DOI:10.16749/j.cnki.jecjtu.2014.01.001

文章编号:1005-0523(2014)01-0098-04

广义Schur补为零时分块矩阵的Drazin逆

刘喜富

(华东交通大学基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要: 当分块矩阵 $M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ 的广义Schur补 $S=D-CA^DB=0$ 时,并且在一定条件下,我们得到了矩阵 M 的几个Drazin逆计算公式。

关键词: Drazin逆;分块矩阵;广义Schur补

中图分类号: O151.21　　**文献标志码:** A

设矩阵 $A\in C^{n\times n}$,称满足以下3个矩阵方程

$$A^kXA=A^k,\ XAX=X,\ AX=XA$$

的唯一解为 A 的Drazin逆,记为 A^D。$k=\mathrm{ind}(A)$ 称为 A 的指标,如果 $\mathrm{ind}(A)=1$,则 A 的Drazin逆称为群逆,记为 $A^{\#}$;如果 $\mathrm{ind}(A)=0$,则 $A^D=A^{-1}$。文中记 $A^{\pi}=I-A^D$,并定义 $A^0=I$。更多关于Drazin逆的定义与性质可参考文献[1]。矩阵Drazin逆在许多领域中都有着非常广泛的应用,如奇异的微分方程,奇异的差分方程,算子理论,Markov链,密码学,迭代算法等方面[1-3]。

考虑如下分块矩阵

$$M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\tag{1}$$

其中:A 和 D 都是方阵。Campbell和Meyer在文[2]中首次提出关于寻求 M^D 的显式表达式问题。然而,这一问题至今也未完全解决,当子块矩阵满足一定条件时,许多学者都给出了此时 M^D 的计算公式。A 在矩阵 M 的广义Schur补 $S=D-CA^DB$ 在 M^D 的表达式中也扮演着非常重要的作用,尤其是当 S 可逆或 $S=0$ 时,这两种情况下的研究最多,见文献[3-12]。

为了证明本文的结论,需要以下引理。

引理1[13]　设 P、$Q\in C^{n\times n}$,记 $\mathrm{ind}(P)=r$,$\mathrm{ind}(Q)=s$。如果 $PQ=0$,则

$$(P+Q)^D=Q^{\pi}\sum_{i=0}^{s-1}Q^i(P^D)^{i+1}+\sum_{i=0}^{r-1}(Q^D)^{i+1}P^iP^{\pi}$$

引理2[14]　设 $M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & 0\end{pmatrix}$,$M$ 和 A 都为方阵,记 $\mathrm{ind}(A)=r$,$\mathrm{ind}(BC)=s$。

(i) 如果 $ABC=0$,则

$$M^D=\begin{pmatrix}XA & XB\\ CX & C[XA^D+(BC)^D(XA-A^D)]B\end{pmatrix}$$

其中:$X=(BC)^{\pi}\sum_{i=0}^{s-1}(BC)^i(A^D)^{2i+2}+\sum_{i=0}^{[\frac{r}{2}]}((BC)^D)^{i+1}A^{2i}A^{\pi}$。

(ii) 如果 $BCA=0$,则

收稿日期: 2013-11-15

基金项目: 江西省教育厅青年科学基金项目(GJJ13312)

作者简介: 刘喜富(1984—),男,讲师,博士,主要研究方向为矩阵与数值代数。

$$M^D=\begin{pmatrix} AY & YB \\ CY & C[A^DY+(AY-A^D)(BC)^D]B \end{pmatrix}$$

其中：$Y=A^{\pi}\sum_{i=0}^{[\frac{r}{2}]}A^{2i}((BC)^D)^{i+1}+\sum_{i=0}^{s-1}(A^D)^{2i+2}(BC)^i(BC)^{\pi}$ 。

接下来，给出本文的主要结论。

定理1　设 M 由（1）式给出，记 $T=A+A^DBC$ ，$W=AA^D+A^DBCA^D$ ，$\mathrm{ind}(A)=k$ ，$\mathrm{ind}(T)=r$ 和 $\mathrm{ind}(A^{\pi}BC)=s$ 。如果 $A^{\pi}BCA=0$ ，$S=0$ ，则

$$M^D=\begin{pmatrix} I & -A^DB \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} TY & YA^{\pi}B \\ CY & C[T^DY+(TY-T^D)(A^{\pi}BC)^D]A^{\pi}B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A^DB \\ 0 & I \end{pmatrix} \tag{2}$$

其中：$Y=T^{\pi}\sum_{i=0}^{[\frac{r}{2}]}T^{2i}((A^{\pi}BC)^D)^{i+1}+\sum_{i=0}^{s-1}(T^D)^{2i+2}(A^{\pi}BC)^i(A^{\pi}BC)^{\pi}$ 。

$$T^D=(WA)^D+\sum_{i=1}^{k}((WA)^D)^{i+1}A^DBCA^{i-1}A^{\pi} \tag{3}$$

$$T^{\pi}=(WA)^{\pi}-\sum_{i=0}^{k-1}((WA)^D)^{i+1}A^DBCA^iA^{\pi} \tag{4}$$

证明　由于 $S=0$ ，则 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & -A^DB \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T & A^{\pi}B \\ C & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A^DB \\ 0 & I \end{pmatrix}$ ，于是

$$M^D=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & -A^DB \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T & A^{\pi}B \\ C & 0 \end{pmatrix}^D\begin{pmatrix} I & A^DB \\ 0 & I \end{pmatrix} \tag{5}$$

根据假设可知 $A^{\pi}BCT=0$ ，由引理2-(ii)即可得到(2)式。

另一方面，$T=(AA^{\pi}+A^DBCA^{\pi})+(A^2A^D+A^DBCAA^D)\triangleq E+WA$ 。注意到 $EWA=0$ 且 $E^{k+1}=0$ ，因此，由引理1可得(3)、(4)式。证毕。

定理2　设 M 由（1）式给出，记 $T=A+A^DBC$ ，$W=AA^D+A^DBCA^D$ ，$\mathrm{ind}(A)=k$ ，$\mathrm{ind}(T)=r$ 和 $\mathrm{ind}(A^{\pi}BC)=s$ 。如果 $ABCA^{\pi}BC=0$ ，$AA^{\pi}BC=0$ ，$S=0$ ，则

$$M^D=\begin{pmatrix} I & -A^DB \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} XT & XA^{\pi}B \\ CX & C[XT^D+(A^{\pi}BC)^D(XT-T^D)]A^{\pi}B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A^DB \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

其中：$X=(A^{\pi}BC)^{\pi}\sum_{i=0}^{s-1}(A^{\pi}BC)^i(T^D)^{2i+2}+\sum_{i=0}^{[\frac{r}{2}]}((A^{\pi}BC)^D)^{i+1}T^{2i}T^{\pi}$ ，$T^D=(WA)^D+\sum_{i=1}^{k}((WA)^D)^{i+1}A^DBCA^{i-1}A^{\pi}$ 。$T^{\pi}=(WA)^{\pi}-\sum_{i=0}^{k-1}((WA)^D)^{i+1}A^DBCA^iA^{\pi}$ 。

证明　在(5)式中，根据假设有 $TA^{\pi}BC=0$ ，由引理2-(i)可得到此定理的结论。

下面考虑当 $S=0$ 时 M 的另外一种分解，即

$$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ CA^D & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{T} & B \\ CA^{\pi} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^D & I \end{pmatrix}$$

类似于定理1、定理2的方法，可以得到以下结论。

定理3　设 M 由（1）式给出，记 $\tilde{T}=A+BCA^D$ ，$W=AA^D+A^DBCA^D$ ，$\mathrm{ind}(A)=k$ ，$\mathrm{ind}(T)=r$ 和 $\mathrm{ind}(BCA^{\pi})=s$ 。如果 $ABCA^{\pi}=0$ ，$S=0$ ，则

$$M^D=\begin{pmatrix} I & 0 \\ CA^D & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X\tilde{T} & XB \\ CA^{\pi}X & CA^{\pi}[X\tilde{T}^D+(BCA^{\pi})^D(X\tilde{T}-\tilde{T}^D)]B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^D & I \end{pmatrix}$$

其中：$X=(BCA^{\pi})^{\pi}\sum_{i=0}^{s-1}(BCA^{\pi})^i(\tilde{T}^D)^{2i+2}+\sum_{i=0}^{[\frac{r}{2}]}((BCA^{\pi})^D)^{i+1}\tilde{T}^{2i}\tilde{T}^{\pi}$ ，$\tilde{T}^D=(AW)^D+A^{\pi}\sum_{i=1}^{k}A^{i-1}BCA^D((AW)^D)^{i+1}$ ，$\tilde{T}^{\pi}=$

$(AW)^{\pi}-A^{\pi}\sum_{i=0}^{k-1}A^{i}BCA^{D}((AW)^{D})^{i+1}$。

定 理 4 设 M 由（1）式给出，记 $\tilde{T}=A+BCA^{D}$，$W=AA^{D}+A^{D}BCA^{D}$，$\mathrm{ind}(A)=k$，$\mathrm{ind}(T)=r$ 和 $\mathrm{ind}(BCA^{\pi})=s$。如果 $BCAA^{\pi}=0$，$ABCA^{\pi}BC=0$，$S=0$，则

$$M^{D}=\begin{pmatrix}I & 0\\ CA^{D} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{T}Y & YB\\ CA^{\pi}Y & CA^{\pi}[\tilde{T}^{D}Y+(\tilde{T}Y-\tilde{T}^{D})(BCA^{\pi})^{D}]B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & 0\\ -CA^{D} & I\end{pmatrix}$$

其中：$Y=\tilde{T}^{\pi}\sum_{i=0}^{[\frac{r}{2}]}\tilde{T}^{2i}((BCA^{\pi})^{D})^{i+1}+\sum_{i=0}^{s-1}(\tilde{T}^{D})^{2i+2}(BCA^{\pi})^{i}(BCA^{\pi})^{\pi}$，$\tilde{T}^{D}=(AW)^{D}+A^{\pi}\sum_{i=1}^{k}A^{i-1}BCA^{D}((AW)^{D})^{i+1}$，$\tilde{T}^{\pi}=(AW)^{\pi}-A^{\pi}\sum_{i=0}^{k-1}A^{i}BCA^{D}((AW)^{D})^{i+1}$。

参考文献：

［1］WANG G R，WEI Y M，QIAO S Z. Generalized inverses：theory and computations［M］. Beijing：Science Press，2006:50-60.

［2］CAMPBELL S L，MEYER C D. Generalized Inverse of Linear Transformations［M］. Dover，New York，1991：282-328.

［3］HARTWIG R E，LI X Z，Wei Y M. Representations for the Drazin inverse of a 2×2 block matrix［J］. SIAM J Matrix Anal Appl，2006，27： 757-771.

［4］MARTINEZ-SERRANO M F，CASTRO GONZALEZ N. On the Drazin inverse of block matrices and generalized Schur complement［J］. Appl Math Comput，2009，215：2733-2740.

［5］CASTRO-GONZALEZ N，MARTINEZ-SERRANO M F. Drazin inverse of partitioned matrices in terms of Banachiewicz-Schur forms［J］. Linear Algebra Appl，2010，432：1691-1702.

［6］DENG C Y. A note on the Drazin inverses with Banachiewicz-Schur forms［J］. Appl Math Comput，2009，213：230-234.

［7］YANG H，LIU X F. The Drazin inverse of the sum of two matrices and its applications［J］. J Comput Appl Math，2011，235：1412-1417.

［8］LIU X F，YANG H. Improved results on the Drazin inverse of a 2×2 block matrix in terms of Banachiewicz-Schur forms［J］. FILOMAT，2013，27（1）：75-83.

［9］DENG C Y，WEI Y M. Representations for the Drazin inverse of 2×2 block-operator matrix with singular Schur complement［J］. Linear Algebra Appl，2011，435：2766-2783.

［10］LI X Z. A representation for the Drazin inverse of block matrices with a singular generalized Schur complement［J］. Appl. Math. Comput，2011，217：7531-7536.

［11］BU C J，FENG C C，BAI S Y. Representations for the Drazin inverses of the sum of two matrices and some block matrices［J］. Appl Math Comput，2012，218：10226-10237.

［12］BU C J，ZHANG C D. A note on the formulas for the Drazin inverse of the sum of two matrices［J］. Linear Algebra Appl，2013，439（3）：565-576.

［13］HARTWIG R E，WANG G R，WEI Y M. Some additive results on Drazin inverse［J］. Linear Algebra Appl，2001，322：207-217.

［14］DENG C Y，WEI Y M. A note on the Drazin inverse of an anti-triangular matrix［J］. Linear Algebra Appl，2009，431：1910-1922.

［15］陈俊，刘遵雄. 基于非负矩阵分解特征提取的垃圾邮件过滤［J］. 华东交通大学学报，2010，27（6）：75-79.

The Drazin Inverses of Block Matrices with Zero Generalized Schur Complement

Liu Xifu

(School of Basic Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: Considering the block matrix $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ with the generalized Schur complement $S=D-CA^{D}B=0$, we present several formulations for the Drazin inverses of M under some conditions.

Key words: Drazin inverse; block matrix; generalized Schur complement

(上接第16页)

Dynamic Performance Analysis of CRH5 Trailer

Liu Yu, Wang Zili

(State Key Laboratory of Traction Power, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031)

Abstract: Using multi-body dynamics software ADAMS / Rail, this paper establishes the dynamic simulation model of CRH5 trailer. Through a track incentive on the straight track, it analyzes the critical speed and the body's largest lateral and vertical acceleration. By analyzing derailment coefficient, axles load reduction rate and axle lateral force in the curves, it assess CRH5 trailer's curving capacity. The results show that the CRH5 trailer has sufficient operational stability, security, comfort and good curving performance.

Key words: CRH5 trailer ; dynamic analysis; critical speed ; operational stability