DOI:10.16749/j.cnki.jecjtu.2014.02.014

文章编号:1005-0523(2014)02-0079-07

双曲抛物面薄壳屋盖的制作与设计

刘平安,廖小东,程雯玉,王 铨

(华东交通大学机电工程学院,江西 南昌 330013)

摘要:为了方便双曲抛物面薄壳屋盖的制作,采用数学建模的方法对双曲抛物面薄壳屋盖进行理论计算,得到了直母线钢筋数以及直母线钢筋在空间的位置、锚固面方程以及与直母线交点、直母线之间的交点和直母线与锚固面的法线之间夹角的数学表达式。利用Matlab软件经过实例计算验证了其有效性,为今后双曲薄壳屋盖的制作提供了理论依据。

关键词:双曲薄壳屋盖 ;数学建模;预应力钢筋 ;锚固面

中图分类号:TU33+5 **文献标志码:**A

随着建筑结构设计理论、设计手段及施工水平的不断提高,新的建筑型式不断出现。用钢筋混凝土浇筑的双曲抛物面薄壳屋盖具有利于排水、不易渗漏、节约材料、刚度较大、造型优美等优点,可以用于厂房、商场、影剧院等民用建筑[1]。许多学者对双曲抛物薄壳屋盖的设计、施工和风压的分布等进行了研究[2-5]。但薄壳结构的设计计算难度较大,施工复杂,对设计及施工技术要求较高。若能在制作前能为配筋、锚固面位置的确定等进行相关理论计算,将为双曲薄壳屋盖的制作带来切实的方便。

如图1为双曲抛物面薄壳屋盖示意图。

1 直母线钢筋数与空间位置直线方程

如图2所示的双曲抛物面又称马鞍面,其数学方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$$

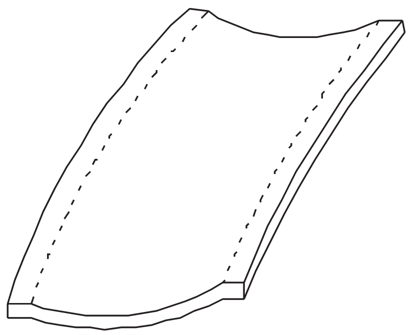

图1 双曲抛物面薄壳屋盖

Fig. 1 Hyperbolic paraboloid shell roof

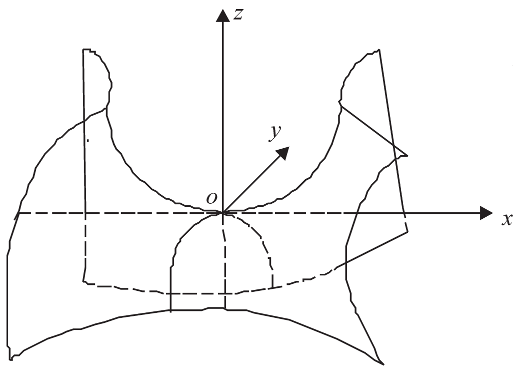

图2 双曲抛物面

Fig. 2 Hyperbolic paraboloid

收稿日期: 2013-07-01

基金项目: 江西省科技支撑计划项目(20122BBE500041)

作者简介: 刘平安(1962—),男,教授,博士,研究方向为机械设计、机构学、机器人机构学。

式中：x，y，z 是直角坐标系3个坐标轴方向上的变量；a，b 是常数。

作为屋盖的双曲抛物面其长度方向必须是上凸的，而在宽度方向有相对小的凹曲。在双曲抛物面薄壳上建立适当的坐标系，如图3所示。

把预应力钢筋自中断面（$y=0$ 的截面，截线为抛物线 $z=f_x\left(\frac{x}{a}\right)^2$）原点 $(0,0,0)$ 往两边沿马鞍面的两族直母线配筋后再浇注混凝土或树脂。配筋布置如图4所示，图中 a 为板宽之半；b 为屋盖长度之半；f_x 为横向下挠高度；f_y 为纵向上拱高度。

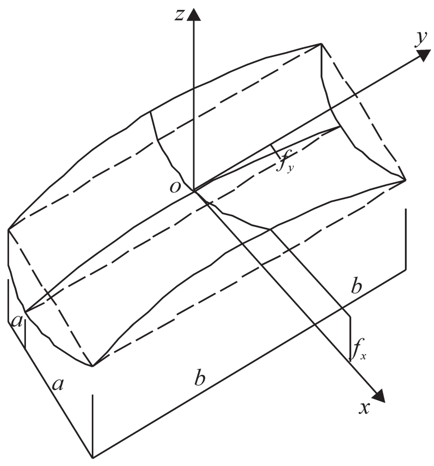

图3 双曲抛物面薄壳坐标系的建立

Fig. 3 The coordinate system of hyperbolic paraboloid shell

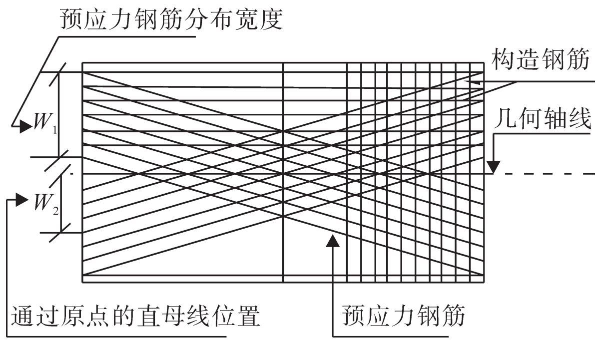

图4 马鞍面薄壳配筋在 x-y 平面投影

Fig. 4 Projection of saddle shell reinforcement in the x-y plane

预应力钢筋可以理想化为一维的直线。把预应力钢筋安置在两族直母线处，即在跨中端面处抛物线上的点 $\left(k\Delta x,\ f_x\left(\frac{k\Delta x}{a}\right)\right)$（$k$ 取正整数，Δx 为预应力钢筋之间的间距）处安放两族直母线钢筋（如图4所示的两组斜直线。从空间看，由于双曲抛物面薄壳的特点，同族直母线钢筋之间并不平行）。设过原点的两条直母线为主直母线，主直母线与平面 $y=\pm b+l_1$（l_1：挑檐长度）相交的点处的垂线为锚固面，两族直母线钢筋均固定在锚固面上。

对双曲抛物面薄壳进行分析，其方程为

$$z(x,y)=\begin{cases} f_x\left(\dfrac{x}{a}\right)^2-f_y\left(\dfrac{y}{b}\right)^2 \\ |x|\leqslant a,|y|\leqslant b \end{cases} \tag{1}$$

通过计算可得两族直母线方程为

$$\text{第1族}\begin{cases} \dfrac{\sqrt{f_x}}{a}x-\dfrac{\sqrt{f_y}}{b}y=\sqrt{2}\,v \\ v\left(\dfrac{\sqrt{2f_x}}{a}x+\dfrac{\sqrt{2f_y}}{b}y\right)=z \end{cases} \tag{2}$$

$$\text{第2族}\begin{cases} \dfrac{\sqrt{f_x}}{a}x+\dfrac{\sqrt{f_y}}{b}y=\sqrt{2}\,u \\ u\left(\dfrac{\sqrt{2f_x}}{a}x-\dfrac{\sqrt{2f_y}}{b}y\right)=z \end{cases} \tag{3}$$

u,v 为对应于每一族直母线（如图5所示）的常数[6-7]。

将给定点 $\left(k\triangle x, 0, f_x(k\Delta x/a)^2\right)$ 代入直母线方程(2)可得经过该点的直母线在端部 $(y=b)$ 的坐标

$$\left(k\Delta x + a\sqrt{\frac{f_y}{f_x}},\ b,\ f_x\left(\frac{k\Delta x}{a}\right)^2 + \frac{2(k\Delta x)\sqrt{f_x f_y}}{a}\right)(0 \leqslant x \leqslant a) \quad (4)$$

将上述端点坐标中 $x = k\Delta x + a\sqrt{\frac{f_y}{f_x}}$ 代入不等式(4)可得

$$0 \leqslant k \leqslant \frac{a - a\sqrt{\frac{f_y}{f_x}}}{\Delta x} \quad (5)$$

(k 取最大且为非负整数)

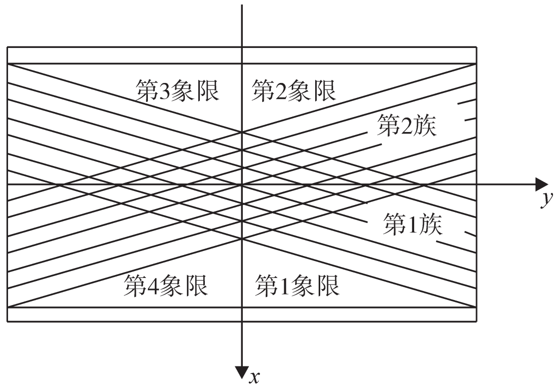

图5　直母线投影到 x–o–y 平面

Fig. 5　Projected straight generatrix in the x–o–y plane

k 为从 W_1 中间向 x 增大方向开始对直母线钢筋的编号数。根据对称性可知最多可安排 $2(2k+1)$ 根过点所要求直母线钢筋。

2　锚固面方程以及与直母线交点的求解

直母线过点 $A\left(k\Delta x,\ 0,\ f_x\left(\frac{k\Delta x}{a}\right)^2\right)$,将点 A 坐标代入式(2),得 $v = \frac{\sqrt{f_x}k\Delta x}{\sqrt{2}a}$,同理可求得 u 。

根据主直母线的定义求解其方程为

$$\xi x - \eta y = v \quad (6)$$

式中:$\xi = \frac{\sqrt{f_x}}{a}$;$\eta = \frac{\sqrt{f_y}}{b}$;$v$ 为对应每一族直母线的常数。

根据锚固面的定义可知两条主直母线共有4个锚固面,其中两两相交在直母线两端分别形成一个折线型面。如图6所示,n_1,n_2 为两条锚固面直线。

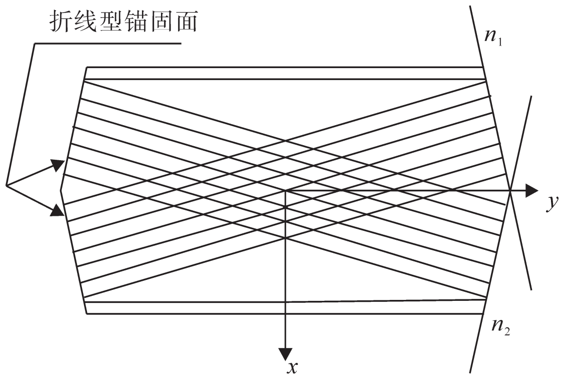

图6　锚固面与锚固面直线示意

Fig. 6　Schematic diagram of anchorage and anchoring line

直线方程:$y = \pm b \pm l_1$ 与方程(6)的其中一个交点为

$$M\left(\frac{a(b \pm l_1)}{b}\frac{\sqrt{f_y}}{\sqrt{f_x}},\ b + l_1,\ 0\right)$$

则通过 M 点在第1,2,3,4象限的锚固面方程分别为

$$\xi x + \eta y = \left(\frac{\eta^2 + \xi^2}{\xi}\right)(l_1 + b) \quad (7)$$

$$-\xi x + \eta y = \left(\frac{\eta^2 + \xi^2}{\xi}\right)(b + l_1) \quad (8)$$

$$\xi x + \eta y = \left(\frac{\eta^2 + \xi^2}{\xi}\right)(-l_1 - b) \quad (9)$$

$$-\xi x + \eta y = \left(\frac{\eta^2 + \xi^2}{\xi}\right)(-l_1 - b) \quad (10)$$

联立(1)(2)(7)共3个方程可求第1象限的锚固面与直母线的交点为

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\eta d+\sqrt{2}\xi v}{\xi^2+\eta^2} \\ &y_1=\frac{\xi d-\sqrt{2}\eta v}{\xi^2+\eta^2} \\ &z_1=\frac{\xi^2(\eta d+\sqrt{2}\xi v)^2}{a(\xi^2+\eta^2)^2}-\frac{\eta^2(\xi d-\sqrt{2}\eta v)^2}{b(\xi^2+\eta^2)^2} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

同理可取得其它3象限交点为

$$\left.\begin{aligned} &x_2=\frac{-\eta d+\sqrt{2}\xi v}{\xi^2+\eta^2} \\ &y_2=\frac{\xi d+\sqrt{2}\eta v}{\xi^2+\eta^2} \\ &z_2=\frac{\xi^2(\eta d+\sqrt{2}\xi v)^2}{a(\xi^2+\eta^2)^2}-\frac{\eta^2(\xi d-\sqrt{2}\eta v)^2}{b(\xi^2+\eta^2)^2} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} &x_3=\frac{\eta d_1+\sqrt{2}\xi v}{\xi^2+\eta^2} \\ &y_3=\frac{\xi d_1-\sqrt{2}\eta v}{\xi^2+\eta^2} \\ &z_3=\frac{\xi^2(\eta d_1+\sqrt{2}\xi v)^2}{a(\xi^2+\eta^2)^2}-\frac{\eta^2(\xi d_1-\sqrt{2}\eta v)^2}{b(\xi^2+\eta^2)^2} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} &x_4=\frac{-\eta d_1+\sqrt{2}\xi v}{\xi^2+\eta^2} \\ &y_4=\frac{\xi d_1+\sqrt{2}\eta v}{\xi^2+\eta^2} \\ &z_4=\frac{\xi^2(\eta d_1-\sqrt{2}\xi v)^2}{a(\xi^2+\eta^2)^2}-\frac{\eta^2(\xi d_1+\sqrt{2}\eta v)^2}{b(\xi^2+\eta^2)^2} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

锚固面方程系数d,d_1为

$$d=\frac{(\xi^2+\eta^2)}{\xi(b+l_1)}，\quad d_1=\frac{(\xi^2+\eta^2)}{\xi(-b-l_1)}$$

3 直母线之间的交点求解

首先证明异族的任何二直母线共面但不重合(即必相交),根据两簇直母线方程可以用变量表示交点坐标x，y和z[8]。

设双曲抛物面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

它的两族直母线方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2u \\ u\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)=z\end{cases} \text{与} \begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=2v \\ v\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)=z\end{cases}$$

以上4个直母线方程的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 & -2u \\ \frac{u}{a} & -\frac{v}{b} & -1 & 0 \\ \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & 0 & -2v \\ \frac{v}{a} & \frac{v}{b} & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & u \\ u & -u & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & v \\ v & v & 1 & 0 \end{vmatrix} \frac{2}{ab} = \frac{4}{ab} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & u \\ u & -u & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & v \\ 0 & v & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{4}{ab}\left[u(v+u) - u(v+u)\right] = 0$$

由此可知双曲抛物面的异族二直母线必共面。取第1族直母线的方向矢量为 $\boldsymbol{b}_1 = \{-a, b, -2u\}$,第2族直母线的方向矢量为 $\boldsymbol{b}_2 = \{-a,\ b,\ 2v\}$ 。因为 $\boldsymbol{b}_1$ 与 $\boldsymbol{b}_2$ 不平行,所以异族二直母线不平行。双曲抛物面的异族二直母线既然共面,而且又不平行,所以它们必相交。

根据两族直母线方程可求得 x , y 坐标表达式

$$x = a\frac{v+u}{\sqrt{2f_x}} \tag{15}$$

$$y = b\frac{v-u}{\sqrt{2f_y}} \tag{16}$$

将 (x,y) 坐标代入方程(1)中,可以求得

$$z = 2uv$$

4　直母线和锚固面的法线之间夹角求解

第一个锚固面的平面法向量为: $\boldsymbol{n}_1 = \left(\frac{\sqrt{f_y}}{b}, \frac{\sqrt{f_x}}{a}, 0\right)$,第一族直母线方向矢量为: $\boldsymbol{s}_1 = \left(\frac{a}{2v\sqrt{2f_x}}, \frac{b}{2v\sqrt{2f_y}}, 1\right)$,两向量的夹角余弦为 $\cos(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{s}_1)$,第一个锚固面平面法向量与直母线方向矢量的夹角为

$$\arccos\left(\frac{a^2\sqrt{f_y} + b^2\sqrt{f_x}}{\sqrt{(a^2 f_y + b^2 f_x)(a^2 f_y + b^2 f_x + 8v^2 f_y f_x)}}\right) \tag{17}$$

因为直母线具有对称性,其与锚固面的夹角相同,同理可知其余夹角参数。

5　计算实例

5.1　相关参数

这里选用文献[1]中的相关参数如下:

$f_x = 0.6\ \mathrm{m}$, $f_y = 0.26\ \mathrm{m}$; a 为板宽之半, $a = \frac{A}{2}$, $A = 2.74\ m$; b 为屋盖长度之半, $b = \frac{L}{2}$; $L = 15\ m$; δ 为屋盖的垂直厚度, $0.05\ m$; $l_1 = 0.8\ m$; Δx 为钢筋之间的间距, $0.1\ m$ 。

5.2　具体计算

1)将相关数据代入(5)式中得 $0 \leqslant k \leqslant 4.6816$,取正整数得 $\mathrm{Max}\ (k)=4$, $2(2k+1)=18$ 。

2)在 W_1 宽度中9条直母线公式中的所对应的 v 的值为

$[v]$=[−0.159 9　−0.119 9　−0.080 0　−0.040 0　−　0.040 0　0.080 0　0.119　0.159 9],另外一族9条直母线的 v 值与上面的值对应。利用MATLAB[9]计算9条直母线与锚固面的交点坐标值如表1所示。

3)异族直母线之间的交点限于文章篇幅,只例举 x 的坐标值如表2, y , z 坐标值同样可计算得到。

表1 直母线与锚固面的交点坐标

Tab.1 The intersection points of straight generatrix and anchorage

象限	坐标	1	2	3	4	5	6	7	8	9
第1象限	x_1	0.604	0.702	0.801	0.900	0.998	1.097	1.195	1.294	1.392
	y_1	8.347	8.336	8.324	8.312	8.300	8.288	8.276	8.264	8.253
	z_1	−0.206	−0.164	−0.115	−0.061	0.000	0.067	0.140	0.219	0.305
第2象限	x_2	−1.392	−1.294	−1.195	−1.097	−0.998	−0.890	−0.801	−0.702	−0.604
	y_2	1.392	1.294	1.195	1.097	0.998	0.890	0.801	0.702	0.604
	z_2	0.305	0.219	0.140	0.067	0.000	−0.061	−0.005	−0.164	−0.206
第3象限	x_3	−1.392	−1.294	−1.195	−1.097	−0.998	−0.900	−0.801	−0.702	−0.604
	y_3	−1.392	−1.294	−1.195	−1.097	−0.998	−0.900	−0.801	−0.702	−0.604
	z_3	0.305	0.219	0.140	0.067	0.000	−0.061	−0.115	−0.164	−0.206
第4象限	x_4	0.604	0.702	0.801	0.900	0.998	1.097	1.195	1.294	1.392
	y_4	−8.347	−8.336	−8.324	−8.312	−8.300	−8.288	−8.276	−8.264	−8.253
	z_3	−0.206	−0.164	−0.115	−0.061	0.000	0.067	0.140	0.219	0.305

注:每一行的值表示其中一族9条直母线一端与锚固面的交点值。

表2 异族直母线之间的交点x的坐标值

Tab. 2 x coordinates of the intersection between 2 groups of straight generatrix

x_{1j}	x_{2j}	x_{3j}	x_{4j}	x_{5j}	x_{6j}	x_{7j}	x_{8j}	x_{9j}
−0.40	−0.35	−0.30	−0.25	−0.20	−0.15	−0.10	−0.05	0
−0.35	−0.30	−0.25	−0.20	−0.15	−0.10	−0.05	0	0.050
−0.30	−0.25	−0.20	−0.15	−0.10	−0.05	0	0.050	0.100
−0.25	−0.20	−0.15	−0.10	−0.05	0	0.050	0.100	0.150
−0.20	−0.15	−0.10	−0.05	0	0.050	0.100	0.150	0.200
−0.15	−0.10	−0.05	0	0.050	0.100	0.150	0.200	0.250
−0.10	−0.05	0	0.050	0.100	0.150	0.200	0.250	0.300
−0.05	0	0.050	0.100	0.150	0.200	0.250	0.300	0.350
0	0.050	0.100	0.150	0.200	0.250	0.300	0.350	0.400

注:x_{1j}表示其中一族中的1条直母线与另一族9条直母线的交点值,其他类似。

6 结语

通过研究,得出如下结论:

双曲抛物面薄壳的直母线钢筋数除与板宽之半和间距有关外,还与横向下挠和纵向上拱高度有关;从锚固面的直线方程与相关布置方案(图6)可知,左、右边的两条锚固面的直线方程关于原点对称,而且它们与直母线的交点也有类似的规律;直母线之间的交点坐标值都与直母线方程中的常数u,v有关,而直母线和锚固面的法线之间的夹角是板宽之半、长度之半、横向下挠和纵向上拱高度的函数。文中所得到的一系列配筋表达式,对于设计自重轻、耗材少、受力性能好、刚度大的双曲抛物面薄壳屋盖具有重要参考价值,且可以缩短设计周期和有效提高设计质量和效率。

参考文献：

[1] 江西省人民政府学位办. 2012年江西省研究生数学建模A题[EB/OL]. (2012-05-26) [2013-07-01]. http://xwyyjs.jxedu.gov.cn.

[2] 刘强.健康-绿色-可持续性-当今建筑设计的发展趋势[J]. 华东交通大学学报,2002,19(4):25-27.

[3] 高尚,李建明,刘凤奎. 清水混凝土双曲面薄壳模板施工[J]. 山西建筑,2011,37(28):87-88.

[4] 齐志刚,张希黔,周飞.大跨度双曲混凝土双曲组合扭壳屋盖表面风压系数试验研究[J].四川建筑科学研究,2011,37(6) :52-55.

[5] 魏军扬,王保田,张海霞,等.加筋土筋土界面特性分离式试验研究[J]. 华东交通大学学报,2013,30(5):57-58.

[6] RENA DING, YAN ZHANG. Dual space drawing methods for ruled surfaces with particular shapes[J]. International Journal of Computer Science and Network Security,2006,6(1A):4-12.

[7] 江晓红, 宋 彦.基于空间仿射对应点列的双曲抛物面三维构建及分析[J].图学学报, 2012,33(5):25-27.

[8] 姜永艳,钱德亮,张喆.单叶双曲面中异族直母线之间的关系[J].宜春学院学报, 2012,34(4):13-14.

[9] 宋叶志,贾东永.MATLAB数值分析与运用[M].北京:机械工业出版社, 2009:266-288.

Production and Design of Hyperbolic Paraboloid Shell Roof

Liu Ping'an ,Liao Xiaodong ,Cheng Wenyu ,Wang Quan

(School of Mechatronical Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: Aiming at the production of hyperbolic paraboloid shell roof, this paper adopts the mathematical modeling of hyperbolic paraboloid shell roof for theoretical calculation. It obtains the straight generatrix steel number, the position of the straight generatrix steel, anchoring surface equation in space, the intersection between rectilinear and straight generatrix and the mathematic expression of the angle between the generatrix and anchorage. Through the Matlab software, calculation results verify the effectiveness of the proposed model, which may provide a theoretical basis for the future production of hyperbolic shell roof.

Key words: hyperbolic shell roof; mathematical modeling; prestressed reinforcement; anchor surface