

文章编号:1005-0523(2013)01-0037-04

θ 型奇异积分算子在加权 Morrey 空间中的有界性

叶晓峰,王腾飞,胡媛媛,王 蒙

(华东交通大学基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要: 设 $\theta(t)$ 是连续模, T 是带有 θ 型 Calderón-Zygmund 核的奇异积分算子。若 $w \in A_p$, $1 < p < \infty$, 利用外推原理和空间分解理论, 我们得到了 T 在加权 Morrey 空间上的有界性, 即 T 是 $L^{p,\kappa}(w)$ 到 $L^{p,\kappa}(w)$ 有界的。

关键词: 连续模; θ 型 Calderón-Zygmund 核; 加权 Morrey 空间; 外推法; A_p 权

中图分类号: O174.2

文献标志码: A

算子在加权 Lebesgue 空间 $L^p(w)$ 有界问题可以追溯到 1972 年 Muckenhoupt 在 1972 年文[1]中对 Hardy-Littlewood 极大算子的讨论。文中提出了 A_p 权的概念, 由此顺利解决了极大算子的加权有界性, 并且使得加权理论如今成为调和分析的主要分支之一。2009 年, Komori 和 Shirai 在文[2]中首次提出了加权 Morrey 空间的概念, 他们在文中讨论了极大算子以及 Calderón-Zygmund 奇异积分算子、分数次积分算子及其交换子在加权 Morrey 空间中的有界性。最近出现了很多这方面的结果, 具体参见文献[3-8]。另外加权 Morrey 空间在偏微分方程中的应用, 也得到了相应的推广, 详见参考文献[9]。

奇异积分算子尤其是 Calderón-Zygmund 奇异积分算子在各种函数空间中的有界性的讨论是当代调和分析研究的主要问题。1952 年, Calderón 和 Zygmund 将这一算子推广到了 R^n 上, 他们运用实变方法解决了算子在 Lebesgue 空间 $L^p(R^n)$ 的有界性问题从而使调和分析在高维空间中有了新的发展。1985 年, Yabuta 在文[10]中首次提出了 θ 型奇异积分算子, 并得到了 L^p 有界性, $1 < p < \infty$ 。最近文[11]讨论了 θ 型奇异积分算子 Lipschitz 有界性的一个等价条件。另一方面, Hytönen 在文[12]得到了 θ 型 Calderón-Zygmund 奇异积分算子在加权 Lebesgue 空间中的 $L^2(w)$ 有界性, 并指出其最优上界为 $C(n, T, 2)[w]_{A_2}$ 。

2 定理及其证明

首先, 我们来介绍加权 Morrey 空间的定义

定义 1 设 $1 < p < \infty$, $0 < \kappa < 1$, w 是权函数, 对于 R^n 中的局部可积函数 $f(x)$ 若满足

$$\|f(x)\|_{L^{p,\kappa}(w)} := \sup_Q \left(\frac{1}{w(Q)^\kappa} \int_Q |f(x)|^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \text{ 则称 } f(x) \text{ 属于加权 Morrey 空间, 并记其范数为 } \|\cdot\|_{L^{p,\kappa}(w)}。$$

注意到当 $\kappa=0$ 时, $L^{p,0}(w) = L^p(w)$ 是对经典的加权 Lebesgue 空间的推广。

下面给出 A_p 权的如下定义

定义 2 设 $1 < p < \infty$, 若存在常数 $C \geq 1$ 使得对于任意的正方体 Q 有

收稿日期: 2013-02-17

基金项目: 国家自然科学基金项目(11161021)

作者简介: 叶晓峰(1980—), 男, 副教授, 博士, 研究方向为调和分析。

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{1-p'} dx \right)^{p-1} \leq C$$

其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, 则称 w 属于 A_p 权。若对常数 C 取下确界, 就记这个下确界为 $[w]_{A_p}$ 。

为了介绍 θ 型 Calderón-Zygmund 奇异积分算子, 先给出连续模的定义。

定义 3 设 $\theta(0)=0$, 称 $\theta: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 是一个连续模, 若 θ 是次可加的, 即 $\theta(t+u) \leq \theta(t) + \theta(u)$, 并且单调递增。

从而可以定义 θ 型 Calderón-Zygmund 奇异积分算子为

定义 4 设 $\theta(t)$ 满足 Dini 条件 $\int_0^1 \frac{\theta(t)}{t} dt < \infty$, T 是带有核 $K(x, y)$ 且 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 有界的线性算子, 满足:

- 1) $|K(x, y)| \leq C|x-y|^{-n}$, 其中 $x \neq y$;
- 2) 对于任意的 $|x-y| > 2|x-x'| > 0$ 有

$$|K(x, y) - K(x', y)| + |K(x, y) - K(x', y)| \leq C\theta\left(\frac{|x-x'|}{|x-y|}\right) \frac{1}{|x-y|^n}$$

则 K 称为 θ 型 Calderón-Zygmund 核, $Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y)f(y)dy$ 称为 θ 型 Calderón-Zygmund 奇异积分算子。

因此, 得到本文主要定理:

定理 1 设 $1 < p < \infty$, $w \in A_p$, θ 是连续模, 并且 T 是 θ 型 Calderón-Zygmund 奇异积分算子, 则 T 是 $L^{p, \kappa}(w) \rightarrow L^{p, \kappa}(w)$ 有界的。

为了证明该定理, 需要如下引理。

引理 1 设 $w \in A_2$, 函数 θ 是连续模, T 是带有核 $K(x, y)$ 的 θ 型 Calderón-Zygmund 奇异积分算子, 则有

$$\|Tf\|_{L^2(w)} \leq C(n, T, 2)[w]_{A_2} \|f\|_{L^2(w)}$$

根据上面的结果, 我们就可以通过外推法得到 T 的 $L^p(w)$ 有界性, 因此有必要介绍这一重要的定理, 其证明可参考文献[13-14]。

引理 2 设 T 是次线性算子, 满足存在 $p_0: 1 < p_0 < \infty$ 使得对于任意的 $w \in A_{p_0}$ 有 $\|Tf\|_{L^{p_0}(w)} \leq C\|f\|_{L^{p_0}(w)}$, 则对任意的 $p: 1 < p < \infty$ 以及 $w \in A_p$ 有 $\|Tf\|_{L^p(w)} \leq C\|f\|_{L^p(w)}$ 。

3 定理的证明

证明 在方体 $3Q$ 上考虑算子 T 的分解

$$\left(\frac{1}{w(Q)^{\kappa}} \int_Q |Tf(x)|^p w dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{1}{w(Q)^{\kappa}} \int_Q |T(\chi_{3Q})(x)|^p w dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{1}{w(Q)^{\kappa}} \int_Q |T(\chi_{(3Q)^c})(x)|^p w dx \right)^{\frac{1}{p}} =: I_1 + I_2$$

其中: χ_{3Q} 和 $\chi_{(3Q)^c}$ 为特征函数。

由引理 1 和引理 2 有

$$I_1 \leq \left(\frac{1}{w(Q)^{\kappa}} \int_{3Q} |f(x)|^p w dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{C}{w(3Q)^{\kappa}} \int_{3Q} |f(x)|^p w dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C\|f\|_{L^{p, \kappa}(w)}$$

至于 I_2 , 取 $\mathbb{R}^n$ 中的范数为: $|x-y| = \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i - y_i\}$, 设 Q 的边长为 l , x_0 为 Q 的中心, 由几何关系知, 对于任意的 $x \in Q$ 以及 $y \in (3Q)^c$ 有 $|x_0 - y| \leq C|x-y|$ 。估计

$$\left| T(f\chi_{(3Q)^c})(x) \right| \leq C \int_{(3Q)^c} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy = C \int_{|x_0 - y| > \frac{3}{2}l} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy$$

对于任意的 $p > 1$, 取 p_0 使得 $1 < p_0 < p$ 。由于存在 $g \in L_w^{(p/p_0)'}(Q)$, 且 $\|g\|_{L_w^{(p/p_0)'}(Q)} = 1$, 使得

$$\left(\int_Q |T(f\chi_{(3Q)^c})(x)|^p w dx \right)^{\frac{p_0}{p}} = \left(\int_Q |T(f\chi_{(3Q)^c})(x)|^{p_0} g(x) w dx \right)^{\frac{p_0}{p}}$$

从而由 Hölder 不等式、 A_p 权定义有

$$\begin{aligned} I_2^{p_0} &= \left(\frac{1}{w(Q)^\kappa} \int_Q |T(f\chi_{(3Q)^c})(x)|^{p_0 \cdot \frac{p}{p_0}} w dx \right)^{\frac{p_0}{p}} = \left(\frac{1}{w(Q)^\kappa} \int_Q |T(f\chi_{(3Q)^c})(x)|^{p_0} g(x) w dx \right)^{\frac{p_0}{p}} \leq \\ &C \left(\frac{1}{w(Q)^\kappa} \right)^{\frac{p_0}{p}} \left(\int_{|x_0 - y| > l} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy \right)^{p_0} \int_Q g(x) w dx \leq C \left(\int_{|x_0 - y| > l} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy \right)^{p_0} \|g\|_{L_w^{(p/p_0)'}(Q)} w(Q)^{\frac{p_0}{p}(1-\kappa)} \leq \\ &C \left(\sum_{j=0}^{\infty} \int_{3^j l < |x_0 - y| < 3^{j+1} l} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy \right)^{p_0} w(Q)^{\frac{p_0}{p}(1-\kappa)} \leq C \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{|3^{j+2} Q|} \int_{3^{j+2} Q} |f(y)| dy \right)^{p_0} w(Q)^{\frac{p_0}{p}(1-\kappa)} \leq \\ &C \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{|3^{j+2} Q|} \int_{3^{j+2} Q} |f(y)|^p w dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|3^{j+2} Q|} \int_{3^{j+2} Q} w^{1-p'} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \right)^{p_0} w(Q)^{\frac{p_0}{p}(1-\kappa)} \leq \\ &C \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{|3^{j+2} Q|} \int_{3^{j+2} Q} |f(y)|^p w dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|3^{j+2} Q|} \int_{3^{j+2} Q} w^{1-p'} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \right)^{p_0} w(Q)^{\frac{p_0}{p}(1-\kappa)} \leq \\ &C \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{|3^{j+2} Q|} \int_{3^{j+2} Q} |f(y)|^p w dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|3^{j+2} Q|} w(3^{j+2} Q) \right)^{-\frac{1}{p}} \right)^{p_0} w(Q)^{\frac{p_0}{p}(1-\kappa)} = \\ &C \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{w(3^{j+2} Q)^\kappa} \int_{3^{j+2} Q} |f(y)|^p w dy \right)^{\frac{1}{p}} w(3^{j+2} Q)^{-\frac{(1-\kappa)}{p}} \right)^{p_0} w(Q)^{\frac{p_0}{p}(1-\kappa)} \leq \\ &C \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{w(Q)^{\frac{(1-\kappa)}{p}}}{w(3^{j+2} Q)^{\frac{(1-\kappa)}{p}}} \right)^{p_0} \|f\|_{L^{p,\kappa}(w)}^{p_0} \leq C \|f\|_{L^{p,\kappa}(w)}^{p_0} \end{aligned}$$

结合前面 I_1 的部分, 从而有

$$\|Tf\|_{L^{p,\kappa}(w)} \leq C \|f\|_{L^{p,\kappa}(w)}$$

因此结论成立。

参考文献:

- [1] MUCKENHOUT B. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function[J]. Trans. of the Amer Math Soc, 1972, 165:207-226.
- [2] KOMORI Y, SHIRAI S. Weighted Morrey spaces and a singular integral operator[J]. Math Nachr, 2009, 282(2):219-231.
- [3] YE X F. Some estimates for multilinear commutators on the weighted Morrey spaces[J]. Mathematical Sciences, 2012, 6(33), 6-11.
- [4] 王华, 刘和平. Bochner-Riesz算子在加权Morrey空间上的一些估计[J]. 数学学报, 2012, 55(3):551-560.
- [5] WANG H. The boundedness of some operators with rough kernel on the weighted Morrey spaces[EB/OL]. (2010-11-26) [2013-01-07]. <http://arxiv.org/pdf/1011.5763>.
- [6] WANG H. Some estimates for commutators of fractional integrals associated to operators with Gaussian kernel bounds on weighted Morrey spaces[EB/OL]. (2012-08-15) [2013-01-07]. <http://arxiv.org/abs/1202.5740>.
- [7] WANG H. Boundedness of fractional integral operators with rough kernels on weighted Morrey spaces [EB/OL]. (2012-03-07) [2013-01-07]. <http://arxiv.org/pdf/1203.1441>.
- [8] WANG H. Intrinsic square function on the weighted Morrey spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2012, 396(1):302-314.
- [9] FU Z, LU S Z, SHI S G. Boundedness of sublinear operators on weighted Morrey spaces and applications [EB/OL]. (2012-08-03) [2013-01-07]. <http://arxiv.org/pdf/1208.4788>.
- [10] YABUTA K. Generalization of Calderón-Zygmund operator[J]. Studia Math, 1985, 82:17-31.
- [11] 陈跃辉, 叶晓峰, 刁俊东. 一类带 $\theta(t)$ 型核的奇异积分算子的有界性[J]. 华东交通大学学报, 2010, 27(5):81-84.
- [12] HYTÖNEN T. The A_2 Theorem with the Dini condition [EB/OL]. (2012-12-16) [2013-01-07]. <http://arxiv.org/abs/1212.3842>.
- [13] GARCÍA C J. An extrapolation theorem in the theory of A_p weights[J]. Proc Amer Math Soc, 1983, 87(3):422-426.
- [14] 周民强. 调和分析讲义[M]. 北京:北京大学出版社 1999:185-186.

Boundedness of θ -type Calderón-Zygmund Singular Integral Operators in Weighted Morrey Space

Ye Xiaofeng, Wang Tengfei, Hu Yuanyuan, Wang Meng

(School of Basic Sciences, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: Let $\theta(t)$ be a modulus of continuity. Suppose T is a singular integral operator with θ -type Calderón-Zygmund kernel. If $w \in A_p$, $1 < p < \infty$, by using the extrapolation theory and decomposition of space, we obtain that the operator T is bounded in weighted Morrey space. That is, T is bounded from $L^{p,\kappa}(w)$ to $L^{p,\kappa}(w)$.

Key words: modulus of continuity; θ type Calderón-Zygmund operator; weighted Morrey space; extrapolation; A_p weights