是常数, 则有

$$\begin{aligned} |\tilde{T}_\alpha f(x_1) - \tilde{T}_\alpha f(x_2)| &= \left| \int_X (k_\alpha(x_1, y) - k_\alpha(x_2, y))(f(y) - f(x_1)) d\mu(y) \right| \leq \left| \int_{d(x_1, y) \leq 2r} (k_\alpha(x_1, y) - k_\alpha(x_2, y)) \right. \\ &\quad \left. (f(y) - f(x_1)) d\mu(y) \right| + \left| \int_{d(x_1, y) > 2r} (k_\alpha(x_1, y) - k_\alpha(x_2, y))(f(y) - f(x_1)) d\mu(y) \right| = H_1 + H_2 \end{aligned}$$

对于 H_1 , 由引理 1, 则有

$$\begin{aligned} H_1 &\leq \left| \int_{d(x_1, y) \leq 2r} k_\alpha(x_1, y)(f(y) - f(x_1)) d\mu(y) \right| + \left| \int_{d(x_1, y) \leq 2r} k_\alpha(x_2, y)(f(y) - f(x_2)) d\mu(y) \right| + \\ &\quad \left| \int_{d(x_1, y) \leq 2r} k_\alpha(x_2, y)(f(x_2) - f(x_1)) d\mu(y) \right| \leq \int_{d(x_1, y) \leq 2r} \frac{d(x_1, y)^\alpha}{\lambda(x_1, d(x_1, y))} \|f\|_{\text{Lip}(\beta)} d(x_1, y)^\beta d\mu(y) + \\ &\quad \int_{d(x_2, y) < 3r} \frac{d(x_2, y)^\alpha}{\lambda(x_2, d(x_2, y))} \|f\|_{\text{Lip}(\beta)} d(x_2, y)^\beta d\mu(y) + \int_{d(x_2, y) < 3r} \frac{d(x_2, y)^\alpha}{\lambda(x_2, d(x_2, y))} d\mu(y) \|f\|_{\text{Lip}(\beta)} r^\beta \leq \\ &\quad C \|f\|_{\text{Lip}(\beta)} r^{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

对于 H_2 , 我们有

$$\begin{aligned} H_2 &\leq \int_{d(x_1, y) > 2r} |k_\alpha(x_1, y) - k_\alpha(x_2, y)|(f(y) - f(x_1)) d\mu(y) \leq \\ &\quad \int_{d(x_1, y) > 2r} \frac{d(x_1, x_2)^\gamma \cdot d(x_1, y)^\alpha}{\lambda(x_1, d(x_1, y)) d(x_1, y)^\gamma} \|f\|_{\text{Lip}(\beta)} d(x_1, y)^\beta d\mu(y) \leq C \|f\|_{\text{Lip}(\beta)} r^{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

因此, 我们完成了定理 2 的证明。

下面讨论定理 3 证明

同理, 我们只需要考虑下面的不等式

$$|D^\alpha f(x_1) - D^\alpha f(x_2)| \leq C r^{\beta-\alpha} \|f\|_{\text{Lip}(\beta)}$$

事实上, 我们可改写为

$$\begin{aligned} H_\alpha f(x_1) - H_\alpha f(x_2) &= \int_{d(x_1, y) \leq 2r} D_\alpha(x_1, y)[f(y) - f(x_1)] d\mu(y) - \\ &\quad \int_{d(x_1, y) \leq 2r} D_\alpha(x_2, y)[f(y) - f(x_2)] d\mu(y) + \int_{d(x_1, y) > 2r} [D_\alpha(x_1, y) - D_\alpha(x_2, y)][f(y) - f(x_1)] d\mu(y) - \\ &\quad \int_{d(x_1, y) > 2r} [D_\alpha(x_2, y)][f(x_2) - f(x_1)] d\mu(y) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \end{aligned}$$

对 S_1 进行估计, 我们有

$$\begin{aligned} |S_1| &= \left| \int_{d(x_1, y) \leq 2r} D_\alpha(x_1, y)[f(y) - f(x_1)] d\mu(y) \right| \leq C \int_{d(x_1, y) \leq 2r} \frac{d(x_1, y)^\beta}{\lambda(x_1, d(x_1, y)) d(x_1, y)^\alpha} \|f\|_{\text{Lip}(\beta)} d\mu(y) \leq \\ &\quad C \int_{d(x_1, y) \leq 2r} \frac{d(x_1, y)^{\beta-\alpha}}{\lambda(x_1, d(x_1, y))} \|f\|_{\text{Lip}(\beta)} d\mu(y) \leq C r^{\beta-\alpha} \|f\|_{\text{Lip}(\beta)}; \end{aligned}$$

对 S_2 , 我们进行类似的估计:

$$|S_2| = \left| \int_{d(x_1, y) \leq 2r} D_a(x_2, y) [f(y) - f(x_2)] d\mu(y) \right| \leq \\ C \int_{d(x_1, y) \leq 3r} \frac{d(x_2, y)^\beta}{\lambda(x_2, d(x_2, y)) d(x_2, y)^\alpha} \|f\|_{\text{Lip}(\beta)} d\mu(y) \leq Cr^{\beta-\alpha} \|f\|_{\text{Lip}(\beta)}$$

对于 S_3 , 我们有进行类似的估计:

$$|S_3| = \left| \int_{d(x_1, y) > 2r} [D_a(x_1, y) - D_a(x_2, y)] [f(y) - f(x_1)] d\mu(y) \right| \leq \int_{d(x_1, y) > 2r} \frac{d(x_1, x_2)^\gamma}{\lambda(x_1, d(x_1, y)) d(x_1, y)^{\alpha+\gamma}} \\ \|f\|_{\text{Lip}(\beta)} d(x_1, y)^\beta d\mu(y) \leq r^\gamma \|f\|_{\text{Lip}(\beta)} \int_{d(x_1, y) > 2r} \frac{1}{\lambda(x_1, d(x_1, y)) d(x_1, y)^{\alpha+\gamma-\beta}} d\mu(y) \leq Cr^{\beta-\alpha} \|f\|_{\text{Lip}(\beta)}$$

其中 $\beta < \alpha + \gamma$, 最后估计 S_4

$$|S_4| = \left| \int_{d(x_1, y) > 2r} [D_a(x_2, y)] [f(x_2) - f(x_1)] d\mu(y) \right| \leq \\ C \int_{d(x_1, y) > 2r} \frac{d(x_1, x_2)^\beta}{\lambda(x_2, d(x_2, y)) d(x_2, y)^\alpha} \|f\|_{\text{Lip}(\beta)} d\mu(y) \leq Cr^{\beta-\alpha} \|f\|_{\text{Lip}(\beta)}.$$

参考文献:

- [1] HYTÖNEN T. A framework for non-homogeneous analysis on metric spaces, and the RBMO space of Tolsa[J]. Publ.Mat, 2010, 54(2): 485-504.
- [2] TOLSA X. BMO, H1, and Calderón-Zygmund operators for non doubling measures[J]. Math, Ann, 2001, 319: 89-149.
- [3] EDUARDO GATTO A. Boundedness on inhomogeneous Lipschitz spaces of fractional integrals, singular integrals and hyper-singular integrals associated to non-doubling measure[J]. Coll.Math, 2009, 60(1): 101-114.
- [4] 刁俊东, 叶晓峰, 陈跃辉. 强奇异积分算子及其交换子在 Hardy 型空间上的有界性[J]. 华东交通大学学报, 2010, 27(2): 86-90.
- [5] LI JUNFENG, LU SHANZHEN. Strangly singular integral operators on weighted hardy space[J]. Acta Math, 2006, 22(3): 767-772.
- [4] 陈跃辉, 叶晓峰, 刁俊东. 一类带 $\theta(t)$ 型核的奇异积分算子的有界性[J]. 华东交通大学学报, 2010, 27(5): 85-89.

Boundedness of Integral Operators in Inhomogeneous Spaces

Ye Xiaofeng, Hu Yuanyuan

(Department of Mathematics, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: In the setting of upper doubling measure metric space, this paper analyzes the Lipschitz spaces and equivalent conditions. Furthermore, it explores the boundedness of the Calderón-Zygmund operator, fractional integral operator and hypersingular integral operator in Lipschitz spaces.

Key words: upper doubling measure metric space; fractional integrl operator; hypersingular integral operator; Lipschitz spaces