

文章编号:1005-0523(2012)06-0054-07

一类二阶复域微分方程的解与小函数的关系

李明星,肖丽鹏

(江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌 330022)

摘要:研究一类二阶线性微分方程的解以及它们的一阶、二阶导数,微分多项式取小函数的点的收敛指数。

关键词:线性微分方程;整函数;超级;零点收敛指数

中图分类号:O174.52

文献标志码:A

1 引言与结果

本文使用值分布的标准记号(见[1]),用 $\sigma(f)$ 表示 $f(z)$ 的级, $\lambda(f)$, $\bar{\lambda}(f)$ 表示 $f(z)$ 的零点收敛指数和不同零点收敛指数, $\bar{\lambda}(f-\varphi)$ 表示 $f(z)$ 取小函数 φ 的点的收敛指数,当 $\varphi=z$ 时, $\bar{\lambda}(f-z)$ 表示 $f(z)$ 的不动点收敛指数。本文还需引入下列定义。

定义1^[2] 设 $f(z)$ 为亚纯函数,那么我们定义 $f(z)$ 的超级 $\sigma_2(f)$ 为

$$\sigma_2(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log T(r, f)}{\log r} \quad (1)$$

如果 $f(z)$ 为整函数,那么

$$\sigma_2(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log \log M(r, f)}{\log r} = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log T(r, f)}{\log r} \quad (2)$$

定义2^[3] 设 $f(z)$ 为整函数,那么我们定义 $f(z)$ 的二级零点收敛指数 $\lambda_2(f)$ 为

$$\lambda_2(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log N(r, \frac{1}{f})}{\log r} \quad (3)$$

定义 $f(z)$ 的二级不同零点收敛指数 $\bar{\lambda}_2(f)$ 为

$$\bar{\lambda}_2(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log \bar{N}(r, \frac{1}{f})}{\log r} \quad (4)$$

2000年,陈宗煊首次考虑了方程 $f'' + A(z)f = 0$ 的不动点的问题,得到以下结果。

定理A^[3] 假设 $A(z)$ 为超越整函数且 $\sigma(A) = \sigma < \infty$,那么微分方程

$$f'' + A(z)f = 0 \quad (5)$$

的所有非零解 $f(z)$ 有无穷多个不动点,且满足: $\bar{\lambda}(f-z) = \sigma(f) = \infty$, $\bar{\lambda}_2(f-z) = \sigma_2(f) = \sigma$ 。

2006年,陈宗煊研究了方程

$$f'' + A_1 e^{az} f' + A_0 e^{bz} f = 0 \quad (6)$$

的解以及它们的一阶、二阶导数,微分多项式取小函数的点的收敛指数,得到了一些有趣的结果。例如下

收稿日期:2012-09-12

基金项目:国家自然科学基金项目(11126144,11171119);江西省教育厅青年科学基金项目(GJJ12207)

作者简介:李明星(1984—),女,硕士研究生,研究方向为复分析。

面的定理B和定理C。

定理B 假设 $A_j(z) (\neq 0) (j=0, 1)$ 是整函数且 $\sigma(A_j) < 1$, a, b 是复常数且满足 $ab \neq 0$ 和 $\arg a \neq \arg b$ 或 $a = cb (0 < c < 1)$ 。如果 $\varphi(z) (\neq 0)$ 是有限级整函数, 那么方程(6)的每个解 $f (\neq 0)$ 满足 $\bar{\lambda}(f - \varphi) = \bar{\lambda}(f' - \varphi) = \bar{\lambda}(f'' - \varphi) = \infty$ 。

定理C 假设 $A_j(z)$, a, b 满足定理B的假设条件。假设 $d_0(z)$, $d_1(z)$, $d_2(z)$ 是不全恒为零的多项式, $\varphi(z) (\neq 0)$ 是级小于1的整函数。如果 $f (\neq 0)$ 是方程(6)的任一整函数解, 那么微分多项式 $g(z) = d_2 f'' + d_1 f' + d_0 f$ 满足 $\bar{\lambda}(g - \varphi) = \infty$ 。

一个自然的问题是方程(5)的解的一阶、二阶导数以及微分多项式取小函数的点的收敛指数如何? 本文对这个问题进行了研究, 得到以下结果。

定理1 假设 $A(z)$ 为超越整函数且 $\sigma(A) = \sigma < \infty$, 若 $\varphi (\neq 0)$ 是有限级整函数, 则方程(5)的任一解 $f(z) (\neq 0)$ 满足:

$$\textcircled{1} \bar{\lambda}(f - \varphi) = \infty, \bar{\lambda}_2(f - \varphi) = \sigma; \textcircled{2} \bar{\lambda}(f' - \varphi) = \infty, \bar{\lambda}_2(f' - \varphi) = \sigma; \textcircled{3} \bar{\lambda}(f'' - \varphi) = \infty, \bar{\lambda}_2(f'' - \varphi) = \sigma。$$

考虑一种特殊的情形, 当 $A(z) = B(z)e^{P(z)}$ 时, 可得到比定理1更进一步的结果。

定理2 设 $B(z) (\neq 0)$ 为级小于 m 的整函数, $P(z)$ 是次数为 $m \geq 1$ 的多项式, $\varphi(z) (\neq 0)$ 是级小于 m 的亚纯函数, 设 $f(z) (\neq 0)$ 是方程

$$f'' + B(z)e^{P(z)}f = 0 \quad (7)$$

的任一解, $d_0(z)$, $d_1(z)$, $d_2(z)$ 是不全恒为零的亚纯函数, 且满足 $\max\{\sigma(d_2(z)), \sigma(d_1(z)), \sigma(d_0(z))\} < m$, 那么微分多项式 $g(z) = d_2 f'' + d_1 f' + d_0 f$ 满足 $\bar{\lambda}(g - \varphi) = \infty$ 。

2 为证明定理所需要的引理

引理1^[4] 设 $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}$ 是整函数, 满足

$$(i) \sigma(A_j) < \sigma(A_0) < \infty \quad (j = 1, 2, \dots, k-1)$$

或者

(ii) A_0 是有限级超越整函数, $A_1, \dots, A_{k-1}$ 是多项式。那么微分方程 $f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + A_0f = 0$ 的所有非零解具有无穷级。

引理2^[5] 假设 $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}$, $F \neq 0$ 是有限级亚纯函数, 若 $f(z)$ 是方程 $f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + A_0f = F$ 的亚纯解, 并且 $\sigma(f) = \infty$, 则有 $\bar{\lambda}(f) = \lambda(f) = \sigma(f) = \infty$ 。

引理3^[6-7] 假设 $G(r)$ 和 $H(r)$ 为两个定义在 $(0, +\infty)$ 内的非减实函数。

(i) 若除去一个有穷线测度的集合 E 外有 $G(r) \leq H(r)$, 那么对任意的 $\alpha > 1$, 存在 r_0 使得对所有的 $r \geq r_0$, 都有 $G(r) \leq H(\alpha r)$ 。

(ii) 若存在一个集合 E , 其对数测度 $l_m E = \delta < \infty$, 其中集合 E 的对数测度 $l_m E$ 定义为 $l_m E = \int_1^{+\infty} \left(\frac{\chi_E(t)}{t} \right) dt$, 其中 $\chi_E = \begin{cases} 0 & r \notin E; \\ 1 & r \in E. \end{cases}$ 使得当 $r \notin E$ 时, $G(r) \leq H(r)$, 那么对任意的常数 $\beta (> e^\delta)$, 当 $r > 1$ 时, 有 $G(r) \leq H(\beta r)$ 。

引理4^[8] 设 $W(z)$ 是开平面上有限 ρ 级超越亚纯函数, $\Gamma = \{(k_1, j_1), (k_2, j_2), \dots, (k_m, j_m)\}$ 是由不同整数对组成的有限集, 满足 $k_i > j_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, 又设 $\varepsilon > 0$ 是给定的常数, 则存在零测度集 $E_1 \subset [0, 2\pi)$, 使得如果 $\varphi_0 \in [0, 2\pi) \setminus E_1$, 则存在常数 $R_0 = R_0(\varphi_0) > 0$, 对满足 $\arg z = \varphi_0$ 及 $|z| \geq R_0$ 的所有的 z 及对所有 $(k, j) \in \Gamma$,

都有 $\left| \frac{W^{(k)}(z)}{W^{(j)}(z)} \right| \leq |z|^{(k-j)(\rho-1+\varepsilon)}$ 。

引理5^[9] 假设 $g(z)$ 是超越亚纯函数且 $\sigma(g)=\sigma<\infty$, 那么对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在测度为零的子集 $E\subset[0, 2\pi)$, 满足: 如果 $\varphi\in[0, 2\pi)\setminus E$, 那么存在常数 $R=R(\varphi)>1$, 满足对所有 $\arg z=\varphi$ 和 $|z|=r\geq R$ 的 z , 有 $\exp\{-r^{\sigma+\varepsilon}\}\leq |g(z)|\leq \exp\{r^{\sigma+\varepsilon}\}$ 。

引理6^[10] 设 $p(z)$ 是次数为 n 的非常数多项式, $W(z)\neq 0$ 是亚纯函数, 其级 $\sigma(W)<n$, 令 $g=We^p$, 则存在零测度集 $H_1\subseteq[0, 2\pi)$ 对每一 $\theta\in[0, 2\pi)\setminus(H_1\cup H_2)$, 及给定常数 $\varepsilon: 0<\varepsilon<1$, 当 $r>r_0(\theta, \varepsilon)$ 时, 有

(i) 如果 $\delta(p, \theta)<0$, 则 $\exp\{(1+\varepsilon)\delta(p, \theta)r^n\}\leq |g(re^{i\theta})|\leq \exp\{(1-\varepsilon)\delta(p, \theta)r^n\}$;

(ii) 如果 $\delta(p, \theta)>0$, 则 $\exp\{(1-\varepsilon)\delta(p, \theta)r^n\}\leq |g(re^{i\theta})|\leq \exp\{(1+\varepsilon)\delta(p, \theta)r^n\}$ 。

其中 $H_2=\{\theta:\delta(P, \theta)=0, 0\leq\theta<2\pi\}$ 是有限集。

引理7 设 $P(z)=(\alpha+i\beta)z^m+\dots$ 是次数为 $m\geq 1$ 的多项式, $H_j(j=0, 1, 2, 3, 4)$ 为级小于 m 的亚纯函数, 其中 $H_2\neq 0$, 令 $\varphi(z)=H_0+H_1e^P+H_2e^{2P}+H_3e^{3P}+H_4e^{4P}$, 那么 $\varphi(z)\neq 0$ 。

证 对任意的射线 $\arg z=\theta$, 有 $\delta(jP, \theta)=j\delta(P, \theta)(j=2, 3, 4)$, 分为 $H_4\neq 0$ 和 $H_4\equiv 0$ 来讨论。

1) 若 $H_4\neq 0$, 令 $\sigma(H_0)=d<m$ 。由引理5, 对任意给定的 $\varepsilon(0<\varepsilon<\min\{m-d, \frac{1}{7}\})$, 存在测度为零的子集 $E_1\subset[0, 2\pi)$, 满足如果 $\theta\in[0, 2\pi)\setminus E_1$, 那么存在一常数 $R=R(\theta)>1$, 满足对所有 $\arg z=\theta$ 和 $|z|=r\geq R$ 的 z 有

$$|H_0|\leq \exp\{r^{d+\varepsilon}\} \quad (8)$$

由引理6, 存在 $\arg z=\theta\in[0, 2\pi)\setminus(E_2\cup E_1\cup E_0)$ 。其中 $E_2, E_0\subset[0, 2\pi)$, E_2 具有线测度零, E_0 是有限集, 满足 $\delta(p, \theta)>0$, 以及对上面给定的 ε , 当 r 充分大时, 有

$$|H_4e^{4P}|\geq \exp\{(1-\varepsilon)r^m\delta(4P, \theta)\}=\exp\{(1-\varepsilon)4r^m\delta(P, \theta)\} \quad (9)$$

$$|H_1e^P|\leq \exp\{(1+\varepsilon)r^m\delta(P, \theta)\} \quad (10)$$

$$|H_2e^{2P}|\leq \exp\{(1+\varepsilon)2r^m\delta(P, \theta)\} \quad (11)$$

$$|H_3e^{3P}|\leq \exp\{(1+\varepsilon)3r^m\delta(P, \theta)\} \quad (12)$$

如果 $\varphi(z)\equiv 0$, 则由(8)~(12)得

$$\exp\{(1-\varepsilon)4r^m\delta(P, \theta)\}\leq |H_4e^{4P}|\leq |H_0|+|H_1e^P|+|H_2e^{2P}|+|H_3e^{3P}|\leq \exp\{r^{d+\varepsilon}\}+3\exp\{(1+\varepsilon)3r^m\delta(P, \theta)\} \quad (13)$$

由 $d+\varepsilon<m$, $0<\varepsilon<\min\{m-d, \frac{1}{7}\}$, 当 $r\rightarrow\infty$ 时, 有

$$\frac{\exp\{r^{d+\varepsilon}\}}{\exp\{(1-\varepsilon)4r^m\delta(P, \theta)\}}\rightarrow 0 \quad (14)$$

$$\frac{\exp\{(1+\varepsilon)3r^m\delta(P, \theta)\}}{\exp\{(1-\varepsilon)4r^m\delta(P, \theta)\}}\rightarrow 0 \quad (15)$$

由(13)~(15)得到 $1\leq 0$, 这个矛盾表明当 $H_4\neq 0$ 时, $\varphi(z)\neq 0$ 。

2) 若 $H_4\equiv 0$, 分为 $H_3\neq 0$ 和 $H_3\equiv 0$ 来讨论。

(i) 若 $H_3\neq 0$, 由引理5和引理6, 对上面给定的 ε , 取射线 $\arg z=\theta\in[0, 2\pi)\setminus(E_2\cup E_1\cup E_0)$, 满足 $\delta(p, \theta)>0$ 和 r 充分大时(8), (10), (11)式成立, 且

$$|H_3e^{3P}|\geq \exp\{(1-\varepsilon)3r^m\delta(P, \theta)\} \quad (16)$$

如果 $\varphi(z)\equiv 0$, 那么由(8), (10), (11), (16)有

$$\exp\{(1-\varepsilon)3r^m\delta(P, \theta)\} \leq |H_3 e^{3P}| \leq \exp\{r^{d+\varepsilon}\} + 2 \exp\{(1+\varepsilon)2r^m\delta(P, \theta)\}.$$

由 $d+\varepsilon < m$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{7} < \frac{1}{5}$, 类似于 1) 的讨论得出 $1 \leq 0$, 这个矛盾表明当 $H_4 \equiv 0$, $H_3 \not\equiv 0$ 时, $\varphi(z) \not\equiv 0$ 。

(ii) 当 $H_3 \equiv 0$ 时, 有已知 $H_2 \not\equiv 0$, 如果 $\varphi(z) \equiv 0$, 有 $H_0 + H_1 e^P + H_2 e^{2P} \equiv 0$, 使用上面方法能推出矛盾, 进而知 $\varphi(z) \not\equiv 0$ 。即 $H_4 \equiv 0$, $H_3 \equiv 0$ 时, $\varphi(z) \not\equiv 0$ 。结合(i)的讨论, 当 $H_4 \equiv 0$ 时, $\varphi(z) \not\equiv 0$ 。再结合 1) 的讨论知总有 $\varphi(z) \not\equiv 0$ 。

引理 8^[11] 假设 $f(z)$ 是无穷级整函数且 $\sigma_2(f) = \alpha < \infty$, $d_j(z)(j=0, 1, 2)$ 是不全恒等于零的有限级亚纯函数且 $0 \leq \beta = \max\{\sigma(d_0), \sigma(d_1), \sigma(d_2)\} < \alpha$, 那么 $W(z) = d_2 f'' + d_1 f' + d_0 f$ 具有无穷级。

引理 9^[12] 设 $f(z)$ 是一整函数且级 $\sigma(f) = \sigma < \infty$ 。假设存在一集合 $E \subset [0, 2\pi)$, 线测度为零, 对任一射线 $\arg z = \theta_0 \in [0, 2\pi) \setminus E$, $|f(re^{i\theta_0})| \leq Mr^k$, (其中 $M = M(\theta_0) > 0$ 是一常数且 $k(>0)$ 也是一与 θ_0 无关的常数), 那么 $f(z)$ 是一次数 $\leq k$ 的多项式。

3 定理 1 和定理 2 的证明

3.1 定理 1 的证明

假设 $f(z)$ 为方程(5)的一个解, 由复域微分方程的基本理论可知 $f(z)$ 为整函数, 且由引理 1 知 $\sigma(f) = \infty$ 。

1) 首先证明 $\bar{\lambda}(f-\varphi) = \infty$ 和 $\bar{\lambda}_2(f-\varphi) = \sigma$ 。设 $f = g + \varphi$, 显然有 $\sigma(g) = \sigma(f) = \infty$, 把 $f = g + \varphi$ 代入方程(5), 则有

$$g'' + Ag = -(\varphi'' + A\varphi) \quad (17)$$

注意到(17)式可能存在有限级解, 但我们只需考虑它的无穷级解。若 $\varphi'' + A\varphi \equiv 0$, 由引理 1 知, 显然 $\sigma(\varphi) = \infty$, 但这是不可能的, 因此 $\varphi'' + A\varphi \not\equiv 0$, 于是由引理 2 得 $\bar{\lambda}(f-\varphi) = \bar{\lambda}(g) = \lambda(g) = \sigma(g) = \infty$ 。

由定理 A 可知, 对于方程(5)有 $\sigma_2(f) = \sigma$ 。要证明 $\bar{\lambda}_2(f-\varphi) = \sigma$, 由于 $\bar{\lambda}_2(f-\varphi) = \bar{\lambda}_2(g)$, 所以只要证明 $g'' + Ag = -(\varphi'' + A\varphi)$ 的每个超越解 g 有 $\bar{\lambda}_2(g) = \sigma$ 即可。

由 $g'' + Ag = -(\varphi'' + A\varphi)$ 可知: 如果 z_0 为 g 的零点且阶数大于 2, 那么 $\varphi''(z_0) + A(z_0)\varphi(z_0) = 0$, 所以

$$N(r, \frac{1}{g}) \leq 2\bar{N}(r, \frac{1}{g}) + N(r, \frac{1}{\varphi'' + A\varphi}) \quad (18)$$

另一方面, (17)式可改写为

$$-\frac{1}{\varphi'' + A\varphi}(\frac{g''}{g} + A) = \frac{1}{g}$$

从而

$$m(r, \frac{1}{g}) \leq m(r, \frac{1}{\varphi'' + A\varphi}) + m(r, A) + m(r, \frac{g''}{g}) + \log 2 \quad (19)$$

从(18)和(19)式得到: 除去一个线测度为有穷的集合 E_1 外,

$$T(r, g) = T(r, \frac{1}{g}) + O(1) \leq T(r, \varphi'' + A\varphi) + T(r, A) + c \log(rT(r, g)) + 2\bar{N}(r, \frac{1}{g}) \quad (20)$$

当 r 充分大时,

$$c \log(rT(r, g)) \leq \frac{1}{2}T(r, g) \quad (21)$$

设 $\sigma_1 = \max\{\sigma(\varphi), \sigma(A)\}$, 那么对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 当 r 充分大时,

$$T(r, A) \leq r^{\sigma_1 + \varepsilon}, \quad T(r, \varphi'' + A\varphi) \leq r^{\sigma_1 + \varepsilon} \quad (22)$$

由(20)~(22)式得到: 当 $r \notin E_1$, 且当 r 充分大时,

$$T(r, g) \leq 4\bar{N}(r, \frac{1}{g}) + 4r^{\sigma_1 + \varepsilon} \quad (23)$$

由引理 3, 从 (23) 得到 $\sigma_2(g) \leq \bar{\lambda}_2(g)$, 从而 $\sigma_2(g) = \bar{\lambda}_2(g)$ 。由 $f = g + \varphi$ 及 $\sigma_2(f) = \sigma_2(g) = \sigma$, 得到 $\bar{\lambda}_2(g) = \bar{\lambda}_2(f - \varphi) = \sigma$ 。

2) 现在证明 $\bar{\lambda}(f' - \varphi) = \infty$ 和 $\bar{\lambda}_2(f' - \varphi) = \sigma$, 令 $g_1 = f' - \varphi$, 对 (5) 两边求导得

$$f''' + A'f + Af' = 0 \quad (24)$$

从而

$$f = -\frac{1}{A}(g_1'' + \varphi'' + (g_1 + \varphi)A) \quad (25)$$

将 $f'' = g' + \varphi'$ 和 (25) 代入 (5) 式得

$$\frac{A}{A'}g_1'' - g_1' + \frac{A^2}{A'}g_1 = -(\frac{A}{A'}\varphi'' - \varphi' + \frac{A^2}{A'}\varphi) \quad (26)$$

我们断言: $\frac{A}{A'}\varphi'' - \varphi' + \frac{A^2}{A'}\varphi \neq 0$, 否则有 $A = -\frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{A'\varphi'}{A\varphi}$, 由引理 4 知存在零测度集 $E_1 \subset [0, 2\pi)$, 使得

$$r = |z| \text{ 足够大时, 有 } \left| A(re^{i\varphi_0}) \right| = \left| -\frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{A'\varphi'}{A\varphi} \right| \leq \left| \frac{\varphi''}{\varphi} \right| + \left| \frac{A'}{A} \right| \left| \frac{\varphi'}{\varphi} \right| \leq |z|^d。$$

对满足 $\arg z = \varphi_0 \in [0, 2\pi) \setminus E_1$ 的 $z = re^{i\varphi_0}$ 成立, 其中 d 为常数。由引理 9 知 A 为一多项式, 与 A 为超越整函数矛盾, 因此 $\frac{A}{A'}\varphi'' - \varphi' + \frac{A^2}{A'}\varphi \equiv 0$, 由引理 2 可得 $\bar{\lambda}(g_1) = \bar{\lambda}(f' - \varphi) = \lambda(g_1) = \sigma(g_1) = \infty$ 。

观察 (26) 式两边, 事实上, 若 z_0 为 $g_1(z)$ 的 $k (> 2)$ 重零点, 则 z_0 为 $(\varphi'' - \frac{A'}{A}\varphi' + A\varphi)$ 的 $k-2$ 重零点, 这样即有

$$N(r, \frac{1}{g_1}) \leq 2\bar{N}(r, \frac{1}{g_1}) + N(r, \frac{1}{\varphi'' - \frac{A'}{A}\varphi' + A\varphi}) \quad (27)$$

由 (26) 式可得

$$-\frac{1}{(\varphi'' - \frac{A'}{A}\varphi' + A\varphi)}(\frac{g_1''}{g_1} - \frac{A'}{A}\frac{g_1'}{g_1} + A) = \frac{1}{g_1}$$

从而

$$m(r, \frac{1}{g_1}) \leq m(r, \frac{1}{\varphi'' - \frac{A'}{A}\varphi' + A\varphi}) + m(r, \frac{g_1''}{g_1}) + m(r, \frac{g_1'}{g_1}) + m(r, \frac{A'}{A}) + m(r, A) + \log 3 \quad (28)$$

再结合 (27), (28) 式可得, 除去一个线测度为有穷的集合 E_3 外,

$$\begin{aligned} T(r, g_1) &= T(r, \frac{1}{g_1}) + O(1) = m(r, \frac{1}{g_1}) + N(r, \frac{1}{g_1}) + O(1) \leq T(r, \frac{1}{\varphi'' - \frac{A'}{A}\varphi' + A\varphi}) + 2\bar{N}(r, \frac{1}{g_1}) + m(r, \frac{g_1''}{g_1}) + m(r, \frac{g_1'}{g_1}) + \\ &m(r, \frac{A'}{A}) + m(r, A) + \log 3 \leq T(r, \varphi'' - \frac{A'}{A}\varphi' + A\varphi) + c \log(rT(r, g_1)) + 2\bar{N}(r, \frac{1}{g_1}) + c \log(rT(r, A)) + T(r, A) \end{aligned} \quad (29)$$

由于当 r 充分大时,

$$c \log(rT(r, g_1)) \leq \frac{1}{2}T(r, g_1), \quad c \log(rT(r, A)) \leq T(r, A) \quad (30)$$

设 $\sigma(\varphi) = \alpha$, 已知 $\sigma(A) = \sigma$, 令 $\beta = \max\{\sigma, \alpha\}$, 则对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 当 r 充分大时,

$$T(r, \varphi'' - \frac{A'}{A}\varphi' + A\varphi) \leq r^{\beta + \varepsilon}, \quad T(r, A) \leq r^{\beta + \varepsilon} \quad (31)$$

由 (29)~(31) 得到, 当 $r \notin E_3$, 且当 r 充分大时,

$$T(r, g_1) \leq 4\overline{N}(r, \frac{1}{g_1}) + 6r^{\beta+\varepsilon} \quad (32)$$

由引理3和(32)式,得到 $\sigma_2(g_1) \leq \overline{\lambda}_2(g_1)$, 从而 $\sigma_2(g_1) = \overline{\lambda}_2(g_1)$ 。由 $f' = g_1 + \varphi$ 及 $\sigma_2(f) = \sigma_2(f') = \sigma_2(g_1) = \sigma$ 得到 $\overline{\lambda}_2(g_1) = \overline{\lambda}_2(f' - \varphi) = \sigma$ 。

3) 最后证明 $\tilde{\lambda}(f'' - \varphi) = \infty$ 和 $\overline{\lambda}_2(f'' - \varphi) = \sigma$ 。令 $g_2 = f'' - \varphi$, 对(5)两边求导得

$$f''' + Af' + Af' = 0 \quad (33)$$

把 $g'_2 = f''' - \varphi'$ 代入(33)式得

$$A'f + Af' = -\varphi' - g_2'' \quad (34)$$

再对(33)式两边求导,则有

$$f^{(4)} + Af'' + 2A'f' + A''f = 0 \quad (35)$$

由(5)式及注意到 $f^{(4)} = g_2'''' + \varphi''$, (35)可变形为

$$2A'f' + (A'' - A^2)f = -\varphi'' - g_2'' \quad (36)$$

我们断言: $AA'' - A^3 - 2(A')^2 \neq 0$, 否则 $A = \frac{A''}{A} - 2(\frac{A'}{A})^2$, 由类似情形2)的讨论可得矛盾。由(34), (36)式有

$$f = \frac{-Ag_2'' + 2A'g_2' - A\varphi'' + 2A'\varphi'}{AA'' - A^3 - 2(A')^2} \quad (37)$$

再把(37)式以及 $f'' = g_2 + \varphi$ 代入(5)式即有

$$-A^2g_2'' + 2AA'g_2' + (AA'' - A^3 - 2(A')^2)g_2 = A^2\varphi'' - 2AA'\varphi' - (AA'' - A^3 - 2(A')^2)\varphi \quad (38)$$

由类似情形2)的讨论可得, $A^2\varphi'' - 2AA'\varphi' - (AA'' - A^3 - 2(A')^2)\varphi \neq 0$, 再由引理2知 $\tilde{\lambda}(g_2) = \lambda(g_2) = \sigma(g_2) = \infty$ 。

观察(38)式两边,利用类似情形1)和情形2)的讨论可得 $\overline{\lambda}_2(g_2) = \overline{\lambda}_2(f'' - \varphi) = \sigma$ 。

3.2 定理2的证明

1) 首先假设 $d_2 \neq 0$, $f (\neq 0)$ 是方程(7)的任一解,由定理A知 $\sigma(f) = \infty$, $\sigma_2(f) = m$ 。

令 $W = d_2f'' + d_1f' + d_0f - \varphi = g - \varphi$, 由 $\max\{\sigma(d_2(z)), \sigma(d_1(z)), \sigma(d_0(z))\} < m = \sigma_2(f)$ 和引理8知 $\sigma(W) = \sigma(g) = \infty$ 。为证 $\tilde{\lambda}(g - \varphi) = \infty$, 仅需证明 $\tilde{\lambda}(W) = \infty$ 。将 $f'' = -Be^P f$ 代入 $W(z)$, 得到

$$W = d_2(-Be^P f) + d_1f' + d_0f - \varphi = d_1f' + (d_0 - d_2Be^P)f - \varphi \quad (39)$$

对方程(39)的两边微分且用 $f'' = -Be^P f$ 替换 f'' , 得到

$$W' = d_1'f' + d_1f'' + (d_0' - d_2'Be^P - d_2Be^P e^P - d_2Be^P P')f + (d_0 - d_2Be^P)f' - \varphi' = (d_1' + d_0 - d_2Be^P)f' + (d_0' - d_1Be^P - d_2'Be^P - d_2Be^P e^P - d_2Be^P P')f - \varphi' \quad (40)$$

令 $\alpha_1 = d_1$, $\alpha_0 = d_0 - d_2Be^P$, $\beta_1 = d_1' + d_0 - d_2Be^P$, $\beta_0 = d_0' - d_1Be^P - d_2'Be^P - d_2Be^P e^P - d_2Be^P P'$ 。则有

$$\begin{cases} \alpha_1 f' + \alpha_0 f = W + \varphi \\ \beta_1 f' + \beta_0 f = W' + \varphi' \end{cases}$$

令 $k = \alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1$, 有

$$k = d_1(d_0' - d_1Be^P - d_2'Be^P - d_2Be^P e^P - d_2Be^P P') - (d_0 - d_2Be^P)(d_1' + d_0 - d_2Be^P) = (d_1'd_2B + 2d_0d_2B - d_1^2B - d_1d_2'B - d_1d_2B' - d_1d_2BP')e^P - d_2^2B^2e^{2P} + d_0'd_1 - d_0d_1' - d_0^2 = h_1e^P + h_2e^{2P} + h_0$$

其中, h_2, h_1, h_0 为级小于 m 的亚纯函数,由前边假设的 $d_2 \neq 0$ 知, $h_2 \neq 0$, 用类似引理7的讨论可得 $k \neq 0$ 。

由(39)和(40)得到

$$f' = \frac{\beta_0(W+\varphi) - \alpha_0(W'+\varphi')}{\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1} \quad (41)$$

$$f = \frac{\alpha_1(W'+\varphi') - \beta_1(W+\varphi)}{\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1} \quad (42)$$

对(41)式两边求导,得

$$f'' = \frac{(\beta_0(W+\varphi) - \alpha_0(W'+\varphi'))(\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1) - (\beta_0(W+\varphi) - \alpha_0(W'+\varphi'))(\alpha_1\beta_0' - \alpha_0\beta_1')}{(\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1)^2} \quad (43)$$

把(42),(43)代入(7)式中得

$$(-\alpha_0 k)W'' + (-\alpha_0' k + \beta_0 k + \alpha_0 k' + B e^P \alpha_1 k)W' + (\beta_0' k - k' \beta_0 - B e^P k \beta_1)W = F \quad (44)$$

式中: $k = \alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1$, $F = \alpha_0 k \varphi'' - (k(-\alpha_0)' + \beta_0 k + k' \alpha_0 + B e^P k \alpha_1) \varphi' - (\beta_0' k - k' \beta_0 - B e^P k \beta_1) \varphi = (d_2)^3 B^4 \varphi e^{4P} + H_0 + H_1 e^P + H_2 e^{2P} + H_3 e^{3P}$; $H_i (i=0, 1, 2, 3)$ 为级小于 m 的亚纯函数。

已知 $d_2 \neq 0$, $B \neq 0$, 类似引理7的讨论可知 $F \neq 0$, 而当 $d_2 \neq 0$ 时, $\alpha_0 = d_0 - d_2 B e^P \neq 0$, 于是由引理2和(44)式可得 $\bar{\lambda}(W) = \infty$ 。

2) 当 $d_2 = 0$, $d_0 \neq 0$, $d_1 \neq 0$ 时, 使用类似情形1)的方法可得 $\bar{\lambda}(W) = \infty$ 。

3) 当 $d_2 \equiv d_0 \equiv 0$, 且 $d_1 \neq 0$ 时, $W = g - \varphi = d_1(f' - \frac{\varphi}{d_1})$, 得 $\frac{W}{d_1} = f' - \frac{\varphi}{d_1}$ 。于是由类似定理1的证法得

$$\bar{\lambda}(\frac{W}{d_1}) = \bar{\lambda}(f' - \frac{\varphi}{d_1}) = \sigma(\frac{W}{d_1}) = \infty$$

而又由 $\bar{\lambda}(\frac{1}{d_1}) \leq \sigma(\frac{1}{d_1}) = \sigma(d_1) < m < \bar{\lambda}(\frac{W}{d_1})$, 能够得到 $\bar{\lambda}(W) = \infty$, 即 $\bar{\lambda}(g - \varphi) = \infty$ 。

4) 当 $d_2 \equiv d_1 \equiv 0$, $d_0 \neq 0$ 时, 使用类似情形3)的方法可得 $\bar{\lambda}(W) = \infty$ 。综合1), 2), 3), 4), 得 $\bar{\lambda}(W) = \bar{\lambda}(g - \varphi) = \infty$ 。

参考文献:

- [1] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京: 科学出版社, 1982: 7-33.
- [2] CHEN ZONGXUAN. On the complex oscillation theory of $f^{(k)} + Af = F$ [J]. Proc Edinburgh Math Soc, 1993, 36: 447-461.
- [3] 陈宗煊. 二阶复域微分方程解的不动点与超级[J]. 数学物理学报, 2000, 20(3): 425-432.
- [4] 高仕安, 陈宗煊, 陈特为. 线性微分方程的复振荡理论[M]. 广州: 华中理工大学出版社, 1996: 199.
- [5] CHEN ZONGXUAN. Zeros of meromorphic solutions of higher order linear differential equations[J]. Analysis, 1994, 14: 425-438.
- [6] 何育赞, 肖修治. 代数体函数和微分方程[M]. 北京: 科学出版社, 1988: 205.
- [7] GAO SHIAN. Two theorems on the complex oscillation theory of non-homogeneous linear differential equations[J]. J Math Anal Appl, 1991, 162: 381-391.
- [8] GUNDERSEN G. Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates[J]. J London Math Soc, 1988, 37(2): 88-104.
- [9] 陈宗煊, 孙光镐. 一类二阶微分方程的解和小函数的关系[J]. 数学年刊, 2006, 27A(4): 431-442.
- [10] 曹春雷, 陈宗煊. 一类整函数系数微分方程解的增长级和零点[J]. 应用数学学报, 2002, 25(1): 123-131.
- [11] 张然然, 陈宗煊. 一类微分方程的解和小函数的关系[J]. 数学物理学报, 2009, 29A(4): 918-928.

(下转第79页)

- [5] 杜尚丰,李迎霞,马承伟,等. 中国温室环境控制硬件系统研究进展[J]. 农业工程学报,2004,20(1):7-12.
- [6] 杨光松. 基于nRF905的无线温度数据采集系统[J]. 微计算机技术,2008,24(8):104-106.
- [7] 王广运,郭秉义,周波. nRF905无线通讯模块在无线数据采集系统中的应用[J]. 工业控制计算机,2005,18(7):7-8.
- [8] 孙宁,刘欣慰,赵印. 基于融合算法的火灾远程监控报警系统设计[J]. 软件导刊,2008,7(7):54-55.
- [9] ANU B,MIKE Z. Sensors and wireless communication for medical care[C]//International Workshop on Database and Expert Systems Applications (DESA),2003:956-960.
- [10] 金保华,张勇,崔光照. 基于nRF905的无线数据多点跳传通信系统[J]. 仪表技术与传感器,2004(9):39-40.
- [11] 谢欣,张恒,等. 基于能量与功率控制的TopDisc拓扑算法研究[J]. 华东交通大学学报,2010,27(3):58-61,87.
- [12] 汤文亮,陈松,等. 基于EDV-Hop的免测距定位算法研究[J]. 华东交通大学学报,2012,29(3):40-45.

A Research on the Paddy Field Monitoring System Based on NRF905

Huang Zhaodi, Pan Zezhong, Zhu Lu, Huang Dechang

(School of Information Engineering, East China Jiao tong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: This paper mainly discusses the design and realization of a wireless sensor network monitoring system in the paddy field environment based on nRF905. It analyzes in details the composition structure, working principles, hardware and software design of the proposed system, and then elaborates the remote monitoring of wireless sensor networks in the paddy field environment. Experimental tests show that the system operates stably and reliably with concise hardware configuration, small size, low power consumption and a wide range of applications.

Key words: wireless sensor network; nRF905; paddy field environment; remote monitoring

(上接第60页)

- [12] CHEN ZONGXUAN, SHON KWANGHO, On the growth of solutions of a class of higher order differential equations[J]. Acta Mathematica Scientia, 2004, 24B(1):52-60.
- [13] 王锦熙,易才凤. 亚纯函数的迭代级与Borel方向[J]. 华东交通大学学报,2009,26(1):94-103.

The Relationship Between Solutions of Second-order Complex Differential Equations and Small Growth Functions

Li Mingxing, Xiao Lipeng

(Institute of Mathematics and Information, Jiangxi Normal University, Nanchang 330022, China)

Abstract: This paper investigates the solutions of a class of second-order linear differential equations, and explores the 1st, 2nd derivatives and the differential polynomial zero convergence exponent with small growth functions.

Key words: linear differential equations; entire function; hyper order; exponent of convergence of zero-sequence