文章编号:1005-0523(2012)04-0046-06

几类高阶非齐次微分方程解的增长性

李朝蔚,刘慧芳,李延玲

(江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌 330022)

摘要:研究了一类高阶非齐次微分方程 $f^{(k)}+A_{k-1}(z)f^{(k-1)}+\cdots+A_0(z)f=Q(z)$,其中 $A_j(z)$ 为有限级整函数,$Q(z)$ 为次数小于 n 的多项式,和另一类高阶非齐次微分方程 $f^{(k)}+h_{k-1}(z)e^{a_{k-1}z}f^{(k-1)}+\cdots+h_1(z)e^{a_1z}f'+\left(A_1(z)e^{bz}+A_2(z)e^{dz}\right)f=Q(z)$,其中 $h_j(z)$,$A_i(z)$ 为级小于1的整函数,$Q(z)$ 为次数小于 n 的多项式,在一定条件下,得到了方程解的级的精确估计。

关键词:微分方程;整函数;级

中图分类号:O174.52 **文献标志码**:A

1 引言及主要结果

本文使用值分布论的标准记号[1-2],并用 $\sigma(f)$,$\sigma_2(f)$ 分别表示函数 f 的级、超级。

陈宗煊在文献[3]中证明了

定理A[3] 假设 $A_j(z)=h_j(z)e^{P_j(z)}$($j=0,\cdots,k-1$),其中 $h_j(z)$ 为整函数,$h_0\neq 0$ 且 $\sigma\left(h_j\right)<\deg P_j$,$P_j(z)=a_{jn}z^n+\cdots+a_{j0}$ 为次数不超过 $n\,(\geqslant 1)$ 的多项式,a_{ji}($j=0,\cdots,k-1$;$i=0,\cdots,n$)为复数,$a_{0n}\neq 0$,对 $1\leqslant j\leqslant k-1$,满足 $\arg a_{jn}\neq\arg a_{0n}\left(a_{jn}\neq 0\right)$ 或 $a_{jn}=0$,则方程 $f^{(k)}+A_{k-1}(z)f^{(k-1)}+\cdots+A_0(z)f=0$ 的每个非零解 f 具有无穷级且 $\sigma_2(f)=n$。

涂金和陈宗煊在文献[4]中证明了

定理B[4] 假设 $h_j(z)(\neq 0)$($j=0,\cdots,k-1$)为级小于1的整函数,a_j 为互异的复数,则方程 $f^{(k)}+h_{k-1}(z)e^{a_{k-1}z}f^{(k-1)}+\cdots+h_0(z)e^{a_0z}f=0$ 的所有超越解的增长级都为无穷。

李纯红和黄小军在文献[5]中证明了

定理C[5] 设 $A_j(z)(\neq 0)$($j=0,\cdots,k-1$)为级小于1的整函数,$a_j\in C\backslash\{0\}$ 且满足 $a_j=c_ja_0$ $\left(c_j>1,j=1,\ \cdots,k-1\right)$,$c_{k-1}>c:=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant k-2}c_j$,则方程 $f^{(k)}+A_{k-1}(z)e^{a_{k-1}z}f^{(k-1)}+\cdots+A_0(z)e^{a_0z}f=0$ 的所有非零解具有无穷级。

Cheng Tao和Kang Yueming在文献[6]中证明了

定理D[6] 假设 $A_j(z)(\neq 0)$($j=0,1,2$)为级小于1的整函数,a,b,d 是复常数且满足 $|a|\neq\max\{|b|,|d|\}$,则方程 $f''+A_1(z)e^{az}f'+\left(A_0(z)e^{bz}+A_2(z)e^{dz}\right)f=0$ 的每个非平凡解具有无穷级。

在以往的大部分线性微分方程解的增长性研究中,都类似定理A,B,C,D,主要研究了齐次线性微分方程。本文研究了几类高阶非齐次线性微分方程,得到

收稿日期:2012-04-06

作者简介:李朝蔚(1988-),男,硕士,研究方向为复分析。

定理1　假设 $A_j(z)=h_j(z)e^{P_j(z)}$（$j=0,\cdots,k-1$），其中：$h_j(z)(\not\equiv 0)$ 为整函数且 $\sigma(h_j)<n$，$P_j(z)=a_{jn}z^n+\cdots+a_{j0}$ 为 $n(\geqslant 1)$ 次多项式，其中 a_{jn}（$j=0,\cdots,k-1$）为互异的复数，$Q(z)$ 为次数小于 n 的非零多项式，则方程(1)的所有解具有无穷级。

$$f^{(k)}+A_{k-1}(z)f^{(k-1)}+\cdots+A_0(z)f=Q(z) \tag{1}$$

定理2　假设 $h_j(z)(\not\equiv 0)$（$j=1,\cdots,k-1$），$A_i(z)$（$i=1,2$）均为级小于1的整函数，a_j,b,d 为非零复常数且满足 $a_j=c_ja_1$（$c_j>1,j=2,\cdots,k-1$），$c_{k-1}>c:=\max\limits_{2\leqslant j\leqslant k-2}c_j$，$\arg a_1=\arg b=\arg d$，$|a_1|>\max\{|b|,|d|\}$，$Q(z)$ 为次数小于 n 的非零多项式，则方程(2)的所有解具有无穷级。

$$f^{(k)}+h_{k-1}(z)e^{a_{k-1}z}f^{(k-1)}+\cdots+h_1(z)e^{a_1z}f'+\left(A_1(z)e^{bz}+A_2(z)e^{dz}\right)f=Q(z) \tag{2}$$

2　引理

引理1[2]　设 $n\geqslant 1$，$P_1,\cdots,P_n$ 是次数分别为 $d_1,\cdots,d_n$ 的非常数多项式，满足当 $i\neq j$ 时，$\deg(P_i-P_j)=\max\{d_i,d_j\}$，令 $A(z)=\sum\limits_{j=1}^{n}B_j(z)e^{P_j(z)}$，其中：$B_j(z)(\not\equiv 0)$ 为整函数满足 $\sigma(B_j)<d_j$，则 $\sigma(A)=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\{d_j\}$。

引理2[7]　设 $f(z)$ 为超越亚纯函数满足 $\sigma(f)=\sigma<\infty$。$H=\{(k_1,j_1),\cdots,(k_m,j_m)\}$ 是不同整数对的有限集合，满足 $k_i>j_i\geqslant 0(i=1,\cdots,m)$。$\varepsilon>0$ 是任意给定的常数，则存在一线测度为零的集合 $E\subset[0,2\pi)$，使得若 $\theta\in[0,2\pi)\backslash E$，存在常数 $R_0=R_0(\theta)>1$，使对任意满足 $\arg z=\theta$ 和 $|z|>R_0$ 的 z 以及对所有 $(k,j)\in H$，有

$$\left|f^{(k)}(z)/f^{(j)}(z)\right|\leqslant|z|^{(k-j)(\sigma-1+\varepsilon)}$$

引理3[8]　设 $P(z)=(\alpha+i\beta)z^n+\cdots(\alpha,\beta\in R)$ 为非常数 n 次多项式，记 $\delta(P,\theta)=\alpha\cos n\theta-\beta\sin n\theta$，$\theta\in[0,2\pi)$。$\omega(z)\not\equiv 0$ 是整函数满足 $\sigma(\omega)<n$，令 $g=\omega e^P$，则存在零测度集 $H_1\subseteq[0,2\pi)$，使得 $\forall\theta\in[0,2\pi)\backslash(H_1\cup H_2)$ 及给定常数 $\varepsilon(0<\varepsilon<1)$，当 $r>r_0(\theta,\varepsilon)$ 时，有

(i) 若 $\delta(P,\theta)<0$，则 $\exp\left((1+\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\right)\leqslant\left|g(re^{i\theta})\right|\leqslant\exp\left((1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\right)$；

(ii) 若 $\delta(P,\theta)>0$，则 $\exp\left((1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\right)\leqslant\left|g(re^{i\theta})\right|\leqslant\exp\left((1+\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\right)$，

其中：$H_2=\{\theta:\delta(P,\theta)=0,0\leqslant\theta<2\pi\}$ 是有限集。

引理4　设 $f(z)$ 为非常数整函数。若在射线 $\arg z=\theta$ 上有 $\left|f^{(k)}(z)\right|>M|z|^n$，则存在一无穷点列 $z_m=r_me^{i\theta}$（$m=1,2,\cdots$），满足 $r_m\to\infty(m\to\infty)$，且当 r_m 充分大时，有

$$\left|f^{(j)}(z_m)/f^{(k)}(z_m)\right|\leqslant r_m^{k-j}(1+o(1))\quad(j=0,\cdots,k-1) \tag{3}$$

其中：M 为正常数(本文中 M 每次出现不必相同)，n 为正整数；$o(1)$ 为无穷小量。

证明　令 $M(r,f^{(k)},\theta)=\max\left\{\left|f^{(k)}(z)\right|:0\leqslant|z|\leqslant r,\arg z=\theta\right\}$。则存在一无穷点列 $z_m=r_me^{i\theta}$（$m=1,2,\cdots$），其中 $r_m\to\infty$，使得 $M(r_m,f^{(k)},\theta)=\left|f^{(k)}(z_m)\right|$。

对每个 m，取积分路径 $\Gamma=\{u:0\leqslant|u|\leqslant|z_m|,\arg u=\theta\}$，有 $f^{(k-1)}(z_m)=\int_0^{z_m}f^{(k)}(u)du+f^{(k-1)}(0)$。

由于 $\left|f^{(k)}(u)\right|\leqslant M(r_m,f^{(k)},\theta)=\left|f^{(k)}(z_m)\right|$，所以 $\left|f^{(k-1)}(z_m)\right|\leqslant\left|f^{(k)}(z_m)\right|r_m+\left|f^{(k-1)}(0)\right|$，

故 $$\left|f^{(k-1)}(z_m)/f^{(k)}(z_m)\right|\leqslant r_m(1+o(1))。$$

又 $f^{(k-2)}(z_m)=\int_0^{z_m} f^{(k-1)}(u)\mathrm{d}u+f^{(k-2)}(0)=\int_0^{z_m}\left\{\int_0^u f^{(k)}(w)\mathrm{d}w+f^{(k-1)}(0)\right\}\mathrm{d}u+f^{(k-2)}(0)$，

故 $\left|f^{(k-2)}(z_m)\right|\leqslant \max\limits_{0\leqslant|u|\leqslant r_m}\left\{\left|\int_0^u f^{(k)}(w)\mathrm{d}w\right|+\left|f^{(k-1)}(0)\right|\right\}r_m+\left|f^{(k-2)}(0)\right|\leqslant\left|f^{(k)}(z_m)\right|r_m^2+\left|f^{(k-1)}(0)\right|r_m+\left|f^{(k-2)}(0)\right|$。

故
$$\left|f^{(k-2)}(z_m)/f^{(k)}(z_m)\right|\leqslant r_m^2(1+o(1))\text{。}$$

从而由数学归纳法可证得 $\left|f^{(j)}(z_m)/f^{(k)}(z_m)\right|\leqslant r_m^{k-j}(1+o(1))\quad(j=0,\cdots,k-1)$。

引理5[8] 设 f 为整函数满足 $\sigma(f)=\sigma<\infty$。若存在一线测度为零的集合 $E\subset[0,2\pi)$，使得对任意给定的 $\arg z=\theta_0\in[0,2\pi)\backslash E$，有 $\left|f\left(r\mathrm{e}^{i\theta_0}\right)\right|\leqslant Mr^k$（其中 $M=M(\theta_0)>0$ 是一个常数，$k>0$ 是与 θ_0 无关的常数），则 $f(z)$ 是次数不超过 k 的多项式。

3 定理1的证明

由复域微分方程的基本理论可知，方程(1)的任一解均为整函数。

假设方程(1)存在多项式解 $f(z)=a_pz^p+\cdots+a_0\ \ (a_p\neq 0)$，由引理1知(1)左边的级为 n，这与(1)右边的级 $\sigma(Q(z))=0$ 矛盾！故方程(1)不存在多项式解。

假设方程(1)存在一超越解 f 满足 $\sigma(f)=\sigma<\infty$，则由引理2，存在集合 $E_1\subset[0,2\pi)$ 且 $mE_1=0$，使得 $\forall\theta\in[0,2\pi)\setminus E_1$，均存在一常数 $R_0=R_0(\theta)>1$，使对任意满足 $\arg z=\theta$ 和 $|z|>R_0$ 的 z，有
$$\left|f^{(j)}(z)/f^{(i)}(z)\right|\leqslant|z|^{k\sigma}\quad(0\leqslant i<j\leqslant k)\tag{4}$$

记 $E_2=\left\{\theta\in[0,2\pi):\delta(P_j,\theta)=0,j=0,\cdots,k-1\right\}\cup\left\{\theta\in[0,2\pi):\delta(P_i,\theta)=\delta(P_j,\theta),0\leqslant i<j\leqslant k-1\right\}$，则 E_2 为有限集。设 H_j 为应用引理3时存在的零测度例外集，则集合 $E_3=\bigcup\limits_{j=0}^{k-1}H_j$ 的线测度为0。

任取射线 $\arg z=\theta\in[0,2\pi)\setminus(E_1\cup E_2\cup E_3)$，则有 $\delta(P_j,\theta)\neq 0$，$\delta(P_i,\theta)\neq\delta(P_j,\theta)$。由于 a_{jn} 为互异的复数，则 $\forall\theta\in[0,2\pi)\setminus(E_1\cup E_2\cup E_3)$，有且仅有一个 s，满足 $\delta(P_s,\theta)=\max\left\{\delta(P_j,\theta):j=0,\cdots,k-1\right\}=\delta$，令 $\delta_1=\max\left\{\delta(P_j,\theta):j\neq s\right\}$，则 $\delta_1<\delta$。下面分3种情况讨论。

情形Ⅰ $\delta_1<\delta<0$。由方程(1)，有
$$1\leqslant|A_{k-1}|\left|f^{(k-1)}/f^{(k)}\right|+\cdots+|A_j|\left|f^{(j)}/f^{(k)}\right|+\cdots+|A_0|\left|f/f^{(k)}\right|+\left|Q/f^{(k)}\right|\tag{5}$$

若在射线 $\arg z=\theta$ 上有 $\left|f^{(k)}(z)\right|>M|z|^n$，则由引理4，存在一无穷点列 $z_m=r_m\mathrm{e}^{i\theta}$（$m=1，2，\cdots$），其中：$r_m\to\infty$，有(3)式成立。

注意到 $Q(z)$ 是次数小于 n 的非零多项式，设 b 是 $Q(z)$ 按次数从高到低排列后的首项系数。由 $\left|f^{(k)}(z_m)\right|>Mr_m^n$，易得
$$\left|\frac{Q(z_m)}{f^{(k)}(z_m)}\right|<\frac{br_m^{n-1}(1+o(1))}{Mr_m^n}\to 0\tag{6}$$

由引理3，$\forall\varepsilon_1\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$ 及充分大的 r，有

$$\left|A_j(z_m)\right| \leqslant \exp\left\{(1-\varepsilon_1)\delta r_m^n\right\} \qquad (j=0,\cdots,k-1) \tag{7}$$

由(3)(5)(6)(7),得

$1 \leqslant \exp\left\{(1-\varepsilon_1)\delta r_m^n\right\} r_m(1+o(1)) + \cdots + \exp\left\{(1-\varepsilon_1)\delta r_m^n\right\} r_m^k(1+o(1)) + \left|Q(z_m)/f^{(k)}(z_m)\right| \to 0$,矛盾！故在射线 $\arg z=\theta$ 上有 $\left|f^{(k)}(re^{i\theta})\right| \leqslant M|z|^n$。

取积分路径 $\Gamma=\{t: \arg z=\theta, 0 \leqslant |t| \leqslant |z|\}$,则当 $|z|$ 充分大时,

$$\left|f^{(k-1)}(z)\right| \leqslant \left|f^{(k-1)}(0)\right| + \left|\int_0^z f^{(k)}(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant M|z|^{n+1}$$

逐次积分得,当 $|z|$ 充分大时,在射线 $\arg z=\theta$ 上有

$$\left|f(re^{i\theta})\right| \leqslant Mr^k \tag{8}$$

情形Ⅱ　$0<\delta_1<\delta$。由引理3,$\forall \varepsilon_2 \in \left(0, \dfrac{2(\delta-\delta_1)}{3(\delta+\delta_1)}\right)$ 及充分大的 r,有

$$\left|A_s(re^{i\theta})\right| \geqslant \exp\left\{(1-\varepsilon_2)\delta r^n\right\}; \left|A_j(re^{i\theta})\right| \leqslant \exp\left\{(1+\varepsilon_2)\delta_1 r^n\right\} \quad (j \neq s) \tag{9}$$

若在射线 $\arg z=\theta$ 上有 $\left|f^{(s)}(z)\right| > M|z|^n$,类似情形(Ⅰ),由引理4,存在一无穷点列 $z_m=r_m e^{i\theta}$($m=1$,2,…),其中 $r_m \to \infty$,满足

$$\left|f^{(j)}(z_m)/f^{(s)}(z_m)\right| \leqslant r_m^{s-j}(1+o(1)) \quad (j=0,\cdots,s-1); \left|Q(z_m)/f^{(s)}(z_m)\right| \to 0 \tag{10}$$

把(4)(9)(10)代入方程(1),得

$\exp\left\{(1-\varepsilon_2)\delta r_m^n\right\} \leqslant \left|A_s(z_m)\right| \leqslant \left|f^{(k)}(z_m)/f^{(s)}(z_m)\right| + \cdots + \left|A_{s+1}(z_m)\right|\left|f^{(s+1)}(z_m)/f^{(s)}(z_m)\right| + \left|A_{s-1}(z_m)\right|\left|f^{(s-1)}(z_m)/f^{(s)}(z_m)\right| + \cdots + \left|A_0(z_m)\right|\left|f(z_m)/f^{(s)}(z_m)\right| + \left|Q(z_m)/f^{(s)}(z_m)\right| \leqslant (k+1)\exp\left\{(1+\varepsilon_2)\delta_1 r_m^n\right\} r_m^M(1+o(1))$。

由上式得,$\exp\left\{\frac{1}{3}(\delta-\delta_1)r_m^n\right\} \leqslant (k+1)r_m^M(1+o(1))$,矛盾！

类似地,当 $|z|$ 充分大时,在射线 $\arg z=\theta$ 上有(8)式成立。

情形Ⅲ　$\delta_1<0<\delta$。由引理3,$\forall \varepsilon_3 \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ 及充分大的 r,有

$$\left|A_s(re^{i\theta})\right| \geqslant \exp\left\{(1-\varepsilon_3)\delta r^n\right\}; \left|A_j(re^{i\theta})\right| \leqslant \exp\left\{(1-\varepsilon_3)\delta_1 r^n\right\} \quad (j \neq s) \tag{11}$$

若在射线 $\arg z=\theta$ 上有 $\left|f^{(s)}(z)\right| > M|z|^n$,类似地,把(4)(10)(11)代入方程(1),得

$\exp\left\{(1-\varepsilon_3)\delta r_m^n\right\} \leqslant \left|A_s(z_m)\right| \leqslant \left|f^{(k)}(z_m)/f^{(s)}(z_m)\right| + \cdots + \left|A_{s+1}(z_m)\right|\left|f^{(s+1)}(z_m)/f^{(s)}(z_m)\right| + \left|A_{s-1}(z_m)\right|\left|f^{(s-1)}(z_m)/f^{(s)}(z_m)\right| + \cdots + \left|A_0(z_m)\right|\left|f(z_m)/f^{(s)}(z_m)\right| + \left|Q(z_m)/f^{(s)}(z_m)\right| \leqslant (k+1)\exp\left\{(1-\varepsilon_3)\delta_1 r_m^n\right\} r_m^M(1+o(1))$。

注意到 $\delta_1<0<\delta$,则 $\exp\left\{(1-\varepsilon_3)\delta r_m^n\right\} \to \infty$,$\exp\left\{(1-\varepsilon_3)\delta_1 r_m^n\right\} \to 0$,矛盾！

类似地,当 $|z|$ 充分大时,在射线 $\arg z=\theta$ 上有(8)式成立。

综合情形Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,由引理5得,$f(z)$ 为一多项式,这与假设矛盾！故方程的任一超越解 f 满足 $\sigma(f)=\infty$。证毕。

4　定理2的证明

类似定理1的证明方法,可知方程(2)没有多项式解。

假设方程(2)存在一超越解 f 满足 $\sigma(f)=\sigma<\infty$。只证明 $b\neq d$ 的情况,对于 $b=d$ 的情况可以用类似方法证明,且更为简单。由引理2,存在集合 $E_4\subset[0,2\pi)$ 且 $mE_4=0$,使得 $\forall\theta\in[0,2\pi)\backslash E_4$,均存在一常数 $R_1=R_1(\theta)>1$,使对任意满足 $\arg z=\theta$ 和 $|z|>R_1$ 的 z,有

$$\left|f^{(k)}(z)/f^{(k-1)}(z)\right|\leqslant|z|^{\sigma-1+\varepsilon} \tag{12}$$

记 $E_5=\left\{\theta\in[0,2\pi):\delta(a_1z,\theta)=0\right\}$,则 E_5 为有限集。

$\forall\theta\in[0,2\pi)\backslash(E_4\cup E_5)$,分 $\delta(a_1z,\theta)<0$ 和 $\delta(a_1z,\theta)>0$ 两种情形讨论。

情形Ⅰ $\delta(a_1z,\theta)<0$。由已知有 $\max\{\delta(bz,\theta),\delta(dz,\theta)\}<\delta(a_1z,\theta)<0$。由方程(2),有

$$1\leqslant\left|h_{k-1}e^{a_{k-1}z}\right|\left|f^{(k-1)}/f^{(k)}\right|+\cdots+\left|h_1e^{a_1z}\right|\left|f'/f^{(k)}\right|+\left|A_1e^{bz}+A_2e^{dz}\right|\left|f/f^{(k)}\right|+\left|Q/f^{(k)}\right| \tag{13}$$

若在射线 $\arg z=\theta$ 上有 $\left|f^{(k)}(z)\right|>M|z|^n$,则由引理4,存在一无穷点列 $z_m=r_me^{i\theta}$($m=1,2,\cdots$),其中 $r_m\to\infty$,有(3)式和(6)式成立。

由(3)(6)(13)并结合引理3,$\forall\varepsilon_4\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$,有

$1\leqslant\exp\left\{(1-\varepsilon_4)c_{k-1}\delta(a_1z,\theta)r_m\right\}r_m(1+o(1))+\cdots+\exp\left\{(1-\varepsilon_4)\delta(a_1z,\theta)r_m\right\}r_m^{k-1}(1+o(1))+\left|\exp\left\{(1-\varepsilon_4)\delta(bz,\theta)r_m\right\}+\exp\left\{(1-\varepsilon_4)\delta(dz,\theta)r_m\right\}\right|r_m^k(1+o(1))+\left|Q(z_m)/f^{(k)}(z_m)\right|\to0$,矛盾!类似地,当 $|z|$ 充分大时,在射线 $\arg z=\theta$ 上有(8)式成立。

情形Ⅱ $\delta(a_1z,\theta)>0$。由已知有 $\delta(a_jz,\theta)=c_j\delta(a_1z,\theta)>0\,(j=2,\cdots,k-1)$。

若在射线 $\arg z=\theta$ 上有 $\left|f^{(k-1)}(z)\right|>M|z|^n$,类似情形Ⅰ,由引理4,存在一无穷点列 $z_m=r_me^{i\theta}$($m=1,2,\cdots$),其中:$r_m\to\infty$,满足

$$\left|f^{(j)}(z_m)/f^{(k-1)}(z_m)\right|\leqslant r_m^{k-1-j}(1+o(1))\quad(j=0,\cdots,k-2);\left|Q(z_m)/f^{(k-1)}(z_m)\right|\to0 \tag{14}$$

把(12)(14)代入方程(2),结合引理3,并注意到 $|a_1|>\max\{|b|,|d|\}$ 及 $\arg a_1=\arg b=\arg d$,故 $\forall\varepsilon_5\in\left(0,\frac{c_{k-1}-c}{2(c_{k-1}+c)}\right)$ 及充分大的 r,有

$\exp\left\{(1-\varepsilon_5)c_{k-1}\delta(a_1z,\theta)r_m\right\}\leqslant\left|h_{k-1}(z_m)e^{a_{k-1}z}\right|\leqslant\left|f^{(k)}(z_m)/f^{(k-1)}(z_m)\right|+\left|h_{k-2}(z_m)e^{a_{k-2}z}\right|\left|f^{(k-2)}(z_m)/f^{(k-1)}(z_m)\right|+\cdots+\left|h_1(z_m)e^{a_1z}\right|\left|f'(z_m)/f^{(k-1)}(z_m)\right|+\left|A_1(z_m)e^{bz}+A_2(z_m)e^{dz}\right|\left|f(z_m)/f^{(k-1)}(z_m)\right|+\left|Q(z_m)/f^{(k-1)}(z_m)\right|\leqslant(k+1)\exp\left\{(1+\varepsilon_5)c\delta(a_1z,\theta)r_m\right\}r_m^M(1+o(1))$。

由上式得,$\exp\left\{\frac{1}{2}(c_{k-1}-c)\delta(a_1z,\theta)r_m\right\}\leqslant(k+1)r_m^M(1+o(1))$,矛盾!

类似地,当 $|z|$ 充分大时,在射线 $\arg z=\theta$ 上有(8)式成立。

综合情形Ⅰ,Ⅱ,由引理5得,$f(z)$ 为一多项式,这与假设矛盾!故方程的任一超越解 f 满足 $\sigma(f)=\infty$。证毕。

参考文献:

[1] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京:科学出版社,1988:18.

[2] 高仕安,陈宗煊,陈特为. 线性微分方程的复振荡理论[M]. 武昌:华中理工大学出版社,1997:33.

[3] 陈宗煊. 一类高阶线性微分方程解的增长率[J]. 江西师范大学学报,2000,24(3):194-197.

[4] 涂金,陈宗煊. 一类高阶微分方程解的增长性[J]. 数学物理学报,2008,28(4):670-678.

[5] 李纯红,黄小军. 一类高阶线性微分方程解的增长性[J]. 数学物理学报,2003,23(5):613-618.

[6] CHENG TAO,KANG YUEMING. The growth of solutions of a certain linear differential equation[J]. Journal of Fudan University,2006,45(5):611-618.

[7] GUNDERSEN G. Estimates for the logarithmic derivate of a meromorphic function,plus similar estimates[J]. London Math Soc,1988,37(2):88-104.

[8] CHEN ZONGXUAN. On the hyper order of solutions of higher order differential equations[J]. China Ann Math,2003,24(4):501-508.

[9] 王锦熙,易才凤. 亚纯函数的迭代级Borel方向[J]. 华东交通大学学报,2009,26(1):94-96.

Growth of Solutions of Several Classes of Higher Order Non-homogeneous Differential Equations

Li Zhaowei,Liu Huifang,Li Yanling

(Institute of Mathematics and Information Science,Jiangxi Normal University,Nanchang 330022,China)

Abstract:In the paper,the authors investigate one class of higher order non-homogeneous differential equations $f^{(k)}+A_{k-1}(z)f^{(k-1)}+\cdots+A_0(z)f=Q(z)$, where $A_j(z)$ are entire functions of finite order, $Q(z)$ are polynomials with $\deg Q<n$, and another class of higher order non-homogeneous differential equations $f^{(k)}+h_{k-1}(z)e^{a_{k-1}z}f^{(k-1)}+\cdots+h_1(z)e^{a_1z}f'+\left(A_1(z)e^{bz}+A_2(z)e^{dz}\right)f=Q(z)$, where $h_j(z)$, $A_i(z)$ are entire functions, $\sigma\left(h_j\right)<1$ and $\sigma\left(A_i\right)<1$, $Q(z)$ are polynomials with $\deg Q<n$. Under certain conditions, the authors obtain some precise estimates of the order of solutions for those equations.

Key words:differential equation;entire function;order