

文章编号:1005-0523(2013)03-0001-04

# 图的符号边控制与减边控制

徐保根,操叶龙,康洪波,赵利芬

(华东交通大学基础科学学院,江西 南昌 330013)

**摘要:**设  $G$  是一个图,  $\gamma'_s(G)$  和  $\gamma'_m(G)$  分别表示图  $G$  的符号边控制数和减边控制数,利用图的边度序列给出了  $\gamma'_s(G)$  和  $\gamma'_m(G)$  的下限,并通过图  $G$  的子图明确了两者的关系,为找出  $\gamma'_m(G)$  更多的下界提供了新的方法。

**关键词:**图;符号边控制函数;符号边控制数;减边控制函数;减边控制数

**中图分类号:**O157.5

**文献标志码:**A

## 1 引言及定义

本文中所述的图均为无向简单图,文中未说明的符号和术语同于文献[1]。

设  $G=(V, E)$  为一个图,  $e \in E$ , 则  $N_G(e)$  表示  $G$  中与  $e$  相邻的边集,称为  $e$  的边邻域,  $N_G[e]=N_G(e) \cup \{e\}$  为  $e$  的闭边邻域。 $d'(e)=|N_G(e)|$  表示  $e$  在  $G$  中的边度。 $N_G(e)$  和  $N_G[e]$  可分别简记为  $N(e)$  和  $N[e]$ 。若  $e=uv \in E(G)$ , 则有  $d(e)=d(u)+d(v)-2$ 。

近几年来,图的控制理论研究的内容越来越广泛,各类控制概念相继产生且研究成果不断丰富,T.W. Haynes 等人的专著<sup>[2]</sup>综述了近几年来图的控制理论研究方面的主要研究成果。然而,它们绝大多数均属于图的点控制,很少涉及到关于图的边控制问题和结果。2001年徐保根<sup>[3]</sup>首先提出了图的符号边控制概念,获得了符号边控制数的许多界限,并将这一概念推广到边上的多种符号控制,如符号星控制、符号圈控制、符号团控制、符号路控制等等。同样地,这也产生了对应的减边控制概念,从而使得控制理论研究和研究成果越来越丰富,徐保根专著<sup>[4]</sup>综述了这些研究成果。

**定义 1.1**<sup>[3]</sup> 设  $G=(V, E)$  是一个非空图,一个函数  $f:E \rightarrow \{-1, +1\}$ : 如果满足  $\sum_{e' \in N[e]} f(e') \geq 1$  对每一条边  $e \in E(G)$  均成立,则称  $f$  为图  $G$  的一个符号边控制函数。图  $G$  的符号边控制数记为  $\gamma'_s(G)$ , 定义  $\gamma'_s(G) = \min \{ \sum_{e \in E(G)} f(e) | f \text{ 为 } G \text{ 的一个符号边控制函数} \}$ 。并且对于空图  $G=\overline{K_n}$ , 则定义  $\gamma'_s(G)=0$ 。

**定义 1.2**<sup>[5]</sup> 设  $G=(V, E)$  为一个非空图,一个函数  $f:E \rightarrow \{-1, 0, +1\}$  被称为图  $G$  的一个减边控制函数,如果对于  $G$  中每一条边  $e$  均有  $\sum_{e' \in N[e]} f(e') \geq 1$  成立。图  $G$  的减边控制数定义为  $\gamma'_m(G) = \min \{ \sum_{e \in E(G)} f(e) | f \text{ 为图 } G \text{ 的减边控制函数} \}$ , 对于空图  $G=\overline{K_n}$ , 则同样定义  $\gamma'_m(G)=0$ 。

比较上述两个定义不难看出,图  $G$  每一个符号边控制函数均为  $G$  的一个减边控制函数,从而有下面的引理 1.1。

收稿日期:2013-02-28

**基金项目:**国家自然科学基金项目(11061014);江西省高校科技落地计划项目(KJLD12067);江西省自然科学基金项目(20114BAB201010);江西省教育厅科技项目(GJJ12295)。

**作者简介:**徐保根(1963—),男,教授,主要从事图论及应用研究。

**引理 1.1** 对任意图  $G$ , 均有  $\gamma'_m(G) \leq \gamma'_s(G)$  成立。

对于图的符号边控制数, 目前人们已获得了许多界限, 文献[3]中我们确定了一个具有  $m$  条边的简单图的最小符号边控制数, 即下面的引理 1.2。

**引理 1.2**<sup>[3]</sup> 设  $m \geq 1$ ,  $\psi(m)$  表示  $m$  条边图的最小符号边控制数, 则有

$$\psi(m) = 2 \left\lceil \frac{1}{3} \left\lceil \frac{\sqrt{24m+25} + 6m + 5}{6} \right\rceil \right\rceil - m$$

由此引理, 直接可得下面的引理 1.3。

**引理 1.3** 对任意图  $G$ , 若  $|E(G)| = m \geq 1$ , 则有

$$\gamma'_s(G) \geq \phi(m) = \frac{5 + \sqrt{24m+25}}{9} - \frac{m}{3}$$

**引理 1.4**<sup>[5]</sup> 对任意图  $G$ , 若  $\delta(G) \geq 1$ , 则  $\gamma'_s(G) \geq |V(G)| - |E(G)|$ , 且此下界是最好可能的。

虽然人们已获得了符号边控制数的众多下界, 由引理 1.1 知, 这些下界均不能作为减边控制数的下界, 可见本文探讨减边控制数的下界是非常有意义的。此外, 在现有的关于  $\gamma'_s(G)$  的界限中, 几乎都是依赖于图的阶数、边数、最大度和最小度, 本文给出其依赖于边度序列的界限, 并利用导出子图, 通过  $\gamma'_s(G)$  的下界来确定  $\gamma'_m(G)$  的下界。

## 2 主要结果及其证明

前面介绍了图的边度概念, 一条边  $e \in E(G)$  的边度是指在图  $G$  中与  $e$  相邻的边数。对于一个非空图  $G$ , 若  $|E(G)| = m \geq 1$ , 自然有边度序列  $(d'_1, d'_2, \dots, d'_m)$  存在。同图的(点)度序列一样, 图的边度序列常记为  $d'_1 \geq d'_2 \geq \dots \geq d'_m$ , 即按边度的大小进行排列。

设  $G = (V, E)$  为一个非空图,  $S \subseteq E$ ,  $f$  为图  $G$  的一个符号边控制函数或减边控制函数, 为了方便, 在本文中我们记  $f(S) = \sum_{e \in S} f(e)$ 。

**定理 2.1** 对任意图  $G$ , 若  $|E(G)| = m \geq 1$  且  $d'_1 \geq d'_2 \geq \dots \geq d'_m$  为其边度序列。

令  $k_0 = \min \left\{ k \mid d'_1 + d'_2 + \dots + d'_k - d'_{k+1} - d'_{k+2} - \dots - d'_m \geq 2(m-k) \right\}$ , 则有  $\gamma'_s(G) \geq 2k_0 - m$ 。

**证明** 设  $f$  为图  $G$  的一个符号边控制函数, 且使得  $\gamma'_s(G) = f(E)$ 。由定义 1.1 知, 对于每一条边  $e \in E$ , 均有  $f(N[e]) \geq 1$ , 故  $\sum_{e \in E} f(N[e]) \geq m$ , 从而有

$$\sum_{e \in E} (d'(e) + 1) f(e) \geq m \quad (1)$$

令:  $P = \{e \in E \mid f(e) = +1\}$ ,  $M = \{e \in E \mid f(e) = -1\}$ ,  $|P| = t$ , 故有  $|M| = m - t$ 。

可见  $\gamma'_s(G) = f(E) = |P| - |M| = 2t - m$ , 由(1)式得

$$\sum_{e \in E} (d'(e) + 1) f(e) = \sum_{e \in P} (d'(e) + 1) - \sum_{e \in M} (d'(e) + 1) \geq m, \text{ 即有 } \sum_{e \in P} d'(e) - \sum_{e \in M} d'(e) \geq 2(m-t),$$

$$d'_1 + d'_2 + \dots + d'_t - d'_{t+1} - d'_{t+2} - \dots - d'_m \geq 2(m-t) \quad (2)$$

将  $k_0$  的定义与(2)式比较得  $t \geq k_0$ , 因此,  $\gamma'_s(G) = 2t - m \geq 2k_0 - m$ , 定理证毕。

**推论 2.1** 对任意  $n$  阶  $r$ -正则图  $G$ , 均有  $\gamma'_s(G) \geq \frac{nr}{4r-2}$ 。

**证明** 由于  $G$  为一个  $n$  阶  $r$ -正则图, 易见  $d'_i = 2r - 2 (1 \leq i \leq m)$ , 由  $k_0$  的定义中得到  $(2r-2)k - (2r-2)(m-k) \geq 2(m-k)$ , 故  $k \geq \frac{r}{2r-1}m = \frac{r^2n}{4r-2}$ , 因此,  $k_0 \geq \frac{r^2n}{4r-2}$ 。

由定理 2.1 得  $\gamma'_s(G) \geq 2k_0 - m \geq \frac{r^2 n}{2r-1} - \frac{rn}{2} = \frac{nr}{4r-2}$ , 推论 2.1 证毕。

下面考虑图的减边控制数。与定理类似地可得到下面的结论。

**定理 2.2** 对任意图  $G$ , 若  $|E(G)| = m \geq 1$  且  $d'_1 \geq d'_2 \geq \dots \geq d'_m$  为其边度序列。

则  $\gamma'_m(G) \geq \min \left\{ s-t \mid d'_1 + d'_2 + \dots + d'_s - d'_m - d'_{m-1} - \dots - d'_{m-t+1} \geq m - (s-t) \right\}$ 。

**证明** 设  $f$  为图  $G$  的一个减边控制函数, 且使得  $\gamma'_m(G) = f(E)$ 。由定义 1.2 知, 对于每一条边  $e \in E$ , 均有  $f(N[e]) \geq 1$ , 故  $\sum_{e \in E} f(N[e]) \geq m$ , 从而有

$$\sum_{e \in E} (d'(e) + 1)f(e) \geq m \quad (3)$$

令:  $P = \{e \in E \mid f(e) = +1\}$ ,  $M = \{e \in E \mid f(e) = -1\}$ ,  $Q = \{e \in E \mid f(e) = 0\}$ ,  $|P| = s$ ,  $|M| = t$ ,  $|Q| = m - s - t$ 。由 (3) 式得

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E} (d'(e) + 1)f(e) &= \sum_{e \in P} (d'(e) + 1) - \sum_{e \in M} (d'(e) + 1) \geq m, \text{ 即有 } \sum_{e \in P} d'(e) - \sum_{e \in M} d'(e) \geq m - (s-t), \\ d'_1 + d'_2 + \dots + d'_s - d'_m - d'_{m-1} - \dots - d'_{m-t+1} &\geq m - (s-t) \end{aligned} \quad (4)$$

因此,  $\gamma'_m(G) = f(E) = s - t$ , 其中  $s$  和  $t$  满足 (4) 式, 故结论成立。定理证毕。

**推论 2.2** 对任意  $n$  阶  $r$ -正则图  $G$ , 均有  $\gamma'_m(G) \geq \frac{nr}{4r-2}$ 。

**证明** 由于  $G$  为  $n$  阶  $r$ -正则图, 故  $d'_i = 2r - 2 (1 \leq i \leq m)$ , 代入定理 2.2 中得出  $(2r-2)(s-t) \geq m - (s-t)$ , 故  $s-t \geq \frac{m}{2r-1} = \frac{nr}{4r-2}$ , 由定理 2.2, 推论 2.2 成立。

下面用一个图  $G$  的所有子图的最小符号边控制数来表达  $G$  的减边控制数的下界。若  $H$  为图  $G$  的一个子图, 则用  $H \subseteq G$  来表示。

**定理 2.3** 对任意图  $G$ , 令  $\pi(G) = \min \{\gamma'_s(H) \mid H \subseteq G\}$ , 则  $\gamma'_m(G) \geq \pi(G)$ 。

**证明** 设  $f$  为图  $G = (V, E)$  的减边控制函数且使得  $\gamma'_m(G) = f(E)$ , 令  $X_0 = \{e \in E \mid f(e) = 0\}$ ,  $G_0 = G - X_0$

可见  $f_0 = f|_{G_0}$  为图  $G_0$  的一个符号控制函数, 由于  $G_0$  为  $G$  的子图, 从而有  $\gamma'_m(G) = f(E) = f_0(E(G_0)) \geq \gamma'_s(G_0) \geq \pi(G)$ , 定理证毕。

由上述定理 2.3 可见, 一个图  $G$  的减控制数不小于其所有子图的最小符号控制数, 因此有下面的结论。

**定理 2.4** 如果存在一个递减函数  $\phi(t)$ , 使得对任意正整数  $t$  和任意具有  $t$  条边的图  $H$ , 均有  $\gamma'_s(H) \geq \phi(t)$  成立, 则对任意具有  $m$  条边的图  $G$ , 均有  $\gamma'_m(G) \geq \phi(m)$ 。

**证明** 根据定理 2.3, 存在  $H \subseteq G$ , 使得  $\gamma'_s(H) = \pi(G)$ 。令  $|E(H)| = r$ , 故  $r \leq m$ 。

由定理条件知  $\gamma'_s(H) \geq \phi(r)$ , 由于  $\phi$  为递减函数, 故  $\gamma'_s(H) \geq \phi(m)$ , 由定理 2.3 得到  $\gamma'_m(G) \geq \pi(G) = \gamma'_s(H) \geq \phi(m)$ 。定理证毕。

上述定理 2.4 告诉我们, 如果找到了一个对任意  $m$  条边的图  $G$  都成立的  $\gamma'_s(G)$  的下界  $\phi(m)$ , 且  $\phi(m)$  为  $m$  的递减函数, 则  $\phi(m)$  也可作为  $\gamma'_m(G)$  的下界。

根据引理 1.3, 且注意到  $\phi(m) = \frac{5 + \sqrt{24m+25}}{9} - \frac{m}{3}$  为一个关于  $m$  的递减函数 ( $m$  为非负整数), 故由定理 2.4 可直接得到下面的定理。

**定理 2.5** 对任意一个具有  $m (m \geq 1)$  条边的图  $G$ , 均有  $\gamma'_m(G) \geq \phi(m) = \frac{5 + \sqrt{24m+25}}{9} - \frac{m}{3}$ 。

### 3 若干注记

一般来说,图的符号边控制数  $\gamma'_s(G)$  的一个下界  $\phi$  可能包含了图的多个参数,如点数  $n$ 、边数  $m$ 、最大度  $\Delta$ 、最小度  $\delta$  等等,这个下界  $\phi$  是否为减边控制数  $\gamma'_m(G)$  的一个下界呢? 这是一个很有意义且非常值得关注的问题,引理 1.1 不能回答这个问题。下面我们引入图的增性表达式和减性表达式的概念。

**定义 3.1** 设  $\phi = \phi(G)$  是一个包含图  $G$  的若干参数的解析式,如果对任意图  $G$  的任意子图  $H \subseteq G$ , 均有  $\phi(H) \geq \phi(G)$  成立,则称  $\phi$  为图的减性表达式,反之为增性表达式。

根据定理 2.3,可将定理 2.4 推广为如下的结论。

**定理 3.1** 如果存在一个关于图的减性表达式  $\phi$ ,使得对任意图  $H$ , 均有  $\gamma'_s(H) \geq \phi(H)$  成立,则对任意图  $G$ , 均有  $\gamma'_m(G) \geq \phi(G)$ 。

当然,如果  $\gamma'_s(G)$  的下界  $\phi$  是一个非增非减性的表达式,则不能确定  $\phi$  是否为  $\gamma'_m(G)$  的下界。例如,在引理 1.4 中  $\phi(G) = |V(G)| - |E(G)|$  是一个非增非减性的表达式,虽然我们在文献[6]中证明了这是  $\gamma'_s(G)$  的一个下界,但至今不知道这是否也是  $\gamma'_m(G)$  的下界。

**猜想** 对任意图  $G$ , 若  $\delta(G) \geq 1$ , 则有  $\gamma'_m(G) \geq |V(G)| - |E(G)|$ 。

值得注意的是,类似的方法也可用在点控制中,参见文献[7],或许还可用在符号全控制中<sup>[8]</sup>及反符号边控制<sup>[9]</sup>,这有待于进一步的研究。

#### 参考文献:

- [1] 帮迪 J A, 默迪 V S R. 图论及其应用[M]. 上海:科学技术出版社,1984:5-35.
- [2] HAYNES T W, HEDETNIEMI S T, SLATER P J. Domination in Graphs [M]. New York: Marcel Dekker, Inc., 1998:32-41.
- [3] BAOGEN XU. On signed edge domination numbers of graphs[J]. Discrete Math, 2001, 239: 179-189.
- [4] 徐保根. 图的控制理论[M]. 北京:科学出版社,2008:130-153.
- [5] BAOGEN XU. Two classes of edge domination in graphs[J]. Discrete Appl Math, 2006, 154: 1541-1546.
- [6] BAOGEN XU. On edge domination numbers of graphs[J]. Discrete Math, 2005, 294: 311-316.
- [7] BAOGEN XU. On minus domination and signed domination number in graphs[J]. J of Math Res and Exposition, 2003(4): 586-590.
- [8] 赵金凤, 徐保根. On signed edge total domination numbers of graphs[J]. J of Math Res and Exposition, 2011, 32(2): 209-214.
- [9] 徐保根. 关于图的反符号边控制[J]. 华东交通大学学报, 2007, 24(5): 144-147.

## On the Signed Edge and Minus Edge Domination in Graphs

Xu Baogen, Cao Yelong, Kang Hongbo, Zhao Lifen

(School of Basic Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

**Abstract:** Let  $G=(V, E)$  be a graph,  $\gamma'_s(G)$  and  $\gamma'_m(G)$  denote the signed edge domination and the minus edge domination number of  $G$  respectively. In this paper, using the edge degree sequence, we give some lower bounds of  $\gamma'_s(G)$  and  $\gamma'_m(G)$ , and expound the relation between  $\gamma'_s(G)$  and  $\gamma'_m(G)$  by using the subgraph of  $G$ , which provides a method for finding more lower bounds of  $\gamma'_m(G)$ .

**Key words:** graph; signed edge domination function; signed edge domination number; minus edge domination function; minus edge domination number