

文章编号:1005-0523(2012)04-0064-05

关于圈 C_n 的 IC -着色和 IC -指数

周娟¹, 谢承旺¹, 徐保根², 黄占伟³

(华东交通大学1. 软件学院; 2. 基础学院, 江西 南昌 330013; 3. 江西省宜春市科学技术情报所, 江西 宜春 336000)

摘要: 设正整数 $x_i = f(v_i)$ 是图 G 的顶点 v_i 的着色, H 是 G 的子图, $f(H)$ 是 H 的顶点着色的和, 若对任意正整数 $j (1 \leq j \leq f(G))$ 都存在 G 的连通子图 H 使得 $j = f(H)$, 则称 f 是 G 的 IC -着色。若 $f(G)$ 最大, 则称 $f(G)$ 为 G 的 IC -指数。考虑了圈 C_n 的 IC -着色和 IC -指数 I ; 得到了: 当 $n = 10, 11, 12, 14$ 时 C_n 的 IC -指数。

关键词: IC -着色; IC -指数; 连通图; 圈

中图分类号: O157.5

文献标志码: A

1 基本概念

定义 1 设 $G = (V, E)$ 是一个图, N 是正整数集。 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, f 是定义在 V 上的, 取值在 N 的函数, 若对于任意两个相连的点 v_i 和 v_j , $f(v_i) \neq f(v_j)$, 则称 f 是 G 的一个着色。^[1]

定义 2 设 $G = (V, E)$ 是一个图, 对于图 G 的一个着色 f 和 G 的一个子图 H , 则记 $f(H) = \sum_{v \in V(H)} f(v)$ 。如果对于每一个整数 k , $(1 \leq k \leq f(G))$, 存在 G 的一个连通子图 H 使得 $f(H) = k$, 则称 f 为图 G 的一个 IC -着色 (IC -coloring)。图 G 的 IC -指数 (IC -indices) 定义为 $M(G) = \max\{f(G) | f \text{ 为图 } G \text{ 的一个 } IC\text{-着色}\}$ 并且称适合 $f(G) = M(G)$ 的 IC -着色, f 为图 G 的一个极大 IC -着色。

由定义易见, 一个图 G 存在 IC -着色 当且仅当 G 为连通图。

一般地说, 确定一个图的 IC -指数 是困难的, 由文献[2-9]已知指数的图: 完全图 K_n , 星 ST_n , 完全二部图 $K_{m,n}$, 圈 C_n , 路 P_n , $K_n - e$ 表示减掉一条边的完全图, 如下。

1) ^[6] $M(K_n) = 2^n - 1$; K_n 的最大着色: $(1, 2, 4, 8, \dots, 2^{n-1})$ 。

2) ^[6] $M(K_3 - e) = 6$; $M(K_n - e) = 2^n - 3$, $n \geq 4$ 。

3) ^[5] $M(K_{m,n}) = 3 \times 2^{m+n-2} - 2^{m-2} + 2$, $2 \leq m \leq n$ 。

$K_{m,n}$ 的最大着色: x_i 是 K_m 的着色, y_i 是 K_n 的着色

$$x_1 = 1, x_2 = 2, y_1 = 3$$

$$y_i = 2y_{i-1}, 2 \leq i \leq n-1$$

$$y_n = 2y_{n-1} + 1$$

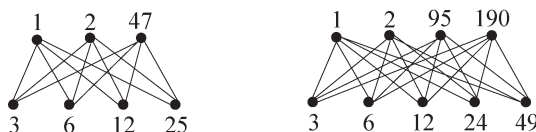
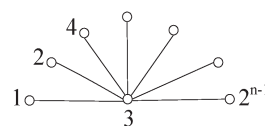
$$x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_{i-1} + y_1 + y_2 + \dots + y_n - 2, 3 \leq i \leq m$$

例 1 $K_{3,4}$ 和 $K_{4,5}$ 的最大着色, 如图 1。

收稿日期: 2012-02-01

基金项目: 国家自然科学基金项目 (11061014); 江西省自然科学基金项目 (20114BAB201027, 2010GZS0031, 20114BAB201025); 江西省教育厅科技项目 (GJJ12307); 江西省科技支撑计划项目 (20112BBE50026)

作者简介: 周娟 (1977-), 女, 讲师, 硕士, 研究方向为算法设计与分析、图论。

图1 $K_{3,4}$ 和 $K_{4,5}$ 的最大 IC -着色Fig.1 Max IC -coloring of $K_{3,4}$ and $K_{4,5}$ 图2 ST_n 的最大 IC -着色Fig.2 Max IC -coloring of ST_n

$$4)^{[2]} \quad M(ST_n) = 2^n + 2, 2 \leq n.$$

例2 ST_n 的最大 IC -着色如图2, $(3, 1, 2, 4, 8, \dots, 2^{n-1})$, 中心点着色为3。

$$5)^{[6]} \quad 3 \leq n \leq 9, n \neq 7, M(C_n) = n(n-1) + 1.$$

C_4 的两个最大着色: $(1, 2, 6, 4), (1, 3, 2, 7)$

C_5 的最大着色: $(1, 3, 10, 2, 5)$

C_6 的最大着色: $(1, 2, 7, 4, 12, 5)$

以下是本文提供的:

C_8 的最大着色: $(1, 2, 10, 19, 4, 7, 9, 5)$

$(1, 3, 5, 11, 2, 12, 17, 6)$

$(1, 3, 8, 2, 16, 7, 15, 5)$

$(1, 4, 2, 10, 18, 3, 11, 8)$

$(1, 4, 22, 7, 3, 6, 2, 12)$

$(1, 6, 12, 4, 21, 3, 2, 8)$

C_9 的最大着色: $(1, 2, 4, 8, 16, 5, 18, 9, 10)$

$(1, 4, 7, 6, 3, 28, 2, 8, 14)$

$(1, 6, 4, 24, 13, 3, 2, 12, 8)$

对于其他类型的某些图, 只知其界

$$6)^{[2]} \quad (n+1)n \geq M(P_n) \geq (2 + \frac{n}{2})(n - \frac{n}{2}) + \frac{n}{2} - 1.$$

$$7)^{[4,7]} \quad \text{对任意连通图 } G \text{ 和 } H, \text{ 均有 } M(G+H) \geq (M(G) + 1)(M(H) + 1) - 1$$

$$8)^{[4,7]} \quad \text{设 } n(n \geq 2) \text{ 个整数 } b_i (i = 1, 2, \dots, n) \text{ 适合 } b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_n \geq 2, \text{ 则有 } M(ST(n; b_1, b_2, \dots, b_n)) \geq 2b_1 + \sum (b_{i+1} - 1)b_n^i, 1 \leq i \leq n$$

$$9)^{[2]} \quad (n+1)\frac{n}{2} \leq M(C_n) \leq n(n-1) + 1$$

2 圈 C_n 的 IC -指数的几个结果

根据前面的(5), 目前已知: 当 $3 \leq n \leq 9, n \neq 7$, 圈 C_n 的 IC -指数 $M(C_n) = n(n-1) + 1$; 它的着色无规律, 对更大的 n 要确定 IC -指数是困难的。利用计算机对圈进行着色。得到了: 当 $n = 10, 11, 12, 14$ 时 C_n 的 IC -指数。设 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 是圈 C_n 的顶点集且 $v_i v_{i+1}, v_n v_1$ 是 C_n 的边, $1 \leq i \leq n-1$ 。将边 $v_n v_1$ 切掉就得到 v_1 为端点的 n 个点的路。把 v_1 称为左端点, 以 v_1 为左端点的连通真子图有 $n-1$ 个: 1个点的连通子图 v_1 , 2个点的连通子图 $v_1 v_2, \dots, n-1$ 个点的连通子图 $v_1 v_2, \dots, v_{n-1}$ 。以每个点为左端点的连通真子图都有 $n-1$ 个, 因此 C_n 共有 $n(n-1) + 1$ 个连通子图。

定理 当 $n = 10, 12, 14$ 时 C_n 的 IC -指数 $M(C_n) = n(n-1) + 1$;

$$n = 11 \text{ 时, } M(C_n) = 95$$

证明 1) $n=10$, $x_i=f(v_i)$, $(x_1, x_2, \dots, x_n)=(1, 2, 6, 18, 22, 7, 5, 16, 4, 10)$ 是 C_n 的一个着色, 下面给出以 v_i 为左端点的9个连通子图的着色, $1 \leq i \leq 10$:

$v_1: 1, 3, 9, 27, 49, 56, 61, 77, 81。$

$v_2: 2, 8, 26, 48, 55, 60, 76, 80, 90。$

$v_3: 6, 24, 46, 53, 58, 74, 78, 88, 89。$

$v_4: 18, 40, 47, 52, 68, 72, 82, 83, 85。$

$v_5: 22, 29, 34, 50, 54, 64, 65, 67, 73。$

$v_6: 7, 12, 28, 32, 42, 43, 45, 51, 69。$

$v_7: 5, 21, 25, 35, 36, 38, 44, 62, 84。$

$v_8: 16, 20, 30, 31, 33, 39, 57, 79, 86。$

$v_9: 4, 14, 15, 17, 23, 41, 63, 70, 75。$

$v_{10}: 10, 11, 13, 19, 37, 59, 66, 71, 87。$

以上90个数遍历 $[1, 90]$, $f(C_n)=91$, 即对任意 $j(1 \leq j \leq f(C_n)=91)$, 都存在 G 的连通子图 H 使得 $j=f(H)$ 。因此 $(1, 2, 6, 18, 22, 7, 5, 16, 4, 10)$ 是 C_n 的一个最大着色, $M(C_n)=n(n-1)+1=91$ 。

2) $n=12$, $(1, 2, 9, 8, 14, 4, 43, 7, 6, 10, 5, 24)$ 是 C_n 的一个最大着色。以下132个数遍历 $[1, 132]$:

$v_1: 1, 3, 12, 20, 34, 38, 81, 88, 94, 104, 109。$

$v_2: 2, 11, 19, 33, 37, 80, 87, 93, 103, 108, 132。$

$v_3: 9, 17, 31, 35, 78, 85, 91, 101, 106, 130, 131。$

$v_4: 8, 22, 26, 69, 76, 82, 92, 97, 121, 122, 124。$

$v_5: 14, 18, 61, 68, 74, 84, 89, 113, 114, 116, 125。$

$v_6: 4, 47, 54, 60, 70, 75, 99, 100, 102, 111, 119。$

$v_7: 43, 50, 56, 66, 71, 95, 96, 98, 107, 115, 129。$

$v_8: 7, 13, 23, 28, 52, 53, 55, 64, 72, 86, 90。$

$v_9: 6, 16, 21, 45, 46, 48, 57, 65, 79, 83, 126。$

$v_{10}: 10, 15, 39, 40, 42, 51, 59, 73, 77, 120, 127。$

$v_{11}: 5, 29, 30, 32, 41, 49, 63, 67, 110, 117, 123。$

$v_{12}: 24, 25, 27, 36, 44, 58, 62, 105, 112, 118, 128。$

3) $n=14$, $(1, 2, 13, 7, 5, 14, 34, 6, 4, 33, 18, 17, 21, 8)$ 是 C_n 的一个最大着色。以下182个数遍历 $[1, 182]$:

$v_1: 1, 3, 16, 23, 28, 42, 76, 82, 86, 119, 137, 154, 175。$

$v_2: 2, 15, 22, 27, 41, 75, 81, 85, 118, 136, 153, 174, 182。$

$v_3: 13, 20, 25, 39, 73, 79, 83, 116, 134, 151, 172, 180, 181。$

$v_4: 7, 12, 26, 60, 66, 70, 103, 121, 138, 159, 167, 168, 170。$

$v_5: 5, 19, 53, 59, 63, 96, 114, 131, 152, 160, 161, 163, 176。$

$v_6: 14, 48, 54, 58, 91, 109, 126, 147, 155, 156, 158, 171, 178。$

$v_7: 34, 40, 44, 77, 95, 112, 133, 141, 142, 144, 157, 164, 169。$

$v_8: 6, 10, 43, 61, 78, 99, 107, 108, 110, 123, 130, 135, 149。$

$v_9: 4, 37, 55, 72, 93, 101, 102, 104, 117, 124, 129, 143, 177。$

$v_{10}: 33, 51, 68, 89, 97, 98, 100, 113, 120, 125, 139, 173, 179。$

$v_{11}: 18, 35, 56, 64, 65, 67, 80, 87, 92, 106, 140, 146, 150。$

$v_{12}: 17, 38, 46, 47, 49, 62, 69, 74, 88, 122, 128, 132, 165。$

$v_{13}: 21, 29, 30, 32, 45, 52, 57, 71, 105, 111, 115, 148, 166。$

$v_{14}: 8, 9, 11, 24, 31, 36, 50, 84, 90, 94, 127, 145, 162。$

4) $n=11$, $(1, 2, 4, 9, 3, 22, 5, 21, 11, 10, 7)$ 是 C_n 的一个最大着色。 $M(C_n)=95$ 。以下 110 个数遍历 $[1, 94]$:

$v_1: 1, 3, 7, 16, 19, 41, 46, 67, 78, 88。$

$v_2: 2, 6, 15, 18, 40, 45, 66, 77, 87, 94。$

$v_3: 4, 13, 16, 38, 43, 64, 75, 85, 92, 93。$

$v_4: 9, 12, 34, 39, 60, 71, 81, 88, 89, 91。$

$v_5: 3, 25, 30, 51, 62, 72, 79, 80, 82, 86。$

$v_6: 22, 27, 48, 59, 69, 76, 77, 79, 83, 92。$

$v_7: 5, 26, 37, 47, 54, 55, 57, 61, 70, 73。$

$v_8: 21, 32, 42, 49, 50, 52, 56, 65, 68, 90。$

$v_9: 11, 21, 28, 29, 31, 35, 44, 47, 69, 74。$

$v_{10}: 10, 17, 18, 20, 24, 33, 36, 58, 63, 84。$

$v_{11}: 7, 8, 10, 14, 23, 26, 48, 53, 74, 85。$

3 算法

要确定 C_n 的 IC 指数为 $n(n-1)+1$, 就是要找 n 个正整数 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 使得 $x_1, x_2, \dots, x_n; x_1+x_2, x_2+x_3, \dots, x_n+x_1; x_1+x_2+x_3, x_2+x_3+x_4, \dots, x_n+x_2+x_1; x_1+x_2+x_3+x_4, x_2+x_3+x_4+x_5, \dots, x_n+x_1+x_2+x_3; \dots; x_1+x_2+\dots+x_{n-1}+x_n$ 。这 $n(n-1)+1$ 个数恰好就是 $1, 2, 3, \dots, n(n-1)+1$ 。

设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为 C_n 的一个着色, 使得其 C_n 的 IC 指数为 $n(n-1)+1$ 。

性质 1 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是 n 个不同的正整数, 且其中有一个为 1, 有一个为 2, $x_1+x_2+\dots+x_n=n(n-1)+1$ 。

根据对称性, 可设 $x_1=1, x_2 < x_n$ 。

例 对 C_6 , $n(n-1)+1=31$, 找到 6 个数 $1, 2, 5, 4, 6, 13$, 相邻 2 数之和: $3, 7, 9, 10, 19, 14$; 相邻 3 数之和: $8, 11, 15, 23, 20, 16$; 相邻 4 数之和 $12, 17, 28, 24, 22, 21$; 以上这些数中, 从 1 至 15 这 15 个数都出现了。1 个数是 1, 那么 $31-1=30$, 就是另外 5 个数之和, 因此 1 至 31 都恰好出现了。

性质 2 $\max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \leq n(n-1)/2 + 1$

性质 3 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 中最大的 2 个数之和小于 $n(n-1)/2 + 1 + n - 1 = n(n+1)/2$

例 对 C_6 , $\max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \leq 16$ 。如果某 $x_i=16$, 则其余 5 个数只能是最小的 5 个数 $1, 2, 3, 4, 5$ 。如最大 2 数之和为 21, 则其余 4 数是 $1, 2, 3, 4$ 。性质 3 亦可如此计算出: $n(n-1)+1 - \sum_{i=1}^{n-2} i = n(n+1)/2$

根据以上性质, 可以得出枚举算法, 在区间 $[2, x_{\max}]$ 里筛选出 $n-1$ 个不同的数, 使得 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是一个新的着色。其计算量小于 $\frac{x_{\max}!}{(n-1)!}$, 其中 $x_{\max} = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 。

参考文献:

- [1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory with applications[M]. Amsterdam: Elsevier Science Publishing Co., Inc, 1976: 156-160.
- [2] SALEHI E, SIN-MIN LEE, KHATIRINEJAD M S. *IC*-colorings and *IC*-indices of graphs[J]. Discrete Mathematics, 2005, 299(8):297-310.
- [3] GALLIAN J A. A survey: recent results, conjectures and open problems in labeling graphs[J]. Journal of Graph Theory, 1989, 13(9):29-37.
- [4] 徐保根. 关于图的 Grundy 着色[J]. 华东交通大学学报, 2010, 27(1):78-81.
- [5] SHIUE C L, FU H L. The *IC*-indices of complete bipartite graphs[J]. The Electronic Journal of Combinatorics, 2008, 15(3): 1-13.
- [6] PENRICE S G. Some new graph labeling problems: A preliminary report[J]. DIMACS Technical Reports, 1995, 95(7):1-9.
- [7] 徐保根. 图的控制理论[M]. 北京: 科学出版社, 2006:33-37.
- [8] 徐保根, 周尚超. 图与补图的符号圈控制数[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2006, 30(3):249-251.
- [9] 徐保根, 张亚琼, 罗茜, 等. 图的反符号全控制数[J]. 华东交通大学学报, 2012, 29(1):35-38.

IC-Colorings and *IC*-Indices of Cycles

Zhou Juan¹, Xie Chengwang¹, Xu Baogen², Huang Zhanwei³

(1. School of Software Engineering; 2. School of Basic science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China; 3. Yichun Science and Technology Information Institute, Yichun 336000, China)

Abstract: Providing a coloring $f: V(G) \rightarrow N$ of graph G and any subgraph H of G we define $f(H) = \sum f(v), v \in V(H)$. The coloring f is called an *IC*-coloring if for any integer $j(1 \leq j \leq f(G))$ there is a connected subgraph H of G to achieve $f(H) = j$; Also, we define the *IC*-index of G as $M(G) = \max f(G)$ and f is an *IC*-coloring of G . In this paper we examine C_n and determine their *IC*-indices for $n = 10, 11, 12, 14$.

Key words: *IC*-coloring; *IC*-index of a graph; connected graph; cycle