

文章编号: 1005-0523(2013)06-0035-05

非连通图 $C_3(m, 0, 0) \cup G$ 的优美性

吴跃生

(华东交通大学基础科学学院, 江西南昌 330013)

摘要: 讨论了非连通图 $C_3(m, 0, 0) \cup G$ 的优美性, 给出了非连通图 $C_3(m, 0, 0) \cup G$ 的两种优美标号, 其中, $C_3(m, 0, 0)$ 表示图 C_3 的 $(m, 0, 0)$ -冠, 图 G 是满足一定条件的平衡图。

关键词: 优美标号; 优美图; 图

中图分类号: O157.5

文献标志码: A

1 引言与概念

本文所讨论的图均为无向简单图, $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集, 记号 $[m, n]$ 表示整数集合 $\{m, m+1, \dots, n\}$, 其中 m 和 n 均为非负整数, 且满足 $0 \leq m < n$ 。未说明的符号及术语均同文[1]。

图的优美标号问题是组合数学中一个热门课题^[1-10]。

定义 1^[1] 对于一个图 $G=(V, E)$ 如果存在一个单射 $\theta: V(G) \rightarrow [0, |E(G)|]$ 使得对所有边 $e=(u, v) \in E(G)$, 由 $\theta(e)=|\theta(u)-\theta(v)|$ 导出的 $E(G) \rightarrow [1, |E(G)|]$ 是一个双射, 则称 G 是优美图, θ 是 G 的一组优美标号, 称 θ 为 G 的边上的由 θ 导出的诱导值。

定义 2^[1] 设 f 为 G 的一个优美标号, 如果存在一个正整数 k , 使得对任意的 $uv \in E(G)$ 有

$$f(u) > k \geq f(v) \text{ 或 } f(u) \leq k < f(v)$$

成立, 则称 f 为 G 的平衡标号(或称 G 有平衡标号 f), 且称 k 为 f 的特征。图 G 称为平衡二分图(balanced bipartite graph)。

显然, 若 f 为 G 的平衡标号, 则 k 是边导出标号为 1 的边的两个端点中标号较小的顶点的标号。

定义 3^[1] 在平衡二分图 G 中, 设其优美标号 θ 的特征为 k , 并且 $\theta(u_0)=k$, $\theta(v_0)=k+1$, 则称 u_0 为 G 的二分点, v_0 为 G 的对偶二分点。

定义 4^[2] G 是一个优美二部图, 其优美标号为 θ , $V(G)$ 划分成两个集合 X, Y , 如果 $\max_{v \in X} \theta(v) < \min_{v \in Y} \theta(v)$, 则称 θ 是 G 的交错标号。称 G 是在交错标号 θ 下的交错图。

事实上, 交错图就是平衡图。 $\max_{v \in X} \theta(v) = k$ 就是交错图关于交错标号的特征。

定义 5^[3-4] $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 的每个顶点 v_i 都粘接了 r_i 条悬挂边(r_i 为自然数, $i=1, 2, \dots, k$) 所得到的图, 称为图 G 的 (r_1, r_2, \dots, r_n) -冠, 简记为 $G(r_1, r_2, \dots, r_n)$ 。特别地, 当 $r_1=r_2=\dots=r_n=r$ 时, 称为图 G 的 r -冠。图 G 的 0-冠就是图 G 。

本文讨论了非连通图 $C_3(m, 0, 0) \cup G$ 的优美性。

收稿日期: 2013-06-21

基金项目: 国家自然科学基金项目(11261019, 11361024); 江西省自然科学基金项目(20114BAB201010)

作者简介: 吴跃生(1959-), 男, 副教授, 硕士, 研究方向为图论。

2 主要结果及其证明

定理1 设 G 是一个 p 条边的优美图, g 是 G 的优美标号, $p-1$ 不是 g 的标号值, h 是图 H 特征为 k 的交错标号, $k+2$ 不是 h 的标号值 ($k+2 < q, |E(H)|=q$) 则非连通图 $G \cup H$ 存在 $k+1$ 不是其标号值的优美标号。特别地, 当 G 是交错图时, 则非连通图 $G \cup H$ 存在 $k+1$ 不是其标号值的交错标号。

证 设 X, Y 是交错图 H 的一个二分化, 且 $\max_{v \in X} h(v) = k < \min_{v \in Y} h(v) = k+1, |E(H)| = q$ 。

定义非连通图 $G \cup H$ 的顶点标号 θ 为

$$\theta(v) = \begin{cases} h(v), v \in X, \\ h(v) + p, v \in Y, \\ k+2 + g(v), v \in V(G). \end{cases}$$

下面证明 θ 是非连通图 $G \cup H$ 的优美标号。

1) $\theta : X \rightarrow [0, k]$ 是单射(或双射); $\theta : Y \rightarrow [k+1+p, p+q] - \{k+2+p\}$ 是单射(或双射); $\theta : V(G) \rightarrow [k+2, k+2+p] - \{k+1+p\}$ 是单射(或双射); 容易验证: $\theta : V(G \cup H) \rightarrow [0, p+q] - \{k+1\}$ 是单射(或双射)。

2) $\theta' : E(G) \rightarrow [1, p]$ 是双射。 $\theta' : E(H) \rightarrow [p+1, p+q]$ 是双射容易验证: $\theta' : E(G \cup H) \rightarrow [1, p+q]$ 是一一对应。

由1)和2)可知 θ 就是非连通图 $G \cup H$ 的缺 $k+1$ 标号值的优美标号。

特别地, 当 G 是交错图时, 设 X_1, Y_1 是图 G 的一个二分化, 且 $\max_{v \in X_1} g(v) = k_1 < \min_{v \in Y_1} g(v) = k_1+1$, 令 $X_2 = X \cup X_1, Y_2 = Y \cup Y_1$, 有 $\max_{v \in X_2} \theta(v) = k_1 + k + 2 < \min_{v \in Y_2} \theta(v) = k_1 + k + 3$ 则非连通图 $G \cup H$ 存在 $k+1$ 不是其标号值的特征为 $k_1 + k + 2$ 的交错标号。证毕。

引理1 对任意自然数 $m, C_3(m, 0, 0)$ 存在缺标号值 $m+2$ 的优美标号。

证 设圈 C_3 的顶点依次为 v_1, v_2, v_3 , 与顶点 v_1 邻接的端点(或叶)记为 $x_{1,j} (j=1, 2, \dots, m)$, 定义非连通图 $C_3(m, 0, 0)$ 的顶点标号 θ 为: $\theta(v_1) = 3+m, \theta(v_2) = m, \theta(v_3) = m+1, \theta(x_{1,j}) = m-j, j=1, 2, \dots, m$, (当 $m=0$ 时, $\theta(x_{1,j}) = \theta(v_1)$)。

容易验证: θ 就是 $C_3(m, 0, 0)$ 缺标号值 $m+2$ 的优美标号。

定理2 对任意自然数 m , 图 G 是特征为 k 且缺 $k+2$ 标号值的交错图 ($k+2 < q, |E(G)| = q$), 则非连通图 $C_3(m, 0, 0) \cup G$ 存在缺标号值 $k+1$ 的两种不同的优美标号。

证 由定理1和引理1, 可给出非连通图 $C_3(m, 0, 0) \cup G$ 的第一种优美标号, 下面给出非连通图 $C_3(m, 0, 0) \cup G$ 的第二种优美标号。

设圈 C_3 的顶点依次为 v_1, v_2, v_3 , 与顶点 v_1 邻接的端点(或叶)记为 $x_{1,j} (j=1, 2, \dots, m)$, 设 X, Y 是图 G 的一个二分化, θ_1 是图 G 的交错标号, 且 $\max_{v \in X} \theta_1(v) = k < \min_{v \in Y} \theta_1(v) = k+1$ 。

定义非连通图 $C_3(m, 0, 0) \cup G$ 的顶点标号 θ 为

$\theta(v_1) = k+2, \theta(v_2) = 3+k, \theta(v_3) = 5+k+m, \theta(x_{1,j}) = 3+k+j, j=1, 2, \dots, m$, (当 $m=0$ 时, $\theta(x_{1,j}) = \theta(v_1)$),

$$\theta(v) = \begin{cases} \theta_1(v), v \in X \\ \theta_1(v) + 3+m, v \in Y \end{cases}$$

下面证明 θ 是非连通图 $C_3(m, 0, 0) \cup G$ 的优美标号。

1) $\theta : X \rightarrow [0, k]$ 是单射(或双射); $\theta : Y \rightarrow [k+m+4, q+m+3] - \{k+m+5\}$ 是单射(或双射); $\theta : V(C_3(m, 0, 0)) \rightarrow [k+2, k+m+3] \cup \{k+m+5\}$ 是双射; 容易验证: $\theta : V(C_3(m, 0, 0) \cup G) \rightarrow [0, q+m+3] - \{k+1\}$ 是单射(或双射)。

2) $\theta'(v_1x_{1,j}) = |\theta(v_1) - \theta(x_{1,j})| = 1 + j, j = 1, 2, \dots, m; \theta'(v_1v_2) = |\theta(v_1) - \theta(v_2)| = 1, \theta'(v_2v_3) = |\theta(v_2) - \theta(v_3)| = 2 + m, \theta'(v_3v_1) = |\theta(v_3) - \theta(v_1)| = 3 + m, \theta' : E(C_3(m,0,0)) \rightarrow [1, m + 3]$ 是双射; $\theta' : E(G) \rightarrow [m + 4, q + m + 3]$ 是双射。

容易验证: $\theta' : E(C_3(m,0,0) \cup G) \rightarrow [1, q + m + 3]$ 是一一对应。

由1)和2)可知 θ 就是非连通图 $C_3(m,0,0) \cup G$ 的缺 $k + 1$ 标号值的优美标号。证毕。

例1 由定理2可得非连通图 $C_3(4,0,0) \cup C_4$ 缺标号值2的第一种优美标号为: $C_3(4,0,0): 10(3,4,5,6), 7, 8; C_4: 0, 11, 1, 9$; 由定理2可得非连通图 $C_3(4,0,0) \cup C_4$ 缺标号值2的第二种优美标号为: $C_3(4,0,0): 3(5,6,7,8), 4, 10; C_4: 0, 11, 1, 9$ 。

引理2^[1] 对任意自然数 m, n , 当 $m \geq 2, n \geq 2$ 时, 完备二分图 $K_{m,n}$ 存在特征为 $m - 1$ 且缺 $m + 1$ 标号值的交错标号。

证 设完备二分图 $K_{m,n}$ 的顶点二分为 $V_1, V_2, V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}, V_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, 令

$$\theta(v_i) = i - 1, \theta(v_i) = i - 1, i = 1, 2, \dots, m, \theta(u_i) = im, i = 1, 2, \dots, n$$

容易验证: 对任意自然数 m, n , 当 $m \geq 2, n \geq 2$ 时, 完备二分图 $K_{m,n}$ 存在特征为 $m - 1$ 且缺 $m + 1$ 标号值的交错标号。

由引理2和定理2, 有

推论3 对任意自然数 h, m, n , 当 $m \geq 2, n \geq 2$ 时, 非连通图 $C_3(m,0,0) \cup K_{m,n}$ 存在且缺标号值 m 的两种不同的优美标号。

例2 由推论3可得 $C_3(4,0,0) \cup K_{3,2}$ 缺标号值3的两种不同的优美标号如图1所示。

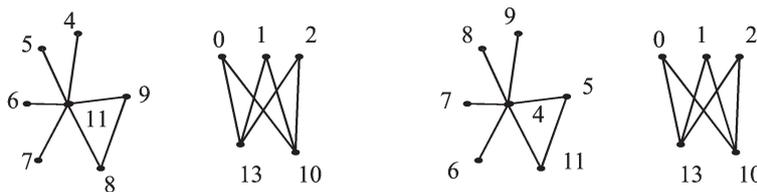


图1 非连通图 $C_3(4,0,0) \cup K_{3,2}$ 的两种优美标号

Fig.1 The graceful labeling of $C_3(4,0,0) \cup K_{3,2}$

我们把顺序有一个公共点的 m 个 C_4 的连通并图记作 $F_{m,4}$ ^[1]。

引理3^[1] 对任意自然数 m , 图 $F_{m,4}$ 存在特征为 m 且缺 $m + 2$ 标号值的交错标号。

由引理3和定理2, 有

推论4 对任意自然数 m, n , 非连通图 $C_3(m,0,0) \cup F_{n,4}$ 存在缺标号值 $n + 1$ 的两种不同的优美标号。

例3 由推论4可得 $C_3(4,0,0) \cup F_{3,4}$ 缺标号值4的两种不同的优美标号如图2所示。

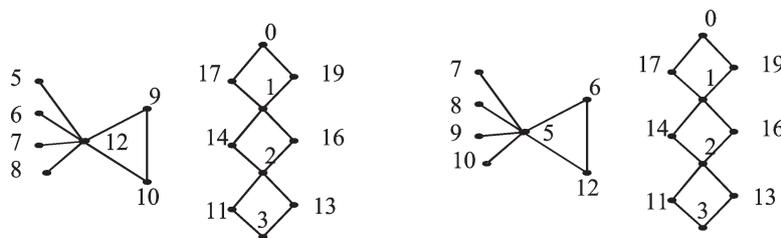


图2 非连通图 $C_3(4,0,0) \cup F_{3,4}$ 的两种优美标号

Fig.2 The graceful labeling of $C_3(4,0,0) \cup F_{3,4}$

我们把 m 个 C_4 间顺序加一条边的图记作 $\wedge C_{4,m}$ ^[1]。

引理4^[1] 对任意自然数 m , 图 $\wedge C_{4,m}$ 存在特征为 $2m-1$ 且缺 $2m+1$ 标号值的交错标号。

由引理4和定理2, 有

推论4 对任意自然数 m, n , 非连通图 $C_3(m,0,0) \cup \wedge C_{4,n}$ 存在缺标号值 $2n$ 的两种不同的优美标号。

例4 由推论4可得 $C_3(4,0,0) \cup \wedge C_{4,2}$ 缺标号值4的两种不同的优美标号如图3所示。

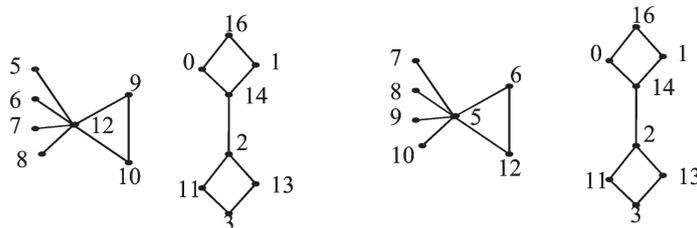


图3 非连通图 $C_3(4,0,0) \cup \wedge C_{4,2}$ 的两种优美标号

Fig.3 The graceful labeling of $C_3(4,0,0) \cup \wedge C_{4,2}$

引理5^[1] 对任意自然数 a, b , 图 $C_4(a,0,b,0)$ 存在特征为1且缺3标号值的交错标号。

证 设 C_4 上的顶点依次为 u_1, u_2, u_3, u_4 , 与顶点 u_1 邻接的端点(或叶)记为 $y_{1,j}, j=1,2,\dots,a$, 与顶点 u_3 邻接的端点(或叶)记为 $y_{3,j}, j=1,2,\dots,b$ 。

定义 $C_4(a,0,b,0)$ 的顶点标号 θ 为: $\theta(u_1)=0, \theta(u_3)=1, \theta(u_4)=2, \theta(y_{1,j})=5+a+b-j, j=1,2,\dots,a$, (当 $a=0$ 时, $\theta(y_{1,j})=\theta(u_1)$), $\theta(u_2)=4+b, \theta(y_{3,j})=4+b-j, j=1,2,\dots,b$, (当 $b=0$ 时, $\theta(y_{3,j})=\theta(u_3)$)。

下面证明 θ 是 $C_4(a,0,b,0)$ 的优美标号。

1) 容易验证: $\theta : V(C_4(a,0,b,0)) \rightarrow [0, 4+a+b] - \{3\}$ 是一一映射。

2) $\theta'(u_1, u_2) = |\theta(u_1) - \theta(u_2)| = 4+b, \theta'(u_3, u_2) = |\theta(u_3) - \theta(u_2)| = 3+b, \theta'(u_3, u_4) = |\theta(u_3) - \theta(u_4)| = 1, \theta'(u_1, u_4) = |\theta(u_1) - \theta(u_4)| = 2, \theta'(u_1, y_{1,j}) = |\theta(u_1) - \theta(y_{1,j})| = 4+a+b-j, j=1,2,\dots,a, \theta'(u_3, y_{3,1}) = |\theta(u_3) - \theta(y_{3,1})| = 3+b-j,$

容易验证: $\theta' : E(C_4(a,0,b,0)) \rightarrow [1, 4+a+b]$ 是一一映射。

由1)和2)可知 θ 是 $C_4(a,0,b,0)$ 的优美标号。

令 $X = \{u_1, u_3\}, Y = \{u_2, u_4\} \cup \{y_{1,j} | j=1,2,\dots,a\} \cup \{y_{3,j} | j=1,2,\dots,b\}$ 则有

$$\max_{v \in X} \theta(v) = 1 < \min_{v \in Y} \theta(v) = 2$$

所以, θ 就是图 $C_4(a,0,b,0)$ 特征为1, 且缺3的交错标号。

由引理5和定理2, 有

推论5 对任意自然数 a, b, m , 非连通图 $C_3(m,0,0) \cup C_4(a,0,b,0)$ 存在缺标号值2的两种不同的优美标号。

例5 由推论5可得 $C_3(4,0,0) \cup C_4(3,0,5,0)$ 缺标号值2的两种不同的优美标号如图4所示。

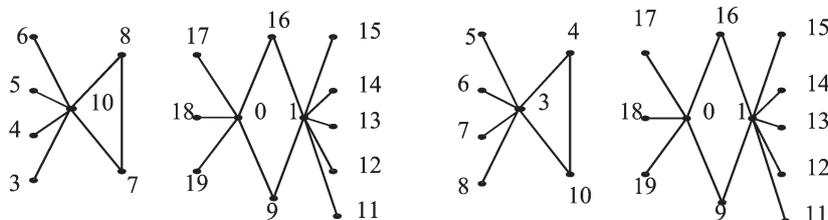


图4 非连通图 $C_3(4,0,0) \cup C_4(3,0,5,0)$ 的两种优美标号

Fig.4 The graceful labeling of $C_3(4,0,0) \cup C_4(3,0,5,0)$

参考文献:

- [1] 马杰克. 优美图[M]. 北京:北京大学出版社,1991:1-247.
- [2] 杨显文. 关于 C_{4m} 蛇的优美性[J]. 工程数学学报,1995,12(4):108-112.
- [3] 吴跃生. 关于圈 C_{4h} 的 $(r_1, r_2, \dots, r_{4h})$ -冠的优美性[J]. 华东交通大学学报,2011,28(1):77-80.
- [4] 吴跃生,李咏秋. 关于圈 C_{4h+3} 的 $(r_1, r_2, \dots, r_{4h})$ -冠的优美性[J]. 吉首大学学报:自然科学版,2011,32(6):1-4.
- [5] 吴跃生. 关于图 $P_{6k+5}^3 \cup P_n^3$ 的优美性[J]. 吉首大学学报:自然科学版,2012,33(3):4-7.
- [6] 吴跃生,徐保根. 两类非连通图 $(P_2 \vee \overline{K_n})(0, 0, r_1, 0, \dots, 0, r_n) \cup St(m)$ 及 $(P_2 \vee \overline{K_n})(r_1 + a, r_2, 0, \dots, 0) \cup G$ 的优美性[J]. 中山大学学报:自然科学版,2012,51(5):63-66.
- [7] 吴跃生. 图 $C_7(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, 0, 0) \cup St(m)$ 的优美性[J]. 吉首大学学报:自然科学版,2012,33(5):9-1.
- [8] 吴跃生,王广富. 关于 $C_{4h+1} \odot K_1$ 的 $(Gr_1, Gr_2, \dots, Gr_{4h+1}, Gr_{4h+2})$ -冠的优美性[J]. 山东大学学报,2013,48(4):25-27.
- [9] 吴跃生. 关于圈 C_{4h+3} 的 $(Gr_1, Gr_2, \dots, Gr_{4h+3})$ -冠的优美性[J]. 吉首大学学报:自然科学版,2013,34(4):1-6.
- [10] 吴跃生,王广富,徐保根. 非连通图 $C_{2n+1} \cup G_{n-1}$ 的优美性[J]. 华东交通大学学报,2012,29(6):26-29.

The Graceful Labeling of the Unconnected Graph $C_3(m, 0, 0)UG$

Wu Yuesheng

(School of Basic Science, Eastchina Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: The gracefulfulness of the unconnected graph $C_3(m, 0, 0)UG$ is discussed. Two graceful labelings of the unconnected graph $C_3(m, 0, 0)UG$ are then explored in details.

Key words: graceful labeling; graceful graph; cycle

(上接第29页)

Single-phase Photovoltaic Grid-loop Control Strategy Based on LCL Filter

Zhang Shulin, Wang Xun, Cheng Hongbo

(School of Electrical and Electronic Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: Based on LCL filter instead of L and LC type filter, through active damping algorithm, in response to the DC bus overvoltage phenomenon due to the mismatching of input and output power when the light is too strong, this paper proposes the loop control strategy of DC bus voltage loop, current loop power and capacitor current loop in order to stabilize DC bus voltage. A single-phase photovoltaic grid control system model is established and a detailed analysis of the design of the control strategy is carried out. The simulation results show that the new control strategy can effectively control the DC bus voltage, improving current quality and system stability.

Key words: PV grid; inverter; LCL filter; DC bus voltage; control