

文章编号:1005-0523(2013)04-0046-08

基于改进的阻抗函数下的混合交通均衡模型

骆伟,吴克晴

(江西理工大学理学院,江西赣州 341000)

摘要:机动车与非机混合行驶是中国城市交通的特点,在此基础上,又考虑了对向机动车和对向非机动车对此道路路段的阻抗函数的影响,提出了本向机动车、本向非机动车、对向机动车、对向非机动车四者共同影响下的阻抗函数的模型,从而建立了改进的阻抗函数下的混合交通均衡模型。最后,根据最优化理论和方法,证明了所提出的均衡模型的最优解等价于Wardrop的用户平衡原则,并且模型最优解是唯一的,并给出了实例分析。

关键词:混合交通;阻抗函数;均衡模型;变分不等式

中图分类号:00178

文献标志码:A

机动车与非机动车混合行驶是我国城市交通的主要特征,而且不同的交通方式之间也存在着相互影响,由此构成了我国城市混合交通网络^[1]。

至今,混合交通模型的研究仍然是交通网络中的热点研究问题^[2-4]。从已有的研究成果可以看出,只考虑机动车阻抗函数,或只是考虑机动车与非机动车影响下的路段阻抗函数^[5],即所提出的阻抗函数的模型为 $t_a = t_a^0(x_a^1)$ 或 $t_a = t_a^0(x_a^1, x_a^2)$, (其中: t_a 表示当交通量为 x_a 时在路段 a 上的行程时间; t_a^0 表示自由行程时间, x_a^1 , x_a^2 分别表示机动车、非机动车在路段 a 上的流量)。由此可见,这些阻抗函数都没有考虑所研究车流的对向车流对其路段阻抗函数的影响,这与我国城市交通的实际情况不合^[6]。由实际情况可以得知,在未设置中央隔离设施的道路上,路段的路阻函数不仅与本向机动车、本向非机动车的车流干扰有关,而且也与所研究车流的对向机动车、对向非机动车的车流干扰有关,即 $t_a = t_a^0(x_a^1, x_a^2, x_a^3, x_a^4)$, (其中: x_a^3 , x_a^4 分别表示对向机动车、对向非机动车的流量。)

因此,在同时考虑对向机动车、对向非机动车对阻抗函数的影响下,建立混合交通均衡模型,可以为我国城市的交通规划提供强有力的理论指导。

1 均衡的概念

定义1 假设:

- 1) 使用者都希望为以最短时间或最小费用到达目的地;
- 2) 使用者能得到可利用路线的当前交通状态的全部信息;
- 3) 使用者都根据相同的标准选择出行路线。

满足下列原则的交通状态被定义为Wardrop均衡状态:在起始点之间所有可供选择的路线中,使用者所利用的各条路线的运行时间(或运行费用)全都相等,而且小于未被利用路线的运行时间(或运行费用)^[7]。

Beckmann利用以下数学方式对Wardrop均衡状态加以描述^[8]:

收稿日期:2013-03-12

基金项目:国家自然科学基金项目(6106400);江西省自然科学基金项目(2009GZS0009);江西省教育厅基金项目(GJJ09249)

作者简介:骆伟(1989—),女,硕士研究生,研究方向为交通网络均衡问题的不等式方法。

$$\lambda_k - \sum_{a \in A_{kr}} C_a(\vec{f}) = \begin{cases} 0 & X_{kr} > 0 \\ < 0 & X_{kr} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中: λ_k 为均衡状态下OD对路径 k 的交通费用; $C_a(\vec{f})$ 为路段 a 的运行费用, X_{kr} 为相应的路段流量。

2 符号定义

为了便于数学描述,本文中采用符号作如下定义:

用有向图 $G(N, L)$ 来表示交通网络。 R 是交通量发生节点集合, S 是交通量吸收节点集合, $R, S \subset N$ 。节点对 $r-s$ ($r \in R, s \in S$) 又称OD对 $r-s$ 之间的所有路径集, 记为 R_{rs} 。 q_{rs} 为OD对 $r-s$ 间的交通需求量, f_k^{rs} 为路径 k ($k \in R_{rs}$) 上的流量, x_a 为路段 a ($a \in L$) 上的流量。显然有

$$q_{rs} = \sum_{k \in R_{rs}} f_k^{rs}; x_a = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{k \in R_{rs}} \delta_{ak}^{rs} f_k^{rs} \quad (2)$$

其中: $\delta_{ak}^{rs} = \begin{cases} 1 & \text{连接 } r-s \text{ 的路径 } k \text{ 经过路段 } a \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

3 阻抗函数

3.1 阻抗函数的定义

定义2 阻抗函数是指车辆在道路上的行程时间与道路上的交通条件之间的关系,反映了路网的拥护效应,是交通量分配中的一项十分关键的基础技术^[9]。

3.2 阻抗函数的选定

目前,国内外阻抗函数有了很大的发展^[10-12]。

1) BPR 阻抗函数

$$t_a = t_a^0 [1 + \alpha (\frac{x_a^1}{C_a^1})^\beta] \quad (3)$$

式中: x_a^1 为本向机动车在路段 a 上的流量, C_a^1 表示本向机动车在路段 a 上的通行能力; 参数 α, β 的取值通常为 $\alpha=0.15, \beta=4.0$ 。

2) Davidson 阻抗函数

$$t_a = t_a^0 [1 + i (\frac{x_a^1}{C_a^1 - x_a^1})] \quad (4)$$

式中: i 为曲率参数。Davidson 阻抗函数是 BPR 阻抗函数的改进函数。

3) 我国许多学者根据我国城市交通机非混合行驶的特点,提出了阻抗函数的经验模型

$$t_a = t_a^0 [1 + \alpha^1 (\frac{x_a^1}{C_a^1})^{\beta^1} + \alpha^2 (\frac{x_a^2}{C_a^2})^{\beta^2}] \quad (5)$$

式中: $\alpha^1, \beta^1, \alpha^2, \beta^2$ 是回归参数, C_a^2 表示本向非机动车在路段 a 上的通行能力。

4) 我国学者刘安对上述经验模型进行推广,提出了以下的模型

$$\text{机动车影响: } t_a^1 = t_{a_1}^0 [1 + \alpha^1 (\frac{x_a^1}{C_a^1})^{\beta^1}] [1 + \alpha^2 (\frac{x_a^2}{C_a^2})^{\beta^2}]$$

$$\text{非机动车影响: } t_a^2 = t_{a_2}^0 [1 + \alpha^2 (\frac{x_a^2}{C_a^2})^{\beta^2}] [1 + \alpha^1 (\frac{x_a^1}{C_a^1})^{\beta^1}] \quad (6)$$

式中: $t_{a_1}^0, t_{a_2}^0$ 分别表示本向机动车、本向非机动车的自由行程时间。一般情况下,上述两式中的的参数取值是不一样的。

在此基础上,对已有的阻抗函数模型进行改进,考虑本向机动车、本向非机动车、对向机动车、对向非

机动车对交通量的影响,提出改进的阻抗函数模型:

$$\left. \begin{aligned} \text{本向机动车: } t_a^1 &= t_{a_1}^0 [1 + \alpha^1 (\frac{x_a^1}{C_a^1})^{\beta^1}] [1 + \alpha^2 (\frac{x_a^2}{C_a^2})^{\beta^2}] [1 + \alpha^3 (\frac{x_a^3}{C_a^3})^{\beta^3}] [1 + \alpha^4 (\frac{x_a^4}{C_a^4})^{\beta^4}] \\ \text{本向非机动车: } t_a^2 &= t_{a_2}^0 [1 + \alpha^2 (\frac{x_a^2}{C_a^2})^{\beta^2}] [1 + \alpha^1 (\frac{x_a^1}{C_a^1})^{\beta^1}] [1 + \alpha^3 (\frac{x_a^3}{C_a^3})^{\beta^3}] [1 + \alpha^4 (\frac{x_a^4}{C_a^4})^{\beta^4}] \\ \text{对向机动车: } t_a^3 &= t_{a_3}^0 [1 + \alpha^3 (\frac{x_a^3}{C_a^3})^{\beta^3}] [1 + \alpha^1 (\frac{x_a^1}{C_a^1})^{\beta^1}] [1 + \alpha^2 (\frac{x_a^2}{C_a^2})^{\beta^2}] [1 + \alpha^4 (\frac{x_a^4}{C_a^4})^{\beta^4}] \\ \text{对向非机动车: } t_a^4 &= t_{a_4}^0 [1 + \alpha^4 (\frac{x_a^4}{C_a^4})^{\beta^4}] [1 + \alpha^1 (\frac{x_a^1}{C_a^1})^{\beta^1}] [1 + \alpha^2 (\frac{x_a^2}{C_a^2})^{\beta^2}] [1 + \alpha^3 (\frac{x_a^3}{C_a^3})^{\beta^3}] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中: C_a^3, C_a^4 分别表示对向机动车、非机动车在路段 a 上的能行能力; α^i, β^j ($i, j \in (1, 2, 3, 4)$) 为参数。

3.3 阻抗函数的特征

下面以本向机动车与非机动车为例,对向机动车与非机动车有相似结论。

1) 阻抗与流量成正比关系,即根据流量的增大而增大的。

$$\frac{\partial t_a^1(x_a^1, x_a^2, x_a^3, x_a^4)}{\partial x_a^1} > 0; \quad \frac{\partial t_a^2(x_a^1, x_a^2, x_a^3, x_a^4)}{\partial x_a^2} > 0 \quad (8)$$

2) 机动车对机动车阻抗的影响比非机动车对其阻抗的影响更大。

$$\frac{\partial t_a^1(x_a^1, x_a^2, x_a^3, x_a^4)}{\partial x_a^1} > \frac{\partial t_a^1(x_a^1, x_a^2, x_a^3, x_a^4)}{\partial x_a^2} \quad (9)$$

同理,对于非机动车也有相似的结论。

$$\frac{\partial t_a^2(x_a^1, x_a^2, x_a^3, x_a^4)}{\partial x_a^2} > \frac{\partial t_a^2(x_a^1, x_a^2, x_a^3, x_a^4)}{\partial x_a^1} \quad (10)$$

3) 机动车对非机动车阻抗的影响不大于非机动车对机动车阻抗的影响。

$$\frac{\partial t_a^1(x_a^1, x_a^2, x_a^3, x_a^4)}{\partial x_a^2} \leq \frac{\partial t_a^2(x_a^1, x_a^2, x_a^3, x_a^4)}{\partial x_a^1} \quad (11)$$

定义3 当机动车对非机动车阻抗的影响、非机动车对机动车阻抗的影响相等时,即满足下式,称机动车与非机动车的相互影响是对称的,否则称不对称的^[13]。

$$\frac{\partial t_a^1(x_a^1, x_a^2, x_a^3, x_a^4)}{\partial x_a^2} = \frac{\partial t_a^2(x_a^1, x_a^2, x_a^3, x_a^4)}{\partial x_a^1} \quad (12)$$

4 建立对称型混合交通均衡模型

首先,在同时考虑本向机动车、本向非机动车、对向机动车、对向非机动车的影响下,建立混合交通网络的极小值模型:

$$\begin{aligned} \min P(x^1, x^2, x^3, x^4) &= F(x^1, x^2, x^3, x^4) + \frac{1}{r_1} q_{rs}^1 \sum_{rs} (\ln q_{rs}^1 - 1) + \frac{1}{r_2} q_{rs}^2 \sum_{rs} (\ln q_{rs}^2 - 1) + \\ &\frac{1}{r_3} q_{rs}^3 \sum_{rs} (\ln q_{rs}^3 - 1) + \frac{1}{r_4} q_{rs}^4 \sum_{rs} (\ln q_{rs}^4 - 1) \\ \text{s.t. } \begin{cases} q_{rs}^1 = \sum_k f_{k1}^{rs}; q_{rs}^2 = \sum_k f_{k2}^{rs}; q_{rs}^3 = \sum_k f_{k3}^{rs}; q_{rs}^4 = \sum_k f_{k4}^{rs} \\ x_a^1 = \sum_{rs} \sum_k \delta_{ak}^{rs} f_{k1}^{rs}; x_a^2 = \sum_{rs} \sum_k \delta_{ak}^{rs} f_{k2}^{rs}; x_a^3 = \sum_{rs} \sum_k \delta_{ak}^{rs} f_{k3}^{rs}; x_a^4 = \sum_{rs} \sum_k \delta_{ak}^{rs} f_{k4}^{rs} \\ f_{k1}^{rs}, f_{k2}^{rs}, f_{k3}^{rs}, f_{k4}^{rs} \geq 0 \\ q_{rs}^1, q_{rs}^2, q_{rs}^3, q_{rs}^4 \geq 0. \end{cases} \quad (13) \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned}
 F(x^1, x^2, x^3, x^4) &= \frac{1}{12}[f(x_a^1) + f(x_a^2) + f(x_a^3) + f(x_a^4)] \\
 f(x_a^1) &= \int_0^{x_a^1} t_a^1 [3(\omega, x_a^2, x_a^3, x_a^4) + (\omega, 0, x_a^2, x_a^3) + (\omega, 0, x_a^2, x_a^4) + (\omega, 0, x_a^3, x_a^4) + \\
 &\quad (\omega, 0, 0, x_a^2) + (\omega, 0, 0, x_a^3) + (\omega, 0, 0, x_a^4) + 3(\omega, 0, 0, 0)] d\omega \\
 f(x_a^2) &= \int_0^{x_a^2} t_a^2 [3(v, x_a^1, x_a^3, x_a^4) + (v, 0, x_a^1, x_a^3) + (v, 0, x_a^1, x_a^4) + (v, 0, x_a^3, x_a^4) + \\
 &\quad (v, 0, 0, x_a^1) + (v, 0, 0, x_a^3) + (v, 0, 0, x_a^4) + 3(v, 0, 0, 0)] dv \\
 f(x_a^3) &= \int_0^{x_a^3} t_a^3 [3(\tau, x_a^1, x_a^2, x_a^4) + (\tau, 0, x_a^1, x_a^2) + (\tau, 0, x_a^1, x_a^4) + (\tau, 0, x_a^2, x_a^4) + \\
 &\quad (\tau, 0, 0, x_a^1) + (\tau, 0, 0, x_a^2) + (\tau, 0, 0, x_a^4) + 3(\tau, 0, 0, 0)] d\tau \\
 f(x_a^4) &= \int_0^{x_a^4} t_a^4 [3(\rho, x_a^1, x_a^2, x_a^3) + (\rho, 0, x_a^1, x_a^2) + (\rho, 0, x_a^1, x_a^3) + (\rho, 0, x_a^2, x_a^3) + \\
 &\quad (\rho, 0, 0, x_a^1) + (\rho, 0, 0, x_a^2) + (\rho, 0, 0, x_a^3) + 3(\rho, 0, 0, 0)] d\rho
 \end{aligned}$$

式中: $q_{rs}^1, q_{rs}^2, q_{rs}^3, q_{rs}^4$ 分别表示本向机动车、本向非机动车、对向机动车、对向非机动车的交通需求量,记 $\bar{q} = q_{rs}^1 + q_{rs}^2 + q_{rs}^3 + q_{rs}^4$, 是常数; $f_{k1}^{rs}, f_{k2}^{rs}, f_{k3}^{rs}, f_{k4}^{rs}$ 分别为机动车、非机动车、对向机动车、对向非机动车在路径 k 上的流量。

4.1 混合交通均衡解的等价性

由数学规划的理论可知,上述极小值模型(13)的Lagrangian 函数为

$$\begin{aligned}
 L(x^1; x^2; x^3; x^4; \mu^1; \mu^2; \mu^3; \mu^4) &= F(x^1; x^2; x^3; x^4) + \frac{1}{r_1} q_{rs}^1 \sum_{rs} (\ln q_{rs}^1 - 1) + \frac{1}{r_2} q_{rs}^2 \sum_{rs} (\ln q_{rs}^2 - 1) + \\
 &\quad \frac{1}{r_3} q_{rs}^3 \sum_{rs} (\ln q_{rs}^3 - 1) + \frac{1}{r_4} q_{rs}^4 \sum_{rs} (\ln q_{rs}^4 - 1) + \sum_{rs} \mu_{rs}^1 (q_{rs}^1 - \sum_k f_{k1}^{rs}) + \sum_{rs} \mu_{rs}^2 (q_{rs}^2 - \sum_k f_{k2}^{rs}) + \\
 &\quad \sum_{rs} \mu_{rs}^3 (q_{rs}^3 - \sum_k f_{k3}^{rs}) + \sum_{rs} \mu_{rs}^4 (q_{rs}^4 - \sum_k f_{k4}^{rs})
 \end{aligned} \tag{14}$$

式中: $\mu_{rs}^1, \mu_{rs}^2, \mu_{rs}^3, \mu_{rs}^4$ 是模型中的各约束条件中的对偶乘子。

定理 1 极小值模型(13)的解与 Wardrop 均衡的解是等价的。

证明 极小值模型(13)的一阶条件与使Lagrangian 函数极小的一阶条件是等价的,同时要求约束 $f_{k1}^{rs}, f_{k2}^{rs}, f_{k3}^{rs}, f_{k4}^{rs} \geq 0$, 极小值模型(13)可表示为

$$\min L(x^1; x^2; x^3; x^4; \mu^1; \mu^2; \mu^3; \mu^4) \quad \text{s.t. } f_{k1}^{rs}, f_{k2}^{rs}, f_{k3}^{rs}, f_{k4}^{rs} \geq 0 \tag{15}$$

对 $f(x_a^1), f(x_a^2), f(x_a^3), f(x_a^4)$ 求关于机动车流量 x_a^1 的一阶导,可得

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial f(x_a^1)}{\partial x_a^1} &= t_a^1 [3(x_a^1, x_a^2, x_a^3, x_a^4) + (x_a^1, x_a^2, x_a^3, 0) + (x_a^1, x_a^2, 0, x_a^4) + (x_a^1, 0, x_a^3, x_a^4) + \\
 &\quad (x_a^1, x_a^2, 0, 0) + (x_a^1, 0, x_a^3, 0) + (x_a^1, 0, 0, x_a^4) + 3(x_a^1, 0, 0, 0)] \\
 \frac{\partial f(x_a^2)}{\partial x_a^1} &= \int_0^{x_a^2} \frac{\partial t_a^2 [3(v, x_a^1, x_a^3, x_a^4) + (v, 0, x_a^1, x_a^3) + (v, 0, x_a^1, x_a^4) + (v, 0, 0, x_a^1)]}{\partial x_a^1} dv \\
 \frac{\partial f(x_a^3)}{\partial x_a^1} &= \int_0^{x_a^3} \frac{\partial t_a^3 [3(\tau, x_a^1, x_a^2, x_a^4) + (\tau, 0, x_a^1, x_a^2) + (\tau, 0, x_a^1, x_a^4) + (\tau, 0, 0, x_a^1)]}{\partial x_a^1} d\tau \\
 \frac{\partial f(x_a^4)}{\partial x_a^1} &= \int_0^{x_a^4} \frac{\partial t_a^4 [3(\rho, x_a^1, x_a^2, x_a^3) + (\rho, 0, x_a^1, x_a^2) + (\rho, 0, x_a^1, x_a^3) + (\rho, 0, 0, x_a^1)]}{\partial x_a^1} d\rho
 \end{aligned} \right\} \tag{16}$$

由定义3中的均衡条件(12)可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial t_a^2(v, x_a^1, x_a^3, x_a^4)}{\partial x_a^1} &= \frac{\partial t_a^1(v, x_a^1, x_a^3, x_a^4)}{\partial v} \\ \frac{\partial t_a^3(\tau, x_a^1, x_a^2, x_a^4)}{\partial x_a^1} &= \frac{\partial t_a^1(\tau, x_a^1, x_a^2, x_a^4)}{\partial \tau} \\ \frac{\partial t_a^4(\rho, x_a^1, x_a^2, x_a^3)}{\partial x_a^1} &= \frac{\partial t_a^1(\rho, x_a^1, x_a^2, x_a^3)}{\partial \rho} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

将(17)代入(16)式可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(x_a^2)}{\partial x_a^1} &= t_a^1[3(x_a^1, x_a^2, x_a^3, x_a^4) - 3(x_a^1, 0, x_a^3, x_a^4) + (x_a^1, x_a^2, x_a^3, 0) - (x_a^1, 0, x_a^3, 0) + (x_a^1, x_a^2, 0, x_a^4) - \\ &\quad (x_a^1, 0, 0, x_a^4) + (x_a^1, x_a^2, 0, 0) - (x_a^1, 0, 0, 0)] \\ \frac{\partial f(x_a^3)}{\partial x_a^1} &= t_a^1[3(x_a^1, x_a^2, x_a^3, x_a^4) - 3(x_a^1, x_a^2, 0, x_a^4) + (x_a^1, x_a^2, x_a^3, 0) - (x_a^1, x_a^2, 0, 0) + (x_a^1, 0, x_a^3, x_a^4) - \\ &\quad (x_a^1, 0, 0, x_a^4) + (x_a^1, 0, x_a^3, 0) - (x_a^1, 0, 0, 0)] \\ \frac{\partial f(x_a^4)}{\partial x_a^1} &= t_a^1[3(x_a^1, x_a^2, x_a^3, x_a^4) - 3(x_a^1, x_a^3, x_a^3, 0) + (x_a^1, x_a^2, 0, x_a^4) - (x_a^1, x_a^2, 0, 0) + (x_a^1, 0, x_a^3, x_a^4) - \\ &\quad (x_a^1, 0, x_a^3, 0) + (x_a^1, 0, 0, x_a^4) - (x_a^1, 0, 0, 0)] \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

因此,有

$$\frac{\partial F(x_a^1, x_a^2, x_a^3, x_a^4)}{\partial x_a^1} = \frac{1}{12} \left[\frac{\partial f(x_a^1)}{\partial x_a^1} + \frac{\partial f(x_a^2)}{\partial x_a^1} + \frac{\partial f(x_a^3)}{\partial x_a^1} + \frac{\partial f(x_a^4)}{\partial x_a^1} \right] = t_a^1(x_a^1, x_a^2, x_a^3, x_a^4) \quad (19)$$

类似地, $F(x_a^1, x_a^2, x_a^3, x_a^4)$ 关于 x_a^2, x_a^3, x_a^4 的偏导数分别为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F(x_a^1, x_a^2, x_a^3, x_a^4)}{\partial x_a^2} &= t_a^2(x_a^1, x_a^2, x_a^3, x_a^4) \\ \frac{\partial F(x_a^1, x_a^2, x_a^3, x_a^4)}{\partial x_a^3} &= t_a^3(x_a^1, x_a^2, x_a^3, x_a^4) \\ \frac{\partial F(x_a^1, x_a^2, x_a^3, x_a^4)}{\partial x_a^4} &= t_a^4(x_a^1, x_a^2, x_a^3, x_a^4) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

对极小值模型的Lagrangian函数(14)式,本向非机动车、对向机动车、对向非机动车与本向机动车推导结果一致,故下文只列出有关本向机动车的结果,两边分别关于本向机动车的流量 f_{k1}^{rs} 和 μ_{rs}^1 求偏导数,可得

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial f_{k1}^{rs}} = \frac{\partial F(\cdot)}{\partial f_{k1}^{rs}} - \mu_{rs}^1 = \sum_a \frac{\partial F(\cdot)}{\partial x_a^1} \frac{\partial x_a^1}{\partial f_{k1}^{rs}} - \mu_{rs}^1, \quad \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \mu_{rs}^1} = q_{rs}^1 - \sum_k f_{k1}^{rs} \quad (21)$$

已知极小值问题式(18)对应的一阶条件为

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial f_{k1}^{rs}} f_{k1}^{rs} = 0, \quad \frac{\partial L(\cdot)}{\partial f_{k1}^{rs}} \geq 0 \quad (22)$$

并且有

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \mu_{rs}^1} = 0$$

将(18)~(21)式代入(22)式,由此可知极小值问题(15)的一阶条件可以表示为

$$\mu_{rs}^1 - C_{k1}^{rs} = \begin{cases} 0, & \text{如 } f_{k1}^{rs} > 0 \\ \leq 0, & \text{如 } f_{k1}^{rs} = 0 \end{cases} \quad (23)$$

式中, C_{k1}^{rs} 分别表示均衡状态下机动车的阻抗,满足下列关系

$$C_{k1}^{rs} = \sum_a t_a^1(x_a^1, x_a^2, x_a^3, x_a^4) \delta_{ak1}^{rs} \tag{24}$$

式中: $\frac{\partial x_a^1}{\partial f_{k1}^{rs}} = \delta_{ak}^{rs}$ 。

对应于 Beckmann 对于 Wardrop 均衡状态的数学表述式(1),式(23)描述的正是混合交通均衡状态,因此混合交通网络的极值模型(13)是 Wardrop 均衡状态的等价描述。

4.2 混合交通均衡解的唯一性

定理2 混合交通网络的极小值模型(13)的解是唯一的。

证明 首先,由本向机动车、本向非机动车、对向机动车、对向非机动车的阻抗函数的模型(7)可以得出,机动车的阻抗主要取决于机动车流,非机动车的阻抗主要取决于非机动车流,因此目标函数 $F(x_a^1, x_a^2, x_a^3, x_a^4)$ 的 Hessian 矩阵 $[\frac{\partial^2 t_i(\cdot)}{\partial x_j}]$ 是正定的,故目标函数 $F(x_a^1, x_a^2, x_a^3, x_a^4)$ 是严格凸的。又因为模型的约束条件是线性的,所以均衡问题的极值模型的解集为凸集,因此模型(13)关于 $x_a^1, x_a^2, x_a^3, x_a^4, q_{rs}^1, q_{rs}^2, q_{rs}^3, q_{rs}^4$ 的最优解是唯一的。

4.3 求解算法

可以利用方向搜索法得到模型的最优解,具体的操作步骤如下:

第1步 初始化。令 $n=1$,找初始可行流:

$$\{q_{rs1}^{(n)}\}, \{q_{rs2}^{(n)}\}, \{q_{rs3}^{(n)}\}, \{q_{rs4}^{(n)}\}, \{x_{a1}^{(n)}\}, \{x_{a2}^{(n)}\}, \{x_{a3}^{(n)}\}, \{x_{a4}^{(n)}\}$$

第2步 计算 $t_{a1}^{(n)}, t_{a2}^{(n)}, t_{a3}^{(n)}, t_{a4}^{(n)}$;

第3步 运用全有全无的分配方法,分别对机车、非机动车、对向机动车、对向非机动车交通进行重新配流,可以分别得到新的流量分布集合: $Y_1^n = (\dots, y_{a1}^{(n)}, \dots)$, $Y_2^n = (\dots, y_{a2}^{(n)}, \dots)$, $Y_3^n = (\dots, y_{a3}^{(n)}, \dots)$, $Y_4^n = (\dots, y_{a4}^{(n)}, \dots)$ 从而可以确定目标函数分别在点 $X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, X_3^{(n)}, X_4^{(n)}$ 处的下降方向

$$(Y_1^n - X_1^{(n)}, Y_2^n - X_2^{(n)}, Y_3^n - X_3^{(n)}, Y_4^n - X_4^{(n)})$$

第4步 求解下列一维无约束极值问题,并得出最优解 a_n ;

$$\begin{aligned} \min Z(a) = & \sum_a \int_0^{x_{a1}^{(n)} + a(y_{a1}^{(n)} - x_{a1}^{(n)})} \{t_a^1[\omega, x_{a2}^{(n)} + a(y_{a2}^{(n)} - x_{a2}^{(n)})] + t_a^1(\omega, 0)\} d\omega + \\ & \sum_a \int_0^{x_{a2}^{(n)} + a(y_{a2}^{(n)} - x_{a2}^{(n)})} \{t_a^2[\omega, x_{a1}^{(n)} + a(y_{a1}^{(n)} - x_{a1}^{(n)})] + t_a^2(\omega, 0)\} d\omega + \\ & \sum_a \int_0^{x_{a3}^{(n)} + a(y_{a3}^{(n)} - x_{a3}^{(n)})} \{t_a^3[\omega, x_{a4}^{(n)} + a(y_{a4}^{(n)} - x_{a4}^{(n)})] + t_a^3(\omega, 0)\} d\omega + \\ & \sum_a \int_0^{x_{a4}^{(n)} + a(y_{a4}^{(n)} - x_{a4}^{(n)})} \{t_a^4[\omega, x_{a3}^{(n)} + a(y_{a3}^{(n)} - x_{a3}^{(n)})] + t_a^4(\omega, 0)\} d\omega \end{aligned}$$

第5步 令

$$\begin{aligned} x_{a1}^{(n+1)} &= x_{a1}^{(n)} + a_{(n)}(y_{a1}^{(n)} - x_{a1}^{(n)}), \quad x_{a2}^{(n+1)} = x_{a2}^{(n)} + a_{(n)}(y_{a2}^{(n)} - x_{a2}^{(n)}), \\ x_{a3}^{(n+1)} &= x_{a3}^{(n)} + a_{(n)}(y_{a3}^{(n)} - x_{a3}^{(n)}), \quad x_{a4}^{(n+1)} = x_{a4}^{(n)} + a_{(n)}(y_{a4}^{(n)} - x_{a4}^{(n)})。 \end{aligned}$$

第6步 迭代收敛性检验。当 $x_1^{(n)} \approx x_1^{(n+1)}, x_2^{(n)} \approx x_2^{(n+1)}, x_3^{(n)} \approx x_3^{(n+1)}, x_4^{(n)} \approx x_4^{(n+1)}$ 时,确定解为收敛的,终止迭代。否则令 $n=n+1$,返回第4步,直到达到收敛的标准为止。

5 算例分析

考虑如图 1 所示的双向混合交通分配问题。

1) 假设 O 点到 D 点的本向机动车、对向机动车都为 $1\ 200\ \text{PCU} \cdot \text{h}^{-1}$, 同时本向非机动车、对向非机动车 $700\ \text{PCU} \cdot \text{h}^{-1}$ 。

2) 对应的阻抗函数分别为:

$$\begin{aligned} t_a^1 &= 20 \times (1 + 0.4 \times \frac{x_a^1}{800}) \times (1 + 0.3 \times \frac{x_a^2}{500}) \times (1 + 0.2 \times \frac{x_a^3}{800}) \times (1 + 0.1 \times \frac{x_a^4}{500}) \\ t_a^2 &= 50 \times (1 + 0.4 \times \frac{x_a^1}{800}) \times (1 + 0.3 \times \frac{x_a^2}{500}) \times (1 + 0.2 \times \frac{x_a^3}{800}) \times (1 + 0.1 \times \frac{x_a^4}{500}) \\ t_a^3 &= 20 \times (1 + 0.4 \times \frac{x_a^1}{800}) \times (1 + 0.3 \times \frac{x_a^2}{500}) \times (1 + 0.2 \times \frac{x_a^3}{800}) \times (1 + 0.1 \times \frac{x_a^4}{500}) \\ t_a^4 &= 50 \times (1 + 0.4 \times \frac{x_a^1}{800}) \times (1 + 0.3 \times \frac{x_a^2}{500}) \times (1 + 0.2 \times \frac{x_a^3}{800}) \times (1 + 0.1 \times \frac{x_a^4}{500}) \end{aligned}$$

3) 令初始解 $x_1^{(0)} = x_3^{(0)} = 600, x_2^{(0)} = x_4^{(0)} = 350$;

4) 求解下列极小值问题

$$\begin{aligned} \min & [\int_0^{x_1^1} t_a^1(\omega) d\omega + \int_0^{x_2^2} t_a^2(\omega) d\omega + \int_0^{x_3^3} t_a^3(\omega) d\omega + \int_0^{x_4^4} t_a^4(\omega) d\omega] \\ \text{s.t.} & \begin{cases} x_1 + x_3 = 1\ 200 \\ x_2 + x_4 = 700 \end{cases} \end{aligned}$$

得最优解: $x_1^{(1)} = 620.694, x_2^{(1)} = 381.909, x_3^{(1)} = 579.306, x_4^{(1)} = 318.091$

5) 迭代结果检验

由于 $\max(\frac{x_1^{(1)} - x_1^{(0)}}{x_1^{(0)}}, \frac{x_2^{(1)} - x_2^{(0)}}{x_2^{(0)}}, \frac{x_3^{(1)} - x_3^{(0)}}{x_3^{(0)}}, \frac{x_4^{(1)} - x_4^{(0)}}{x_4^{(0)}}) \times 100 = 9.117 > \varepsilon = 0.1$, 继续迭代。

6) 最终求得混合交通道路上的均衡最优解

$$x_1^* = 618.870, x_2^* = 380.912, x_3^* = 581.123, x_4^* = 319.095$$

6 结束语

考虑到交通分配理论与方法应尽可能反映我国城市交通的特殊性, 文章针对我国城市交通为机非混合行驶的特点, 针对已有研究中的阻抗函数的模型, 在考虑机动车、非机动车对路段阻抗函数的影响的同学, 进一步考虑了对向机动车流和对向非机动车对阻抗函数的影响, 从而建立了改进的路段阻抗函数的模型, 并且提出了与经典交通模型等价的对称型混合交通均衡模型, 但模型要在实际工作中得到普遍的应用, 还需要对该模型进行进一步完善, 这也正是我们的前进方向。

参考文献:

- [1] 罗端高, 史峰. 多用户多方式混合交通均衡变分模型及求解算法[J]. 交通运输系统工程与信息, 2010, 10(5): 110-116.
- [2] 王利, 杨青骥. 无限多类别交通网络的扩展 Wardrop 均衡[J]. 暨南大学学报: 自然科学与医学版, 2012, 33(1): 34-37.
- [3] 曾明华, 肖瑜, 黄细燕. 多层次交通网络的 UE 与 SO 混合均衡与效率损失[J]. 华东交通大学学报, 2012, 29(2): 57-62.
- [4] 胡文君, 周溪召. 基于交叉集式 Logit 的多用户多模式随机用户均衡模型[J]. 中国公路学报, 2012, 25(4): 133-140.

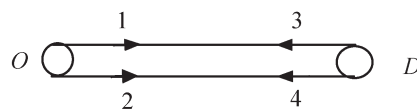


图 1 双向混合交通图

Fig.1 Two-way mixed traffic

- [5] 刘玉印,刘伟铭,田世艳. 出行者有限理性条件下混合策略网络均衡模型[J]. 公路交通科技,2011,28(7):136-141.
- [6] 周溪召. 混合交通运量分布与均衡配流组合模型研究[J]. 系统工程学报,2000,15(2):154-157.
- [7] WARDROP J G. Some theoretical of road traffic research [C]//Proceedings of the Institute of Civil Engineers, 1952: 325-378.
- [8] BECKMANN M, MCGUIRE C B, WINSTEN C B. Studies in the Economics of Transportation[M]. New Haven: Yale University Press, 1956:21-26.
- [9] 王文静,敬明,刘冬梅,等. 基于 LOGIT 模型和 BPR 阻抗函数的容量限制 - 多路径交通分配研究[J]. 公路交通科技, 2012,29(S1):80-86.
- [10] 韦增欣,梁碧清,罗朝晖. 改进的阻抗函数及方式划分配流模型[J]. 海南大学学报:自然科学版,2010,28(4):363-369.
- [11] 周树发,刘莉. 工程网络计划中的多目标优化问题[J]. 华东交通大学学报,2004,21(2):10-13.
- [12] 陈星光,李卓君,朱振涛. 多维动态随机用户最优出行选择的变分不等式模型[J]. 系统工程,2011,29(11):84-89.
- [13] 刘安,王正. 混合交通均衡分配方法[J]. 同济大学学报,1997,25(6):645-649.

Mixed Traffic Equilibrium Model Based on the Improved Impedance Function

Luo Wei, Wu Keqing

(School of Science, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou 341000, China)

Abstract: Chinese urban traffic is characterized by the mixture of motor and non-motorized vehicles. In consideration to the influence of the reverse motor and the reverse non-motor vehicles on the impedance function, this paper puts forward an impedance function model under the influence of motor vehicles, non-motor vehicles, reverse motor vehicles and reverse non-motor vehicles, establishing a mixed traffic equilibrium model with the improved impedance function. Based on the optimization theory and method, this paper proves with the empirical analysis that the proposed equilibrium model of the optimal solution is equivalent to Wardrop's user equilibrium principle and the optimal solution of the equilibrium model is unique.

Key words: mixed traffic; impedance functions; equilibrium model; variational inequality