

文章编号:1005-0523(2012)06-0026-04

非连通图 $C_{2n+1} \cup G_{n-1}$ 的优美性

吴跃生,王广富,徐保根

(华东交通大学基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要:证明了非连通图 $C_{2n+1} \cup G_{n-1}$ 是优美图,其中 C_{2n+1} 是有 $2n+1$ 个顶点的圈, G_{n-1} 是任意一个有 $n-1$ 条边的优美图。

关键词:优美图;非连通图;圈

中图分类号:O157.5

文献标志码:A

1 引言与概念

图的优美标号问题是组合数学中一个热门课题^[1-15]。

本文所讨论的图均为无向简单图, $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集。把一个有 p 个顶点 q 条边的连通图记为 (p, q) -图。记号 $[m, n]$ 表示整数集合 $\{m, m+1, \dots, n\}$, 其中 m 和 n 均为非负整数, 且满足 $0 \leq m < n$ 。

定义 1^[1] 对于一个图 $G=(V, E)$, 如果存在一个单射 $\theta: V(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, |E(G)|\}$ 使得对所有边 $e=uv \in E(G)$, 由 $\theta'(e)=|\theta(u)-\theta(v)|$ 导出的 $E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |E(G)|\}$ 是一个双射, 则称 G 是优美图, θ 是 G 的一组优美标号, 称 θ' 为 G 的边上的由 θ 导出的诱导值。其中 u, v 是图 G 中的顶点; $\theta(u), \theta(v)$ 分别表示顶点 u, v 的标号值。

定义 2^[2] G 是一个优美二分图, 其优美标号为 θ , $V(G)$ 划分成两个集合 X, Y , 如果 $\max_{v \in X} \theta(v) < \min_{v \in Y} \theta(v)$, 则称 θ 是 G 的交错标号, 称 G 是在交错标号 θ 下的交错图。

定义 3^[1] 设 f 为 G 的一个优美标号, 如果存在一个正整数 k , 使得对任意的 $uv \in E(G)$ 有 $f(u) > k \geq f(v)$ 或 $f(u) \leq k < f(v)$ 成立, 则称 f 为 G 的平衡标号(或称 G 有平衡标号 f), 且称 k 为 f 的特征。图 G 称为平衡二分图。

显然, 若 f 为 G 的平衡标号, 则 k 是边导出标号为 1 的边的两个端点中标号较小的顶点的标号。

定义 4^[1] 在平衡二分图 G 中, 设其优美标号 θ 的特征为 k , 并且 $\theta(u_0)=k, \theta(v_0)=k+1$, 则称 u_0 为 G 的二分点, v_0 为 G 的对偶二分点。

事实上, 由定义 2 和定义 3 可知: 交错图就是平衡二分图, $\max_{v \in X} \theta(v)=k$ 。

定义 5^[1] 圈 C_n 的某一个顶点粘接了一条悬挂边所得到的图, 称为图 $C_n \odot K_1$ 。

本文研究了圈 C_{2n+1} 与另一优美图 G 的非连通并集的优美性。

收稿日期:2012-01-24

基金项目:国家自然科学基金项目(11261019, 11061014);江西省自然科学基金项目(20114BAB201010);华东交通大学校立科研基金项目(11JC05)

作者简介:吴跃生(1959—),男,副教授,硕士,研究方向为图论。

2 主要结果及其证明

引理 路 $P_{2n+1} = v_1 v_2 \cdots v_{2n+1}$ 是平衡二分图, 存在平衡标号 θ , 使 $\theta(v_1) = 0$, $\theta(v_{2n+1}) = n$, 路 $P_{2n+1} = v_1 v_2 \cdots v_{2n+1}$ 关于平衡标号 θ 的二分点为 v_{2n+1} 。

证明 定义路 $P_{2n+1} = v_1 v_2 \cdots v_{2n+1}$ 的顶点标号 θ 为

$$\theta(v_{2k-1}) = k-1, k=1, 2, \cdots, n+1; \theta(v_{2k}) = 2n-k+1, k=1, 2, \cdots, n$$

容易验证上面的标号 θ 是路的优美标号。令

$$X = \{v_{2k-1}, k=1, 2, \cdots, n+1\}; Y = \{v_{2k}, k=1, 2, \cdots, n\}; \max_{v \in X} \theta(v) = n < \min_{v \in Y} \theta(v) = n+1$$

所以上面的标号 θ 是路的平衡标号, 路 $P_{2n+1} = v_1, v_2, \cdots, v_{2n+1}$ 关于平衡标号 θ 的二分点为 v_{2n+1} 。

定理 当 $n \geq 2$ 时, G_{n-1} 是边数为 $n-1$ 的优美图, 则非连通图 $C_{2n+1} \cup G_{n-1}$ 是优美的。

证明 因为 $V(C_{2n+1}) = V(P_{2n+1})$, 设 θ 就是引理中给出的路 $P_{2n+1} = v_1 v_2 \cdots v_{2n+1}$ 的平衡标号, $V(P_{2n+1}) = X \cup Y$, $X = \{v_{2k-1}, k=1, 2, \cdots, n+1\}, Y = \{v_{2k}, k=1, 2, \cdots, n\}$ 。

且 $\max_{v \in X} \theta(v) = n < \min_{v \in Y} \theta(v) = n+1, \theta(v_1) = 0, \theta(v_{2n+1}) = n$, 设 f 是图 G_{n-1} 的优美标号。

定义图 $C_{2n+1} \cup G_{n-1}$ 的顶点标号 θ_1 为

$$\theta_1(u) = \begin{cases} \theta(u), & u \in X; \\ \theta(u) + n, & u \in Y; \\ f(u) + n + 1, & u \in G_{n-1} \end{cases}$$

下面证明标号 θ_1 是图 $C_{2n+1} \cup G_{n-1}$ 的优美标号。

1) 由于 $\theta_1: X \rightarrow [0, n]$ 是双射; $\theta_1: Y \rightarrow [n+1, 3n]$ 是双射;

$\theta_1: G_{n-1} \rightarrow [n+1, 2n]$ 是单(或双)射;

$\theta_1(u) < \theta_1(u) < \theta_1(u)$, 容易验证: $\theta_1: V(C_{2n+1} \cup G_{n-1}) = V(G_{n-1}) \cup V(C_{2n+1}) \rightarrow [0, 3n]$ 是一个单射。

2) 由点标号 θ_1 导出的边标号 θ'_1 为:

$$\{\theta'_1(e) | e \in E(C_{2n+1})\} = \{\theta'_1(e) | e \in E(P_{2n+1})\} \cup \{\theta'_1(v_1 v_{2n+1})\} = [n+1, 3n] \cup \{n\} = [n, 3n]$$

$$\{\theta'_1(e) | e \in E(G_{n-1})\} = [1, n-1],$$

当 $n \geq 2$ 时, 容易验证: $\theta'_1: E(C_{2n+1} \cup G_{n-1}) \rightarrow [1, 3n]$ 是一个双射。

因此 θ_1 是图 $C_{2n+1} \cup G_{n-1}$ 的优美标号。

在定理中, 令 $G_{n-1} = St(n-1)$ ($St(n-1)$ 表示有 n 个顶点或有 $n-1$ 条边的星形树)有

推论 1 当 $n \geq 2$ 时, $C_{2n+1} \cup St(n-1)$ 是优美图。

在定理中, 令 $G_{n-1} = P_n$ (P_n 表示有 n 个顶点或有 $n-1$ 条边的路)有

推论 2 当 $n \geq 2$ 时, $C_{2n+1} \cup P_n$ 是优美图。(文献[3]中有此结论)

在定理中, 令 $G_{n-1} = T_n$ (T_n 表示有 n 个顶点或有 $n-1$ 条边的优美树)有

推论 3 当 $n \geq 2$ 时, $C_{2n+1} \cup T_n$ 是优美图。

在定理中, 令 $G_{n-1} = C_{n-1}$, $n = 4k$, 有

推论 4 当 $k \geq 1$ 时, $C_{8k+1} \cup C_{4k-1}$ 是优美图。

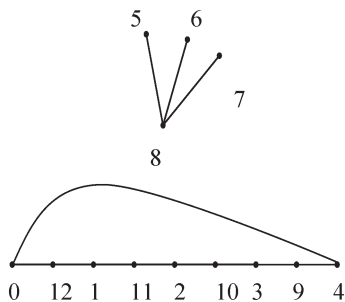
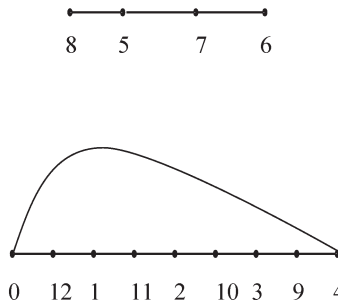
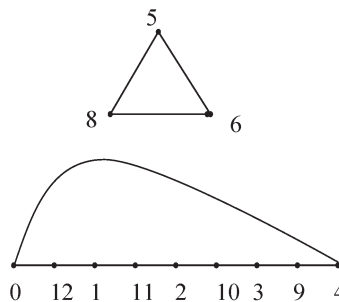
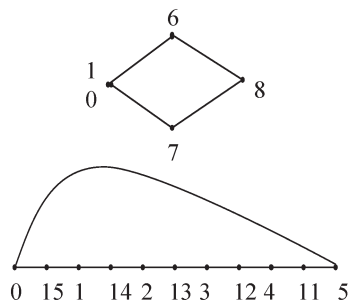
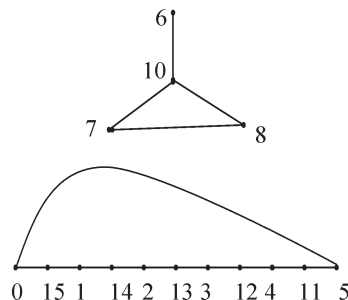
在定理中, 令 $G_{n-1} = C_{n-1}$, $n = 4k+1$, 有

推论 5 当 $k \geq 1$ 时, $C_{8k+3} \cup C_{4k}$ 是优美图。

在定理中, 令 $G_{n-1} = C_{n-2} \odot K_1$, 当 $n \geq 5$ 时, $C_{n-2} \odot K_1$ 是优美图, 所以有

推论 6 当 $n \geq 5$ 时, $C_{2n+1} \cup C_{n-2} \odot K_1$ 是优美图。

例 根据定理和推论给出的 $C_9 \cup St(3)$, $C_9 \cup P_4$, $C_9 \cup C_3$ 的优美标号, 如图 1, 图 2, 图 3 所示; $C_{11} \cup C_4$, $C_{11} \cup C_3 \odot K_1$ 的优美标号如图 4, 图 5 所示。

图1 $C_9 \cup St(3)$ 的优美标号图2 $C_9 \cup P_4$ 的优美标号图3 $C_9 \cup C_3$ 的优美标号Fig.1 The graceful labeling of $C_9 \cup St(3)$ Fig.2 The graceful labeling of $C_9 \cup P_4$ Fig.3 The graceful labeling of $C_9 \cup C_3$ 图4 $C_{11} \cup C_4$ 的优美标号Fig.4 The graceful labeling of $C_{11} \cup C_4$ 图5 $C_{11} \cup C_3 \odot K_1$ 的优美标号Fig.5 The graceful labeling of $C_{11} \cup C_3 \odot K_1$

参考文献:

- [1] 马杰克. 优美图[M]. 北京:北京大学出版社,1991:54.
- [2] 杨显文. 关于 C_{4m} 蛇的优美性[J]. 工程数学学报,1995,12(4):108-112.
- [3] DESHMUKH U N. Gracefulness of same union graphs[D]. Indai, Bombay: University of Bombay, 1995:39.
- [4] 吴跃生,李咏秋. 关于圈 C_{11} 的 $(r_1, r_2, \dots, r_{11})$ -冠的优美性[J]. 长春师范学院学报,2010,29(6):4-8.
- [5] 吴跃生. 关于圈 C_{4h} 的 $(r_1, r_2, \dots, r_{4h})$ -冠的优美性[J]. 华东交通大学学报,2011,28(1):77-80.
- [6] 吴跃生,李咏秋. 关于圈 C_{4h+3} 的 $(r_1, r_2, \dots, r_{4h})$ -冠的优美性[J]. 吉首大学学报:自然科学版,2011,32(6):1-4.
- [7] 吴跃生,徐保根. 关于图 $P_{6k+4}^3 \cup P_n^3$ 的优美性[J]. 山西大学学报:自然科学版,2012,35(1):27-29.
- [8] 吴跃生. 关于图 $P_{6k+5}^3 \cup P_n^3$ 的优美性[J]. 吉首大学学报:自然科学版,2012,33(3):4-7.
- [9] 吴跃生,徐保根. 两类非连通图 $(P_2 \vee \overline{K_n})(0, 0, r_1, 0, \dots, 0, r_n) \cup St(m)$ 及 $(P_2 \vee \overline{K_n})(r_1+a, r_2, 0, \dots, 0) \cup G_r$ 的优美性[J]. 中山大学学报:自然科学版,2012,51(5):63-66.
- [10] 潘伟,路线. 两类非连通图 $(P_2 \vee \overline{K_n}) \cup St(m)$ 及 $(P_2 \vee \overline{K_n}) \cup T_n$ 的优美性[J]. 吉林大学学报:理学版,2003,41(4):153-155.
- [11] 魏丽侠,张昆龙. 关于 $(P_1^{(0)} \vee P_n) \cup (P_1^{(2)} \vee P_{2n})$ 和 $(P_2 \vee \overline{K_n}) \cup G_{n-1}$ 的优美性研究[J]. 合肥工业大学学报:自然科学版,2008,31(2):276-279.
- [12] 魏丽侠,张昆龙. 几类并图的优美标号[J]. 中山大学学报:自然科学版,2008,47(3):10-13.
- [13] 蔡华,魏丽侠,吕显瑞. 非连通图 $(P_1 \vee P_n) \cup G_r$ 和 $(P_1 \vee P_n) \cup (P_3 \vee K_r)$ 及 $W_n \cup St(m)$ 的优美性[J]. 吉林大学学报:理学版,2007,45(4):539-543.

[14] 蔡华. 几类非连通图的优美性[D]. 吉林: 吉林大学, 2007: 4.
[15] 张家娟, 郭珠霞, 周向前, 等. 优美图的一些性质[J]. 数学的实践与认识, 2012, 42(13): 197-201.

Researches on the Gracefulness of Unconnected Graph $C_{2n+1} \cup G_{n-1}$

Wu Yuesheng, Wang Guangfu, Xu baogen

(School of Basic Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: The present paper proves if $n \geq 2$ then unconnected graph $C_{2n+1} \cup G_{n-1}$ is a graceful graph, where C_{2n+1} is $(2n+1)$ -vertex cycle; and G_{n-1} is a graceful graph with $n-1$ edges.

Key words: graceful graph; unconnected graph; cycle

(上接第 25 页)

An Evaluation Study on Expressways Based on Subjective and Objective Safety

Zhou Xiaohuan¹, Guo Zhongyin¹, Li Zhizhong², Wang Xiaolan²

(1. Key Laboratory of Road and Traffic Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 201804, China;
2. Yunnan Communications Science Research Institute, Kunming 650011, China)

Abstract: According to the road alignment spacial geometric properties, this paper firstly adopts spatial curvature of expressways as objective index, and integrates the NASA-TLX scale of drivers as subjective index. Then the model of the subjective and objective safety is constructed according to the fuzziness of road safety and with the application of clustering method. The case study shows that the model corresponds with the reality, which can be applied to the expressway linear evaluation for future reference.

Key words: expressway; road safety evaluation; subjectivity and objectivity