文章编号:1005-0523(2012)06-0045-05

共形平坦流形中具有常平均曲率的超曲面

宋晴晴,宋卫东

(安徽师范大学数学计算机科学学院,安徽 芜湖 241000)

摘要:主要研究了局部对称共形平坦流形中一类具有常平均曲率的紧致无边超曲面,得到了这类超曲面的一个刚性定理。

关键词:局部对称;共形平坦;常平均曲率

中图分类号:O186.12 **文献标志码:**A

1 引言及主要结果

设 N^{n+1} 是 $n+1$ 维共形平坦单连通完备黎曼流形, M^n 是 N^{n+1} 中具有常平均曲率的紧致无边的超曲面。对于共形平坦流形的子流形已有不少研究[1-3]。文[1]研究共形平坦黎曼流形中具有常平均曲率的完备超曲面,获得了一些刚性定理,文章继续类似的问题得到如下结果:

定理1 设 M^n 是局部对称共形平坦流形 N^{n+1} 中的紧致无边的超曲面,且具有常平均曲率,以 S 代表其第二基本形式模长的平方,令 T_c, t_c 分别是 N^{n+1} 的 Ricci 曲率的上确界和下确界,如果 N^{n+1} 在 M^n 上 x 点处的截面曲率 $\boldsymbol{K}_{n+1in+1i}$ 满足 $\sum_i \lambda_i \boldsymbol{K}_{n+1in+1i} = \dfrac{(2nT_c - \boldsymbol{K})H}{n-1}$,则

1) 如果 $S \leqslant \dfrac{8nt_c - 4nT_c - 2\boldsymbol{K}}{n\sqrt{n-1}}$,那么 M 是全脐的超曲面。

2) 如果 $S = \dfrac{8nt_c - 4nT_c - 2\boldsymbol{K}}{n\sqrt{n-1}}$,那么 M 是全脐的或者与一个有两个不同的主曲率,且其中一个主曲率是一重的超曲面等距。

其中 S 代表其第二基本形式模长的平方, t_c , T_c 分别是 N^{n+1} 的 Ricci 曲率的上确界和下确界, $\{\lambda_i\}$ 是 M 的主曲率。

2 准备工作

如无特别说明,规定各类指标的取值范围如下:

$$1 \leqslant A, B, C, \cdots \leqslant n+1; 1 \leqslant i, j, k, \cdots \leqslant n$$

并且 Σ 号下重复指标表示在相应范围内求和。

设 M^n 是 $n+1$ 维局部对称共形平坦空间 N^{n+1} 中具有常平均曲率的完备超曲面。在 N^{n+1} 上选取局部标准正交标架场 $\{e_A\}$,使得它限制在 M^n 上, $\{e_i\}$ 与 M^n 相切, e_{n+1} 与 M^n 正交。设 $\{\omega_A\}$ 和 $\{\omega_{AB}\}$ 分别是 $\{e_A\}$ 的对偶标架场和联络1–形式。在此标架下 N^{n+1} 的结构方程为[4]

$$\mathrm{d}\omega_A = -\sum_B \omega_{AB} \Lambda \omega_B, \omega_{AB} + \omega_{BA} = 0 \tag{2}$$

收稿日期:2012-11-20

基金项目:安徽省教育厅自然科学研究重点项目(KJ20120A125)

作者简介:宋晴晴(1987-),女,硕士,研究方向为子流形几何。

$$\mathrm{d}\omega_{AB}=-\sum_{C}\omega_{AC}\Lambda\omega_{CB}+\frac{1}{2}\sum_{C,D}\boldsymbol{K}_{ABCD}\omega_{C}\Lambda\omega_{D} \tag{3}$$

限制在 M^n 上,有[5]

$$\omega_{n+1}=0\,,\omega_{n+1i}=\sum_{j}h_{ij}\omega_{j},h_{ij}=h_{ji} \tag{4}$$

$$\mathrm{d}\omega_{i}=\sum_{j}\omega_{ij}\Lambda\omega_{j},\omega_{ij}+\omega_{ji}=0 \tag{5}$$

$$\mathrm{d}\omega_{ij}=-\sum_{k}\omega_{ik}\Lambda\omega_{kj}+\frac{1}{2}\sum_{k,l}\boldsymbol{R}_{ijkl}\omega_{k}\Lambda\omega_{l} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{R}_{ijkl}=K_{ijkl}+h_{ik}h_{jl}-h_{il}h_{jk} \tag{7}$$

其中:ω_{ij} 是 M^n 的联络1-形式。h_{ij} ,R_{ijkl} ,$\boldsymbol{K}_{ABCD}$ 分别表示 M^n 的第二基本形式,曲率张量 $\boldsymbol{R}$ 的分量和 N^{n+1} 曲率张量 $\boldsymbol{K}$ 的分量。M^n 的第二基本形式模长的平方 $S=\sum_{i,j}(h_{ij})^2$, M^n 的平均曲率 $H=\frac{1}{n}\sum_{i}h_{ii}$。用 h_{ijk} 和 h_{ijkl} 分别表示 h_{ij} 的共变导数,则[5]

$$h_{ijk}-h_{ikj}=-\boldsymbol{K}_{n+1ijk} \tag{8}$$

$$h_{ijkl}-h_{ijlk}=\sum_{m}(h_{mj}\boldsymbol{R}_{mikl}+h_{im}\boldsymbol{R}_{mjkl}) \tag{9}$$

N^{n+1} 是局部对称的,则

$$\boldsymbol{K}_{\alpha ijkl}=\sum_{\beta}(h_{il}^{\beta}\boldsymbol{K}_{\alpha\beta jk}+h_{jl}^{\beta}\boldsymbol{K}_{\alpha i\beta k}+h_{kl}^{\beta}\boldsymbol{K}_{\alpha ij\beta})-\sum_{m}h_{ml}^{\alpha}\boldsymbol{K}_{mijk} \tag{10}$$

又 N^{n+1} 是共形平坦的,即其黎曼曲率张量为

$$\boldsymbol{K}_{ABCD}=\frac{1}{n+p-2}\left\{\delta_{AC}\boldsymbol{K}_{BD}-\delta_{AD}\boldsymbol{K}_{BC}+\boldsymbol{K}_{AC}\delta_{BD}-\boldsymbol{K}_{AD}\delta_{BC}-\frac{\boldsymbol{K}}{n+p-1}(\delta_{AC}\delta_{BD}-\delta_{AD}\delta_{BC})\right\} \tag{11}$$

其中:$\boldsymbol{K}$,$\boldsymbol{K}_{AB}$ 分别为 N^{n+1} 的数量曲率、Ricci曲率。

令 $T_{\mathrm{c}}, t_{\mathrm{c}}$ 分别是 N^{n+1} 的Ricci曲率的上确界和下确界,则

$$t_{\mathrm{c}}\leqslant\boldsymbol{K}_{AA}\leqslant T_{\mathrm{c}},(n+1)t_{\mathrm{c}}\leqslant K\leqslant(n+1)T_{\mathrm{c}} \tag{12}$$

引理[6] 设 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 是 n 个实数,满足 $\sum_{i}u_i=0$,$\sum_{i}{u_i}^2=B,B\geqslant 0$,则

$$\left|\sum_{i}{u_i}^3\right|\leqslant\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}B^{\frac{3}{2}} \tag{13}$$

且等号成立当且仅当有 $n-1$ 个 u_i 相等。

3 定理1的证明

现定义 h_{ij} 的Laplacian为 $\Delta h_{ij}=\sum_{k}h_{kkij}$ 则

$$\Delta h_{ij}=\sum_{k}h_{kkij}-\sum_{k}(\boldsymbol{K}_{n+1kikj}+\boldsymbol{K}_{n+1ijkk})+\sum_{k,m}(h_{mk}\boldsymbol{R}_{mijk}+h_{mi}\boldsymbol{R}_{mkjk}) \tag{14}$$

由于 M^n 具有常平均曲率,所以

$$\sum_{k}h_{kki}=0 \tag{15}$$

因此

$$\Delta h_{ij}=-\sum_{k}(\boldsymbol{K}_{n+1kikj}+\boldsymbol{K}_{n+1ijkk})+\sum_{k,m}(h_{mk}\boldsymbol{R}_{mijk}+h_{mi}\boldsymbol{R}_{mkjk}) \tag{16}$$

由[7]知

$$\Delta h_{ij}=nH\boldsymbol{K}_{n+1in+1j}-\sum_k \boldsymbol{K}_{n+1kn+1k}h_{ij}+nH\sum_{i,j,k}h_{ik}h_{kj}-Sh_{ij}+\sum_{i,j,k,l}(\boldsymbol{K}_{lkik}h_{lj}+\boldsymbol{K}_{lkjk}h_{li}+2\boldsymbol{K}_{lijk}h_{lk}) \tag{17}$$

则有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta S=&\sum_{i,j,k}{h_{ijk}}^2+\sum_{i,j}h_{ij}\Delta h_{ij}=\sum_{i,j,k}{h_{ijk}}^2+nH\sum_{i,j}h_{ij}\boldsymbol{K}_{n+1in+1j}-\sum_k\boldsymbol{K}_{n+1kn+1k}{h_{ij}}^2+nH\sum_{i,j,k}h_{ik}h_{kj}h_{ij}-S^2+\\&\sum_{i,j,k,m}h_{ij}(\boldsymbol{K}_{mkik}h_{mj}+\boldsymbol{K}_{mkjk}h_{mi}+2\boldsymbol{K}_{mijk}h_{mk})\end{aligned} \tag{18}$$

选取适当的基使

$$h_{ij}=\lambda_i\delta_{ij} \tag{19}$$

下面估计(18)式中各项,由(11)式有

$$-\sum_k\boldsymbol{K}_{n+1kn+1k}{h_{ij}}^2=-S\sum_i\boldsymbol{K}_{n+1in+1i}\geqslant-\frac{n}{n-1}\left[2T_{\mathrm{c}}-\frac{\boldsymbol{K}}{n}\right]S \tag{20}$$

令

$$u_i=\lambda_i-H,|Z|^2=\sum_i{u_i}^2,\sum_i u_i=0,|Z|^2=S-nH^2,\sum_i{\lambda_i}^3=\sum_i{u_i}^3+3H|Z|^2+nH^3 \tag{21}$$

因此,由(13)(21)式有

$$\begin{aligned}&nH\sum_{i,j,k}h_{ij}h_{jk}h_{ki}-S^2=nH\sum_i{\lambda_i}^3-S^2=-S^2+nH\sum_i{u_i}^3+3nH^2|Z|^2+n^2H^4\geqslant\\&-S^2-\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H||Z|^3+3nH^2|Z|^2+n^2H^4=|Z|^2(nH^2-\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H||Z|-|Z|^2)\end{aligned} \tag{22}$$

考虑以 $\pm\frac{n}{2\sqrt{n-1}}$ 为特征值的二次型 [7]

$$F(x,y)=x^2-\frac{n-2}{\sqrt{n-1}}xy-y^2$$

作正交变换

$$u=\frac{1}{\sqrt{2n}}\left[(1+\sqrt{n-1})x+(1-\sqrt{n-1})y\right],v=\frac{1}{\sqrt{2n}}\left[(\sqrt{n-1}-1)x+(\sqrt{n-1}+1)y\right] \tag{23}$$

$F(x,y)$ 可以写成

$$F(x,y)=\frac{n}{2\sqrt{n-1}}(u^2-v^2)$$

令 $x=\sqrt{n}|H|,y=|Z|$。

又由于(23)是正交变换,于是

$$x^2+y^2=u^2+v^2=S$$

可得

$$nH^2-\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H||Z|-|Z|^2=x^2-\frac{n-2}{\sqrt{n-1}}xy-y^2=\frac{n}{2\sqrt{n-1}}(u^2-v^2)=\frac{n}{2\sqrt{n-1}}(2u^2-S)\geqslant-\frac{n}{2\sqrt{n-1}}S \tag{24}$$

以(22)(24)得

$$nH\sum_{i,j,k}h_{ij}h_{jk}h_{ki}-S^2\geqslant-\frac{nS}{2\sqrt{n-1}}|Z|^2 \tag{25}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j,k,m}h_{ij}(\boldsymbol{K}_{mkik}h_{mj}+\boldsymbol{K}_{mkjk}h_{mi}+2\boldsymbol{K}_{mijk}h_{mk})=\sum_{i,j}(\lambda_i-\lambda_j)^2K_{ijij}=\frac{1}{n-1}\sum_{i,j}(\lambda_i-\lambda_j)^2(\boldsymbol{K}_{ii}+\boldsymbol{K}_{jj}-\frac{\boldsymbol{K}}{n})\geqslant\\&\frac{1}{n-1}(2t_{\mathrm{c}}-\frac{\boldsymbol{K}}{n})\sum_{i,j}(\lambda_i-\lambda_j)^2=\frac{2}{n-1}[2nt_{\mathrm{c}}-\boldsymbol{K}]|Z|^2\end{aligned} \tag{26}$$

由(18)(19)(20)(25)(26)式可得

$$\frac{1}{2}\Delta S \geqslant nH\left[\sum_i \lambda_i \boldsymbol{K}_{n+1in+1i} - \frac{(2nT_c - K)H}{n-1}\right] + |Z|^2\left[\frac{4nt_c - 2nT_c - \boldsymbol{K}}{n-1} - \frac{nS}{2\sqrt{n-1}}\right]$$

又由定理1的条件可得

$$\frac{1}{2}\Delta S \geqslant |Z|^2\left[\frac{4nt_c - 2nT_c - \boldsymbol{K}}{n-1} - \frac{nS}{2\sqrt{n-1}}\right]$$

所以

$$\int_{M^n} |Z|^2\left[\frac{4nt_c - 2nT_c - \boldsymbol{K}}{n-1} - \frac{nS}{2\sqrt{n-1}}\right] \leqslant 0 \tag{27}$$

1）若

$$S \leqslant \frac{8nt_c - 4nT_c - 2\boldsymbol{K}}{n\sqrt{n-1}}$$

则由(27)式有

$$0 = |Z|^2 = S - nH^2$$

于是 M 为全脐类空超曲面。

2）若

$$S = \frac{8nt_c - 4nT_c - 2K}{n\sqrt{n-1}}$$

则(27)式等号成立，于是(22)(26)式均取等号，由(22)等号成立知，至少有 $n-1$ 个 λ_i 相等。

(i) 若

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$$

则 M 全脐。

(ii) 若

$$\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = u, \lambda \neq u$$

利用 h_{ijk} 的定义。有

$$0 = \lambda_i \omega_{ij} + \lambda_j \omega_{ji} = (\lambda_i - \lambda_j)\omega_{ij}$$

故

$$\omega_{ij} = 0 \ (i \neq j) \tag{28}$$

从而当

$$\lambda_i \neq \lambda_j, \boldsymbol{R}_{ijkl} = 0 \tag{29}$$

当等式(22)成立时，有 $K_{ijij} = \frac{c_1}{2}$。

由(6)式得

$$\lambda_i \lambda_j + \frac{c_1}{2} = 0 \ (\lambda_i \neq \lambda_j) \tag{30}$$

由引理不妨设

$$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_{n-1}, \mu_n \neq \mu_1, \mu_i = H - \lambda_i, i = 1, 2, \cdots, n$$

故

$$\lambda_i \geqslant H \ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

令

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1}, \mu = \lambda_n$$

由方程(30)可得

$$\lambda\mu = -\frac{c_1}{2},\ (n-1)\lambda + \mu = nH$$

从而

$$\lambda = \frac{1}{2(n-1)}\left[nH + \sqrt{n^2H^2 + 2(n-1)c_1}\right],\ \mu = \frac{1}{2}\left[nH - \sqrt{n^2H^2 + 2(n-1)c_1}\right]$$

所以, M 与一个有两个不同的主曲率,且其中一个主曲率是一重的超曲面等距。

即定理1得证。

参考文献:

[1] 吴泽九. 共形平坦流形的一类具常平均曲率的完备超曲面[J]. 华东交通大学学报,2008,25(2):59-63.

[2] 段仁杰,陈抚良. 局部对称共形平坦黎曼流形中具有平行平均曲率向量的紧致子流形[J]. 江西科学,2011,29(3):308-312.

[3] 宋卫东,刘敏. 关于局部对称共形平坦空间中具有常数量曲率的子流形[J]. 数学物理学报,2010,30(4):1102-1110.

[4] ISHI HARA T. Maximal spacelike submanifolds of a pseudo-riemannian space of constant curvature [J]. Michigan Math J, 1988,35(3):345-352.

[5] YAU S T. Submanifolds with constant mean curvature Ⅰ,II [J]. Amer J Math,1974,96(2):346-366.

[6] OKUMURA M. Hypersurfaces and a pinching problem on the second fundamental tensor [J]. Amer J Math, 1974, 96(1):207-213.

[7] 水乃翔,吴国强. 局部对称黎曼流形中的极小超曲面[J]. 数学年刊,1995,16(6):687-691.

[8] 张剑峰. 局部对称共形平坦黎曼流形中紧致子流形的一个刚性定理[J]. 高校应用数学学报A辑,2002,17(4):485-490.

On Hypersurfaces with Constant Mean Curvature in a Conformally Flat Manifold

Song Qingqing ,Song Weidong

(College of Mathematics and Computer Science, Anhui Normal University, Wuhu 241000, China)

Abstract: This paper studies the hypersurfaces with constant mean curvature in a conformally flat manifold, and some rigidity theorems are then generalized.

Key words: locally symmetric; conformally flat; constant mean curvature