

文章编号:1005-0523(2013)02-0063-08

含有 Hardy-Sobolev 临界指标的拟线性方程组多解的证明

王莉

(华东交通大学基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要:研究了一类含有 Hardy-Sobolev 临界指标权函数的拟线性方程组,运用最佳 Sobolev 常数和 Nehari 流形等变分方法证明在一定条件下椭圆方程组正解的存在性以及多重性。

关键词:拟线性椭圆方程组;临界指数;多解

中图分类号:0175.25

文献标志码:A

本文考虑下面一类含有 Hardy-Sobolev 临界指标项与非线性耦合项的拟线性椭圆方程组:

$$\left. \begin{aligned} Lu &= \frac{|u|^{p^*(t)-2}u}{|x|^t} + \frac{\eta\alpha}{\alpha+\beta} \frac{|u|^{\alpha-2}u|v|^\beta}{|x|^t} + \sigma_1|u|^{q-2}u, \quad x \in \Omega \\ Lv &= \frac{|v|^{p^*(t)-2}v}{|x|^t} + \frac{\eta\beta}{\alpha+\beta} \frac{|u|^\alpha|v|^{\beta-2}v}{|x|^t} + \sigma_2|v|^{q-2}v, \quad x \in \Omega \\ u &= v = 0, \quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: $L \cdot = -\operatorname{div}(|\nabla \cdot|^{p-2}\nabla \cdot) - \mu \frac{|\cdot|^{p-2}}{|x|^p}$ 是椭圆算子; $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ 是包含原点的有界光滑区域, $0 \leq t < p$, $p^*(t) = \frac{p(N-t)}{N-p}$

为临界 Hardy-Sobolev 指数; $\bar{\mu} := (\frac{n-p}{p})^p$ 是最佳 Hardy 常数, (1) 中的参数满足下列假设条件:

(M): $N \geq p^2$, $0 \leq \mu < \bar{\mu}$, $0 < \eta < \infty$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, $1 < q < p$, $0 \leq t < p$, $1 < \alpha, \beta < p^*(t) - 1$, $\alpha + \beta = p^*(t)$ 。

之所以对问题(1)感兴趣是因为该方程组展示了关于能量泛函失紧状态下解的存在和非存在性现象。当(1)中 $\eta = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2$ 且 $u = v$ 时, (1)可化为单个方程, 而这类方程已经被许多学者研究并得出了许多有趣的结论(参见[1-3])。涉及到 Hardy-Sobolev 不等式的单个方程在物理上也有很多应用(参见[4])。因为问题(1)包含了 Hardy 项和弱耦合项, 这样的问题在其他的文献当中是很少讨论到的。本文将利用[5-6]的方法来证明在不同的假设条件下(1)多个正解的存在性。将在空间 $E := W \times W$ 中讨论问题(1), 这里 $W := W_0^{1,p}(\Omega)$ 表示 $C_0^\infty(\Omega)$ 关于模 $(\int_\Omega |\nabla \cdot|^p dx)^\frac{1}{p}$ 的完备化空间。(1)对应的能量泛函为

$$I(u, v) = \frac{1}{p} \int_\Omega \left(|\nabla u|^p + |\nabla v|^p - \mu \frac{|u|^p + |v|^p}{|x|^p} \right) dx - \frac{1}{q} \int_\Omega (\sigma_1 |u|^q + \sigma_2 |v|^q) dx - \frac{1}{p^*(t)} \int_\Omega \frac{|u|^{p^*(t)} + |v|^{p^*(t)} + \eta |u|^\alpha |v|^\beta}{|x|^t} dx,$$

则

$$I(u, v) \in C^1(W \times W, \mathbf{R}) \quad (2)$$

若对任意的 $(\varphi, \psi) \in E$, 有 $(u, v) \neq (0, 0)$, $\langle I'(u, v), (\varphi, \psi) \rangle = 0$ 成立, 则称函数 $z = (u, v) \in E$ 是方程组(1)的解。于是求问题(1)的非平凡解等价于求 $I(u, v)$ 的非零临界点。让 $|\Omega|$ 表示 Ω 的 Lebesgue 测度, $-\operatorname{div}(|\nabla \cdot|^{p-2}\nabla \cdot) - \mu \frac{|\cdot|^{p-2}}{|x|^p}$ 的第一特征值 $\lambda_1(\mu)$ 记为

收稿日期:2012-12-14

基金项目:国家自然科学基金项目(11071094);江西省教育厅科学技术研究项目(GJJ13311)

作者简介:王莉(1983—),女,讲师,博士,研究方向为偏微分方程。

$$A_1(\mu) = \inf_{W \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbf{R}^N} (|\nabla u|^p - \mu \frac{|u|^p}{|x|^p}) dx}{\int_{\mathbf{R}^N} |u|^p dx}.$$

$$\text{令 } \gamma_1 = \left(\frac{p^*(t) - q}{p^*(t) - p} A_1(\mu)^{-\frac{q}{p}} |\Omega|^{1 - \frac{q}{p}} \right)^{-1} \left(\frac{p - q}{p^*(t) - q} (S(\eta, \alpha, \beta, \mu, t))^{\frac{p^*(t)}{p^*(t) - p}} \right)^{\frac{p - q}{p^*(t) - p}} \quad (3)$$

$$\text{其中: } S(\eta, \alpha, \beta, \mu, t) = \inf_{(\mu, v) \in (D^{1,p}(\mathbf{R}^N))^2 \setminus \{(0, 0)\}} \frac{\left(\int_{\mathbf{R}^N} (|\nabla u|^p + |\nabla v|^p - \mu \frac{|u|^p}{|x|^p}) dx \right)^{\frac{p}{p^*(t)}}}{\int_{\mathbf{R}^N} \frac{|u|^{p^*(t)} + |v|^{p^*(t)} + \eta |u|^\alpha |v|^\beta}{|x|^t} dx}, \quad D^{1,p}(\mathbf{R}^N) \text{ 为 } C_0^\infty(\mathbf{R}^N) \text{ 关于模}$$

$\int_{\mathbf{R}^N} (|\nabla u|^p)^{\frac{1}{p}} dx$ 完备化。

本文主要有以下两个结论:

定理 1 若 (M) 成立且有 $0 < \sigma_1 + \sigma_2 < \gamma_1$, 则 (1) 至少有一个正解。

定理 2 假设条件 (M) 成立且 $b(\mu)$ 和 δ 均为后文定理 1 中定义的常数, $\frac{N(p-1)}{N-p} \leq q < p$, $0 \leq \mu < \frac{N^{p-1}(Nq - pq - Np + N)}{q^p}$, 则存在 $\gamma_2 > 0$ 使得对任意 σ_1, σ_2 满足 $0 < \sigma_1 + \sigma_2 < \gamma_2$, 方程组 (1) 至少有两个正解。

在给出定理的证明之前先给出 (PS) 序列及 (PS) 条件的定义:

定义 对于泛函 I , 若序列 $\{u_n\}$ 满足下列条件:

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $I(u_n) \rightarrow d \in \mathbf{R}$, $I'(u_n) \rightarrow 0$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中, 则称 $\{u_n\}$ 为 I 在水平 d 处的 Palais-Smale 序列 (简称 (PS)_d 序列)。

若 I 的任意一个 (PS) 序列都有强收敛子列, 则称 I 满足 Palais-Smale 条件 (简称 (PS))。

下面对本文中即将用到的记号做一些说明: $\|u\|_W = \left(\int_{\Omega} (|\nabla u|^p - \mu \frac{|u|^p}{|x|^p}) dx \right)^{\frac{1}{p}}$ 表示 W 空间的模, $\|z\| = \|z\|_{W \times W} = \|(u, v)\|_{W \times W} = \left(\|u\|_W^p + \|v\|_W^p \right)^{\frac{1}{p}}$ 表示 $W \times W = E$ 的模, E 的对偶空间记为 E^{-1} , 字母 C, C', C_i 等代表任意正常数。

1 局部 Palais-Smale 条件

引理 1 若 $\{z_n\} \subset E$ 为 I 的 (PS)_c 序列且在 E 中有 $z_n \rightarrow z$, 则有 $I'(z) = 0$ 且 $I(z) \geq F(\tau_{\min}^{(1)}, \tau_{\min}^{(2)})$ 。

其中

$$F(\tau_{\min}^{(1)}, \tau_{\min}^{(2)}) = \inf_{\tau_1, \tau_2 \geq 0} F(\tau_1, \tau_2) < 0,$$

$$\tau_{\min}^{(i)} = \left(\frac{q \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*(t)} \right) A_1(\mu)^{-\frac{q}{p}} |\Omega|^{1 - \frac{q}{p}}}{p \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*(t)} \right)} \right)^{\frac{1}{p-q}} \sigma_i^{\frac{1}{p-q}}, \quad i = 1, 2,$$

$$F(\tau_1, \tau_2) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*(t)} \right) (\tau_1^p + \tau_2^p) - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*(t)} \right) A_1(\mu)^{-\frac{q}{p}} |\Omega|^{1 - \frac{q}{p}} (\sigma_1 \tau_1^q + \sigma_2 \tau_2^q).$$

证明 令 $z_n = (u_n, v_n)$, $z = (u, v)$, $\{z_n\} \subset E$ 为 I 的 (PS)_c 序列, 且 $z_n \rightarrow z$ 在 E 中弱收敛, 则 $I'(z) = 0$, 于是

$$I(z) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*(t)} \right) \|z\|^p - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*(t)} \right) \int_{\Omega} (\sigma_1 |u|^q + \sigma_2 |v|^q) dx.$$

由 Hölder 不等式得

$$I(z) \geq \frac{p-t}{p(N-t)} \|z\|^p - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*(t)}\right) \left[\sigma_1 \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} + \sigma_2 \left(\int_{\Omega} |v|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \right] |\Omega|^{1-\frac{q}{p}} \geq \\ \frac{p-t}{p(N-t)} \|z\|^p - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*(t)}\right) \Lambda_1(\mu)^{-\frac{q}{p}} |\Omega|^{1-\frac{q}{p}} (\sigma_1 \|u\|_W^q + \sigma_2 \|v\|_W^q) \geq F(\tau_{\min}^{(1)}, \tau_{\min}^{(2)}).$$

引理 2 $\{z_n\} \subset E$ 为 I 的 $(PS)_c$ 序列, 则 $\{z_n\}$ 在 E 中有界。

证明 反证法。设 $z_n = (u_n, v_n)$, 若 $\|z_n\| \rightarrow +\infty$, 令 $\bar{z}_n = (\bar{u}_n, \bar{v}_n) = \left(\frac{u_n}{\|z_n\|}, \frac{v_n}{\|z_n\|} \right)$ 。

假设 $\bar{z}_n \rightarrow \bar{z} = (\bar{u}, \bar{v})$ 在 E 弱收敛, 从而对任意的 $1 \leq m < p^*(t)$, 在 $L^m(\Omega)$ 中有 $\bar{u}_n$ 强收敛 $\bar{u}$, $\bar{v}_n$ 强收敛 $\bar{v}$, 并且

$$\int_{\Omega} (\sigma_1 |\bar{u}_n|^q + \sigma_2 |\bar{v}_n|^q) dx = \int_{\Omega} (\sigma_1 |\bar{u}|^q + \sigma_2 |\bar{v}|^q) dx + o_n(1) \quad (4)$$

因为 $\{z_n\} \subset E$ 为 I 的 $(PS)_c$ 序列且有 $\|z_n\| \rightarrow +\infty$, 从而当 $n \rightarrow \infty$ 时有

$$\|\bar{z}_n\|^p = \frac{p(p^*(t)-q)}{q(p^*(t)-p)} \|z_n\|^{q-p} \int_{\Omega} (\sigma_1 |\bar{u}_n|^q + \sigma_2 |\bar{v}_n|^q) dx + o_n(1) \rightarrow 0, \text{ 此式与 } \|\bar{z}_n\| = 1 \text{ 相矛盾。}$$

引理 3 如果 c 满足 $-\infty < c < c^* := \frac{p-t}{p(N-t)} (S(\eta, \alpha, \beta, \mu, t))^{\frac{N-t}{p-t}} + F(\tau_{\min}^{(1)}, \tau_{\min}^{(2)})$, 则 I 满足 $(PS)_c$ 条件。

证明 利用标准的变分原理过程就可得证该引理, 也可见参考文献[7]。

2 Nehari 流形

由于 I 在 E 上没有下界, 因此需要在 Nehari 流形 M_{σ_1, σ_2} 上考虑能量泛函 I , 其中:

$$M_{\sigma_1, \sigma_2} = \{z \in E \setminus \{0, 0\} \mid \langle I'(z), z \rangle = 0\}.$$

引理 4 方程(1)对应的能量泛函 I 在 Nehari 流形 M_{σ_1, σ_2} 上是强制的且有下界。

证明 若 $z = (u, v) \in M_{\sigma_1, \sigma_2}$, 则由 Hölder 不等式以及 Sobolev 嵌入定理得

$$I(u, v) \geq \frac{p-t}{p(N-t)} \|z\|^p - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*(t)}\right) \left[\sigma_1 \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} + \sigma_2 \left(\int_{\Omega} |v|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \right] |\Omega|^{1-\frac{q}{p}} \geq \\ \frac{p-t}{p(N-t)} \|z\|^p - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*(t)}\right) (\sigma_1 + \sigma_2) \Lambda_1(\mu)^{-\frac{q}{p}} |\Omega|^{1-\frac{q}{p}} \|z\|^q,$$

从而 I 在 M_{σ_1, σ_2} 上是强制有下界的, 证毕。

定义 $\Psi(u, v) = \langle I'(u, v), (u, v) \rangle$, 则对任意 $(u, v) \in M_{\sigma_1, \sigma_2}$, 有

$$\langle \Psi'(u, v), (u, v) \rangle = p \|z\|^p - p^*(t) \int_{\Omega} \frac{|u|^{p^*(t)} + |v|^{p^*(t)} + \eta |u|^{\alpha} |v|^{\beta}}{|x|^t} dx - q \int_{\Omega} (\sigma_1 |u|^q + \sigma_2 |v|^q) dx = \\ -(p^*(t) - p) \|z\|^p + (p^*(t) - q) \int_{\Omega} (\sigma_1 |u|^q + \sigma_2 |v|^q) dx \quad (5)$$

同文献[8]的方法, 将 M_{σ_1, σ_2} 分成三部分:

$$M_{\sigma_1, \sigma_2}^+ = \{(u, v) \in M_{\sigma_1, \sigma_2} \mid \langle \Psi'(u, v), (u, v) \rangle > 0\},$$

$$M_{\sigma_1, \sigma_2}^0 = \{(u, v) \in M_{\sigma_1, \sigma_2} \mid \langle \Psi'(u, v), (u, v) \rangle = 0\},$$

$$M_{\sigma_1, \sigma_2}^- = \{(u, v) \in M_{\sigma_1, \sigma_2} \mid \langle \Psi'(u, v), (u, v) \rangle < 0\}.$$

引理 5 若 $z_0 \in E$ 是 I 在 M_{σ_1, σ_2} 上的局部极小点, 且 $z_0 \notin M_{\sigma_1, \sigma_2}^0$, 则在 E^{-1} 中有 $I'(z_0) = 0$ 。

证明 参考 Brown-Zhang 在文献[9]中的证明。

引理6 对任意的 $\sigma_1 + \sigma_2 \in (0, \gamma_1)$, 有 $M_{\sigma_1, \sigma_2}^0 = \emptyset$ 。

证明 反证法。假设存在 $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ 满足 $0 < \sigma_1 + \sigma_2 < \gamma_1$ 且 $M_{\sigma_1, \sigma_2}^0 \neq \emptyset$, 则存在 $z = (u, v) \in M_{\sigma_1, \sigma_2}^0$ 使得

$$\|z\|^p = \frac{p^*(t) - q}{p - q} \int_{\Omega} \frac{|u|^{p^*(t)} + |v|^{p^*(t)} + \eta |u|^\alpha |v|^\beta}{|x|^t} dx \quad (6)$$

且有

$$\|z\|^p = \frac{p^*(t) - q}{p^*(t) - p} \int_{\Omega} (\sigma_1 |u|^q + \sigma_2 |v|^q) dx \quad (7)$$

由(6)可得

$$\|z\| \geq \left(\frac{p - q}{p^*(t) - q} (S(\eta, \alpha, \beta, \mu, t))^{\frac{p^*(t)}{p}} \right)^{\frac{1}{p^*(t) - p}} \quad (8)$$

由 Hölder 不等式及 Sobolev 嵌入定理(7)可得

$$\int_{\Omega} (\sigma_1 |u|^q + \sigma_2 |v|^q) dx \leq \left[\sigma_1 \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} + \sigma_2 \left(\int_{\Omega} |v|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \right] |\Omega|^{1 - \frac{q}{p}} \leq A_1(\mu)^{-\frac{q}{p}} |\Omega|^{1 - \frac{q}{p}} (\sigma_1 + \sigma_2) \|z\|^q \quad (9)$$

于是

$$\|z\| \leq \left(\frac{p^*(t) - q}{p^*(t) - p} A_1(\mu)^{-\frac{q}{p}} |\Omega|^{1 - \frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{p - q}} (\sigma_1 + \sigma_2)^{\frac{1}{p - q}} \quad (10)$$

结合(8)和(10)得

$$\sigma_1 + \sigma_2 \geq \left(\frac{p^*(t) - q}{p^*(t) - p} A_1(\mu)^{-\frac{q}{p}} |\Omega|^{1 - \frac{q}{p}} \right)^{-1} \left(\frac{p - q}{p^*(t) - q} (S(\eta, \alpha, \beta, \mu, t))^{\frac{p^*(t)}{p}} \right)^{\frac{p - q}{p^*(t) - p}} = \gamma_1,$$

这与已知条件矛盾。结论得证。

由引理6, 可记 $M_{\sigma_1, \sigma_2} = M_{\sigma_1, \sigma_2}^+ \cup M_{\sigma_1, \sigma_2}^-$, 从而定义 $\alpha_{\sigma_1, \sigma_2} = \inf_{z \in M_{\sigma_1, \sigma_2}^+} I(z)$; $\alpha_{\sigma_1, \sigma_2}^+ = \inf_{z \in M_{\sigma_1, \sigma_2}^+} I(z)$ 。

引理7 (i) 对任意 $\sigma_1 + \sigma_2 \in (0, \gamma_1)$ 有 $\alpha_{\sigma_1, \sigma_2} \leq \alpha_{\sigma_1, \sigma_2}^+ < 0$; (ii) 存在依赖于 $\sigma_1, \sigma_2, p, q, N, \eta, S(\mu, t), A_1, |\Omega|$ 的正常数 d_0 , 使得对所有的 $\sigma_1 + \sigma_2 \in (0, \frac{q}{p} \gamma_1)$ 都有 $\alpha_{\sigma_1, \sigma_2}^- > d_0$ 成立。

证明 (i) 假设 $z = (u, v) \in M_{\sigma_1, \sigma_2}^+$, 则 $\frac{p - q}{p^*(t) - q} \|z\|^p > \int_{\Omega} \frac{|u|^{p^*(t)} + |v|^{p^*(t)} + \eta |u|^\alpha |v|^\beta}{|x|^t} dx$,

于是

$$\begin{aligned} I(u, v) &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \|z\|^p - \left(\frac{1}{p^*(t)} - \frac{1}{q} \right) \int_{\Omega} \frac{|u|^{p^*(t)} + |v|^{p^*(t)} + \eta |u|^\alpha |v|^\beta}{|x|^t} dx < \\ &\left[\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*(t)} \right) \frac{p - q}{p^*(t) - q} \right] \|z\|^p = \frac{(p - q)(p - p^*(t))}{pqp^*(t)} \|z\|^p < 0, \end{aligned}$$

从而 $\alpha_{\sigma_1, \sigma_2} \leq \alpha_{\sigma_1, \sigma_2}^+ < 0$ 。

(ii) 假设 $\sigma_1 + \sigma_2 \in (0, \frac{q}{p} \gamma_1)$ 且 $z = (u, v) \in M_{\sigma_1, \sigma_2}^-$, 则(6)有

$$\frac{p - q}{p^*(t) - q} \|z\|^p < \int_{\Omega} \frac{|u|^{p^*(t)} + |v|^{p^*(t)} + \eta |u|^\alpha |v|^\beta}{|x|^t} dx \leq (S(\eta, \alpha, \beta, \mu, t))^{-\frac{p^*(t)}{p}} \|z\|^{p^*(t)}。$$

于是

$$\|z\| > \left(\frac{p - q}{p^*(t) - q} \right)^{\frac{1}{p^*(t) - p}} (S(\eta, \alpha, \beta, \mu, t))^{\frac{p^*(t)}{p(p^*(t) - p)}} \quad (11)$$

从而结合(11)和引理4, 很容易得到

$$I(u, v) \geq \|z\|^q \left(\frac{p^*(t)-p}{pp^*(t)} \|z\|^{p-q} - \frac{p^*(t)-q}{p^*(t)q} A_1(\mu)^{-\frac{q}{p}} |\Omega|^{1-\frac{q}{p}} (\sigma_1 + \sigma_2) \right) \geq$$

$$\|z\|^q \left\{ \frac{p^*(t)-p}{pp^*(t)} A_1(\mu)^{-\frac{q}{p}} |\Omega|^{1-\frac{q}{p}} \left[\frac{q}{p} \gamma_1 - (\sigma_1 + \sigma_2) \right] \right\} \geq d_0,$$

其中: $d_0 = d_0(\sigma_1, \sigma_2, p^*(t), q, A_1(\mu), S(\eta, \alpha, \beta, \mu, t), |\Omega|)$ 是正常数。

对每一个 $z = (u, v) \in E$, 令

$$s_{\max} = \left(\frac{(p-q)\|z\|^p}{(p^*(t)-q) \int_{\Omega} \frac{|u|^{p^*(t)} + |v|^{p^*(t)} + \eta |u|^{\alpha} |v|^{\beta}}{|x|^t} dx} \right)^{\frac{1}{p^*(t)-p}} > 0,$$

则有下列的引理成立:

引理 8 假设 $\sigma_1 + \sigma_2 \in (0, \gamma_1)$ 且有 $z \in E \setminus \{(0, 0)\}$, 则存在唯一的 s^-, s^+ 使得 $0 < s^+ < s_{\max} < s^-$, $s^+ z \in M_{\sigma_1, \sigma_2}^+$, $s^- z \in M_{\sigma_1, \sigma_2}^-$ 。进一步有 $I(s^+ z) = \inf_{0 \leq s \leq s_{\max}} I(sz)$, $I(s^- z) = \sup_{s \geq s_{\max}} I(sz)$ 。证明过程可参见文献[6], 故在此处略去过程。

3 定理 1 和定理 2 的证明

首先, 由 Tarantello (文献[8]) 的思想得到下面结论。

引理 9 (i) 假设 $\sigma_1 + \sigma_2 \in (0, \gamma_1)$, 则在 W 中存在 I 的一个 $(PS)_{\alpha_{\sigma_1, \sigma_2}}$ 序列 $\{z_n\} \subset M_{\sigma_1, \sigma_2}$; (ii) 假设 $\sigma_1 + \sigma_2 \in (0, \frac{q}{p}\gamma_1)$, 则在 W 中存在 I 的一个 $(PS)_{\alpha_{\sigma_1, \sigma_2}^-}$ 序列 $\{z_n\} \subset M_{\sigma_1, \sigma_2}^-$ 。

证明 过程见参考文献[10]。

下面证明在 M_{σ_1, σ_2}^+ 上 I 局部极小值的存在性。

引理 10 假设 $\sigma_1 + \sigma_2 \in (0, \gamma_1)$, 则 I 有一个极小值 $z^{(1)} \in M_{\sigma_1, \sigma_2}^+$, 使得 $z^{(1)}$ 是 (1) 的一个正解, 并且 $I(z^{(1)}) = \alpha_{\sigma_1, \sigma_2} = \alpha_{\sigma_1, \sigma_2}^+ < 0$ 。

证明 由引理 9(i) 知, 存在 I 的极小化序列 $\{z_n\} \subset M_{\sigma_1, \sigma_2}$ 使得

$$I(z_n) = \alpha_{\sigma_1, \sigma_2} + o_n(1), \text{ 在 } E^{-1} \text{ 中有 } I'(z_n) = o_n(1) \quad (12)$$

由于 I 在 M_{σ_1, σ_2} 上是强化的 (见引理 4), 从而有 $\{z_n\}$ 在 E 上有界, 继而存在 $\{z_n\}$ 的一个子列仍记作 $\{u_n, v_n\}$ 和 $z^{(1)} = (u^{(1)}, v^{(1)}) \in E$ 使得

$$u_n \rightarrow u^{(1)}, v_n \rightarrow v^{(1)} \text{ 在 } W \text{ 中弱收敛, } u_n \rightarrow u^{(1)}, v_n \rightarrow v^{(1)} \text{ 在 } \Omega \text{ 中几乎处处收敛} \quad (13)$$

对任意的 $1 \leq m < p^*(t)$, $u_n \rightarrow u^{(1)}, v_n \rightarrow v^{(1)}$ 在 $L^m(\Omega, |x|^{-t})$ 中强收敛, 于是得到

$$\int_{\Omega} (\sigma_1 |u_n|^q + \sigma_2 |v_n|^q) dx = \int_{\Omega} (\sigma_1 |u^{(1)}|^q + \sigma_2 |v^{(1)}|^q) dx + o_n(1) \quad (14)$$

首先证明 $z^{(1)}$ 是 (1) 的非平凡解。由 (13), (14) 易证 $z^{(1)}$ 是 (1) 的弱解, 由 $\{z_n\} \subset M_{\sigma_1, \sigma_2}$ 有

$$\int_{\Omega} (\sigma_1 |u_n|^q + \sigma_2 |v_n|^q) dx = \left[\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*(t)} \right) \|z_n\|^p - I(z_n) \right] \frac{p^*(t)q}{p^*(t)-q} = \frac{q(p^*(t)-p)}{p(p^*(t)-q)} \|z_n\|^p - \frac{p^*(t)q}{p^*(t)-q} I(z_n) \quad (15)$$

在 (11) 中令 $n \rightarrow \infty$, 由 (9), (10) 和 $\alpha_{\sigma_1, \sigma_2} < 0$ 得

$$\int_{\Omega} (\sigma_1 |u^{(1)}|^q + \sigma_2 |v^{(1)}|^q) dx \geq - \frac{p^*(t)q}{p^*(t)-q} \alpha_{\sigma_1, \sigma_2} > 0。$$

因此, $z^{(1)} \in M_{\sigma_1, \sigma_2}$ 是 (1) 的非平凡解。

下证 $z_n \rightarrow z^{(1)}$ 在 E 中强收敛并且有 $I(z^{(1)}) = \alpha_{\sigma_1, \sigma_2}$ 。利用 Fatou's 引理, 可以得到

$$\alpha_{\sigma_1, \sigma_2} \leq I(z^{(1)}) = \frac{p-t}{p(N-t)} \|z^{(1)}\|^p - \frac{p^*(t)-q}{p^*(t)q} \int_{\Omega} (\sigma_1 |u^{(1)}|^q + \sigma_2 |v^{(1)}|^q) dx \leq$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{p-t}{p(N-t)} \|z_n\|^p - \frac{p^*(t)-q}{p^*(t)q} \int_{\Omega} (\sigma_1 |u_n|^q + \sigma_2 |v_n|^q) dx \right] = \liminf_{n \rightarrow \infty} I(z_n) = \alpha_{\sigma_1, \sigma_2},$$

于是 $I(z^{(1)}) = \alpha_{\sigma_1, \sigma_2}$ 且有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n\|^p = \|z^{(1)}\|^p$, 令 $\bar{z}_n = z_n - z^{(1)}$, 由 Brezis-Lieb 引理 [12] 有 $\|\bar{z}_n\|^p = \|z_n\|^p - \|z^{(1)}\|^p + o_n(1)$ 。

由标准的论证过程可以得到 $z_n \rightarrow z^{(1)}$ 在 E 中强收敛。进一步可得 $z^{(1)} \in M_{\sigma_1, \sigma_2}^+$ 。否则, 如果 $z^{(1)} \in M_{\sigma_1, \sigma_2}^-$, 则由引理 8, 存在唯一的 $s_0^{\pm}$ 使得 $s_0^{\pm} z^{(1)} \in M_{\sigma_1, \sigma_2}^{\pm}$, $s_0^+ < s_0^- = 1$, 因为 $\frac{d}{ds} I(s_0^+ z^{(1)}) = 0$, $\frac{d^2}{ds^2} I(s_0^+ z^{(1)}) > 0$, 所以存在 $\bar{s} \in (s_0^+, s_0^-)$, 使得 $I(s_0^+ z^{(1)}) < I(\bar{s} z^{(1)})$, 由引理 8 得, $I(s_0^+ z^{(1)}) < I(s z^{(1)}) \leq I(s_0^- z^{(1)}) = I(z^{(1)})$, 产生矛盾。因为 $I(z^{(1)}) = I(|z^{(1)}|)$ 且 $|z^{(1)}| \in M_{\sigma_1, \sigma_2}^+$, 由引理 5, 可以假设 $z^{(1)}$ 是 (1) 的一个非负非平凡解, 由强极大值原理可知在 Ω 中 $z^{(1)} = (u^{(1)}, v^{(1)}) > 0$ 是 (1) 的一个正解。证毕。

假设 $0 < \mu < \bar{\mu}$ 且 $\varepsilon > 0$ 。令 $V_{p, \mu, t}^{\varepsilon}(x)$ 为 $A_1(\mu)$ 的达到函数, 设 $u_{\mu, t}^{\varepsilon}(x) = \psi(x) V_{p, \mu, t}^{\varepsilon}(x)$, 其中 $\psi(x)$ 为一个截段函数, 定义如下: $\psi(x) \in D^*(\Omega) = \{\psi \in C_0^{\infty}(\Omega) \text{ 在 } x=0 \text{ 的邻域内有 } \psi(x) \equiv 1\}$ 。

引理 11 在定理 2 的假设条件下存在函数 $\bar{z} \in E \setminus \{(0, 0)\}$ 和 $A^* > 0$ 使得对任意的 $0 < \sigma_1 + \sigma_2 < A^*$, 都有下式成立:

$$\sup_{s \geq 0} I(s\bar{z}) < c := \frac{p-t}{p(N-t)} (S(\eta, \alpha, \beta, \mu, t))^{\frac{N-t}{p-t}} + F(\tau_{\min}^{(1)}, \tau_{\min}^{(2)}) \quad (16)$$

特别的, 对任意的 $0 < \sigma_1 + \sigma_2 < A^*$, 有 $\alpha_{\sigma_1, \sigma_2}^- < c^*$ 。

证明 由于 $0 \in \Omega$, 所以存在 $\rho_0 > 0$, 使得 $B_{2\rho_0}(0) \subset \Omega$, 对所有的 $s \geq 0$, 考虑泛函 $g_1(s) = I(su_{\mu, t}^{\varepsilon})$, $s(\tau_{\min} u_{\mu, t}^{\varepsilon})$ 和 $g_2(s) = \frac{s^p}{p} (1 + (\tau_{\min})^p) \int_{\Omega} (|\nabla u_{\mu, t}^{\varepsilon}|^p - \mu \frac{|u_{\mu, t}^{\varepsilon}|^p}{|x|^t}) dx - \frac{s^{p^*(t)}}{p^*(t)} (1 + \eta(\tau_{\min})^{\beta} + (\tau_{\min})^{\alpha+\beta}) \int_{\Omega} \frac{|u_{\mu, t}^{\varepsilon}|^{p^*(t)}}{|x|^t} dx$, 注意到 $\lim_{s \rightarrow +\infty} g_2(s) = -\infty$ 且当 s 很靠近 0 时有 $g_2(s) > 0$, 于是 $\sup_{s \geq 0} g_2(s)$ 可由有限的 $s_{\varepsilon} > 0$ 达到且使得 $g_2'(s_{\varepsilon}) = 0$ 。进一步, $C' < s_{\varepsilon} < C''$, 其中 C', C'' 是不依赖于 ε 的正常数。

选取 $\delta_1 > 0$ 足够小使得对所有的 $0 < \sigma_1 + \sigma_2 < \delta_1$ 有 $c^* > 0$, 令 $z_{\varepsilon} = (u_{\mu, t}^{\varepsilon}, \tau_{\min} u_{\mu, t}^{\varepsilon})$, 则对任意的 $s \geq 0$ 和 $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ 有 $I(s z_{\varepsilon}) \leq \frac{s^p}{p} \|z_{\varepsilon}\|^p$, 继而得到存在 $s_0 \in (0, 1)$, 对任意的 $0 < \sigma_1 + \sigma_2 < \delta_1$ 有 $\sup_{0 \leq s \leq s_0} I(s z_{\varepsilon}) < c^*$ 。因为

$$\max_{s \geq 0} \left(\frac{s^p}{p} B_1 - \frac{s^{p^*(t)}}{p^*(t)} B_2 \right) = \frac{p-t}{p(N-t)} (B_1 B_2^{-\frac{p}{p^*(t)}})^{\frac{N-t}{p-t}}, B_1, B_2 > 0 \quad (17)$$

则由文献 [12], [13] 得到

$$g_2(s_{\varepsilon}) \leq \frac{p-t}{p(N-t)} \left(\frac{(1 + (\tau_{\min})^p) \int_{\Omega} (|\nabla u_{\mu, t}^{\varepsilon}|^p - \mu \frac{|u_{\mu, t}^{\varepsilon}|^p}{|x|^t}) dx}{\left[(1 + \eta(\tau_{\min})^{\beta} + (\tau_{\min})^{\alpha+\beta}) \int_{\Omega} \frac{|u_{\mu, t}^{\varepsilon}|^{p^*(t)}}{|x|^t} dx \right]^{\frac{p}{p^*(t)}}} \right)^{\frac{N-t}{p-t}} \leq \frac{p-t}{p(N-t)} \left(\frac{f(\tau_{\min}) S(\mu, t)^{\frac{N-t}{p-t}} + O(\varepsilon^{p\gamma})}{[S(\mu, t)^{\frac{N-t}{p-t}} + O(\varepsilon^{p^*(t)\gamma})]^{\frac{p}{p^*(t)}}} \right)^{\frac{N-t}{p-t}} \leq$$

$$\frac{p-t}{p(N-t)} (f(\tau_{\min}) S(\mu, t)^{\frac{N-t}{p-t}} + O(\varepsilon^{p\gamma})) = \frac{p-t}{p(N-t)} (S(\eta, \alpha, \beta, \mu, t))^{\frac{N-t}{p-t}} + O(\varepsilon^{p\gamma}),$$

于是有

$$\begin{aligned} \sup_{s \geq s_0} g_1(s) &= \sup_{s \geq s_0} \left(g_2(s) - \frac{s^q}{q} \int_{\Omega} (\sigma_1 |u_{\mu, t}^\varepsilon|^q + \sigma_2 |\tau_{\min} u_{\mu, t}^\varepsilon|^q) dx \right) \leq \\ &\frac{p-t}{p(N-t)} (S(\eta, \alpha, \beta, \mu, t))^{\frac{N-t}{p-t}} + O(\varepsilon^{p\gamma}) - \frac{s_\varepsilon^q}{q} \int_{\Omega} (\sigma_1 + \tau_{\min}^q \sigma_2) |u_{\mu, t}^\varepsilon|^q dx \leq \\ &\frac{p-t}{p(N-t)} (S(\eta, \alpha, \beta, \mu, t))^{\frac{N-t}{p-t}} + O(\varepsilon^{p\gamma}) - C(\sigma_1 + \sigma_2) \int_{\Omega} |u_{\mu, t}^\varepsilon|^q dx \leq \\ &\frac{p-t}{p(N-t)} (S(\eta, \alpha, \beta, \mu, t))^{\frac{N-t}{p-t}} + O(\varepsilon^{p\gamma}) - (\sigma_1 + \sigma_2) O_1(\varepsilon^\theta). \end{aligned}$$

在上面的过程中用到了 $b(\mu) > \frac{N}{q}$, 因 $N > p^2$, $\theta = N - \frac{N-p}{p}q$ 且 $\gamma = b(\mu) - \delta$, $\delta = \frac{N-p}{p}$, 于是有 $\theta \frac{p-q}{p} < p\gamma - \theta$. 可以选择 $\sigma_1 = O_1(\varepsilon^{r_1})$, $\sigma_2 = O_1(\varepsilon^{r_2})$ 使 $\theta \frac{p-q}{p} < r_1, r_2 < p\gamma - \theta$, $(\sigma_1 + \sigma_2) O_1(\varepsilon^\theta) = O_1(\varepsilon^{\min(r_1, r_2) + \theta})$. 由引理 1 中 $F(\tau_{\min}^{(1)}, \tau_{\min}^{(2)})$ 的定义可得: $F(\tau_{\min}^{(1)}, \tau_{\min}^{(2)}) = -O_1(\varepsilon^{\frac{p}{p-q} \min(r_1, r_2)})$. 由于 $\min(r_1, r_2) + \theta < \frac{p}{p-q} \min(r_1, r_2)$, $\min(r_1, r_2) + \theta < p\gamma$, 让 ε 足够小, 则存在 $\delta_2 > 0$ 使得对任意的 $0 < \sigma_1 + \sigma_2 < \delta_2$, 有

$$O(\varepsilon^{p\gamma}) - (\sigma_1 + \sigma_2) O_1(\varepsilon^\theta) < F(\tau_{\min}^{(1)}, \tau_{\min}^{(2)}) \quad (18)$$

选取 $A^* = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, 则对所有的 $\sigma_1 + \sigma_2 \in (0, A^*)$ 有

$$\sup_{s \geq 0} I(su_{\mu, t}^\varepsilon, s(\tau_{\min} u_{\mu, t}^\varepsilon)) < c^* \quad (19)$$

最后证明对所有的 $\sigma_1 + \sigma_2 < A^*$ 有 $\alpha_{\sigma_1, \sigma_2}^- < c^*$. 因为 $z_\varepsilon = (u_{\mu, t}^\varepsilon, (\tau_{\min} u_{\mu, t}^\varepsilon))$, 则由引理 8, $\alpha_{\sigma_1, \sigma_2}^-$ 的定义和 (19), 得到存在 $\bar{s}_0 > 0$ 使得 $\bar{s}_0 z_\varepsilon \in \alpha_{\sigma_1, \sigma_2}^-$ 且有 $\alpha_{\sigma_1, \sigma_2}^- \leq I(\bar{s}_0 z_\varepsilon) \leq \sup_{s \geq 0} I(s z_\varepsilon) < c^*$, 令 $\bar{z} = z_\varepsilon$ 就完成了本引理的证明。

引理 12 令 $\gamma_2 := \min\{A^*, \frac{q}{p}\gamma_1\}$, 则对任意的 $\sigma_1 + \sigma_2 \in (0, \gamma_2)$, 方程 (1) 有一个正解 $z^{(2)}$ 使得 $z^{(2)} \in M_{\sigma_1, \sigma_2}^-$ 和 $I_\lambda(z^{(2)}) = \alpha_{\sigma_1, \sigma_2}^-$ 成立。

证明 由引理 9 知, 对所有的 $\sigma_1 + \sigma_2 < \frac{q}{p}\gamma_1$, 在 E 上存在 I 的一个 $(PS)_{\alpha_{\sigma_1, \sigma_2}^-}$ 序列 $\{z_n\}$, 由引理 3, 7 和 11 得 $\alpha_{\sigma_1, \sigma_2}^- > 0$ 且对任意的 $\sigma_1 + \sigma_2 < \gamma_2$, I 满足 $(PS)_{\alpha_{\sigma_1, \sigma_2}^-}$ 条件, 由于 I 在 M_{σ_1, σ_2} 上是强制的, 故 $\{z_n\}$ 在 E 上有界, 所以存在子列 $\{z_n\}$ 和 $z^{(2)} \in M_{\sigma_1, \sigma_2}^-$, 使得所有的 $\sigma_1 + \sigma_2 < \gamma_2$ 有 $z_n \rightarrow z^{(2)}$ 和 $I(z^{(2)}) = \alpha_{\sigma_1, \sigma_2}^- > 0$ 成立。因为 $I(z^{(2)}) = I(|z^{(2)}|)$ 和 $|z^{(2)}| \in M_{\sigma_1, \sigma_2}^-$, 则由引理 5, 可以假设 $z^{(2)}$ 是 (1) 的非平凡非负解, 由强极值原理可知 $z^{(2)}$ 是 (1) 的正解。

定理 1 和定理 2 的证明 有引理 10 知, 对所有的 $\sigma_1 + \sigma_2 < \gamma_1$, (1) 有一个正解 $z^{(1)} \in M_{\sigma_1, \sigma_2}^+$. 另一方面, 由引理 12, 对所有 $\sigma_1 + \sigma_2 < \gamma_2 < \gamma_1$, (1) 有第二个正解 $z^{(2)} \in M_{\sigma_1, \sigma_2}^-$, 由于 $M_{\sigma_1, \sigma_2}^+ \cap M_{\sigma_1, \sigma_2}^- = \emptyset$, 因此 $z^{(1)} \neq z^{(2)}$, 定理 1 和定理 2 得证。

参考文献:

- [1] CATRINA F, WANG ZHIQIANG. On the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities: sharp constants, existence (and nonexistence), and symmetry of extremal functions[J]. Comm Pure Appl Math, 2001, 54(2): 229-258.
- [2] BARTSCH T, PENG SHUANGJIE, ZHANG ZHITAO. Existence and non-existence of solutions to elliptic equations related to the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities[J]. Calc Var Partial Differential Equations, 2007, 30(1): 113-136.
- [3] VERONICA FELLI, MATTHIAS SCHNEIDER. Perturbation results of critical elliptic equations of Caffarelli-Kohn-Nirenberg type [J]. Journal of Differential Equations, 2003, 191(1): 121-142.

- [4] DAUTRAY R, LIONS J. Mathematical analysis and numerical methods for science and technology [M]. Springer-Verlag, Berlin: Physical Origins and Classical Methods, 1990: 6-18.
- [5] TSINGSAN HSU, HUEILI LIN. Multiple positive solutions for a critical elliptic system with concave-convex nonlinearities [J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section: A, 2009, 139(6): 1163-1177.
- [6] WANG LI, WEI QIAOLING, KANG DONGSHENG. Existence and multiplicity of positive solutions to elliptic systems involving critical exponents [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2011, 383(2): 541-552.
- [7] TSINGSAN HSU. Multiple positive solutions for a critical quasilinear elliptic system with concave-convex non-linearities [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2009, 71(7/8): 2688-2698.
- [8] TARANTELLO G. On nonhomogeneous elliptic involving critical Sobolev exponent [J]. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 1999, 29(3): 281-304.
- [9] BROWN K, ZHANG YANPING. The Nehari manifold for a semilinear elliptic equation with a sign-changing weight function [J]. Journal of Differential Equations, 2003, 193(2): 481-499.
- [10] TSUNGFANG WU. On semilinear elliptic equations involving concave-convex nonlinearities and sign-changing weight function [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 318(1): 253-270.
- [11] BREZIS H, LIEB E. A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals [J]. Proc Amer Math Soc, 1983, 88: 486-490.
- [12] ALVES C O, MORAIS FILHO D C DE, SOUTO M A S. On systems of elliptic equations involving subcritical or critical Sobolev exponents [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2000, 42(5): 771-787.
- [13] HUANG YAN, KANG DONGSHENG. On the singular elliptic systems involving multiple critical Sobolev exponents [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2011, 74(2): 400-412.

Quasilinear Systems Involving Critical Hardy-Sobolev Exponents and Potentials

Wang Li

(School of Basic Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: This paper explored a class of quasilinear elliptic systems involving critical Hardy – Sobolev exponents and potentials. By using the extremals of the best Sobolev constants and extracting the Palais – Smale sequence in Nehari manifold, the existence and multiplicity of positive solutions to the systems were established.

Key words: quasilinear elliptic system; critical exponent; multiple solutions