DOI:10.16749/j.cnki.jecjtu.2014.04.021

第31卷第4期 2014年8月 华东交通大学学报 Journal of East China Jiaotong University Vol. 31 No. 4 Aug., 2014

文章编号: 1005-0523(2014)04-0044-10

闭环系统辨识的模型结构检验

王建宏[1,2],熊朝华[1]

(1.中国电子科技集团公司第二十八研究所,江苏 南京 210007;2.景德镇陶瓷学院机电学院,江西 景德镇 333403)

摘要: 对于闭环系统辨识的模型结构检验问题,在预测误差辨识法的前提下,从参数估计的统计特性中推导出两概率模型不确定性边界及最优的输入滤波器形式。概率边界及输入滤波器是基于参数估计的渐近正态分布的方差矩阵,该方差矩阵由采样数据估计而得。根据未知参数的渐近方差矩阵内积形式从概率统计意义上构造模型参数及互相关函数的不确定性边界,从优化的角度推导输入滤波器的选取形式。最后用仿真算例验证本文辨识方法的有效性。

关键词: 闭环系统辨识;模型不确定;模型结构检验;输入滤波器

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

对于闭环系统中控制器的设计可采用两种策略,即基于模型的设计和基于数据驱动的直接设计。基于模型的首要前提是采用系统辨识的方法来建立闭环系统中被控对象的数学模型,以此数学模型作为下步控制器设计的模型基础。而基于数据驱动的直接设计却是绕开建模过程,直接采用闭环条件下得到的输入输出量来设计控制器。因目前采用最多的仍是基于模型的控制设计方法,故需对闭环系统的辨识展开大量的研究工作。对于闭环系统的辨识,目前的工作都集中在模型结构、参数辨识和试验设计,而对于闭环系统的模型结构检验研究的甚少。常见的闭环系统模型结构、参数辨识方法主要可分为直接法、间接法和联合输入输出法。直接法忽略反馈的存在,直接用被控对象的输入输出量来辨识模型;间接法则考虑反馈的作用,利用整个闭环系统的输入输出量来辨识模型;而联合输入输出法可看作间接法的一种改进。关于闭环系统辨识策略的详细研究可参考文献[1]。文献[2]在时域中对整个系统辨识领域的研究进行了具体介绍;文献[3]在频域中研究多种模型的辨识,针对频域中的各个目标准则函数,提出采用优化算法求解未知参数值。文献[4]提出一种新的虚拟闭环辨识法,通过构造两个虚拟控制器来参数化系统模型,推广了对偶-尤拉方法在闭环辨识中的使用。文献[5]在预测误差递推辨识算法的基础上,提出闭环辨识的投影算法,并分析该投影算法在何条件下可得到参数估计的渐近性和一致性。文献[6]从工程应用实践中分析当整个闭环系统具有多个输入量时,是否可通过施加其中的部分输入量来辨识闭环系统。文献[7]从系统辨识的角度分析闭环系统辨识与闭环控制间的紧密联系,使得闭环控制器的设计可转化为某些参数的自适应辨识。文献[8]利用线性矩阵不等式来描述闭环系统辨识的最优输入信号设计问题。文献[9]分析闭环系统辨识的最小代价问题,利用凸优化理论来求解此锥规划问题。文献[10]引入鲁棒控制中的H∞范数来作为输入信号设计时的准则函数,在H∞范数下衡量估计模型与标定模型间的不确定性。文献[11]从参数估计的渐近性角度分析闭环系统输入信号设计的选择问题。文献[12]分析闭环系统的可持续性激励,分析在存在时延条件下怎样得到持续激励和充分丰富的激励?文献[13]考虑闭环辨识在自适应控制中的应用,分离出闭环辨识的偏差项和方差项。文献[14]研究在有限采样数据个数下,提出利用关于已知

收稿日期: 2014-05-13

基金项目: 江西省教育厅科学基金项目(GJJ13638)

作者简介: 王建宏(1980—),男,副教授,博士后,主要研究方向为系统辨识与凸优化。

极点的正交核函数来替换传统模型参数个数，可得到较为精确的近似方差矩阵式。

对闭环系统辨识的模型结构检验目前未有论文涉及，文献[2]和[15]针对的是开环系统的模型结构检验问题，提出标准的互相关检验法，即检验预测误差与输入量间的互相关矩阵在统计概率意义下的置信估计区间，开环系统由其结构简单性而极大地简化了方差矩阵的推导。而在工程中，对于模型结构检验的有效策略是对原系统再次做相同试验。对原系统施加一组新输入量，比较其实际输出量是否与辨识模型下的输出量相一致？虽这种检验方法易于简单直观，但无法在定量上分析辨识模型的准确度及可信性。为从定量上体现辨识准确度，采用统计概率框架，推导闭环系统辨识中未知参数的方差矩阵，将其表示成内积形式，以此形式建立未知参数估计值的一个不确定性边界即置信区间估计，从而形成闭环系统辨识中模型参数估计的置信区域检验。通过分析闭环系统输出预测误差与输入间的互相关函数，将模型结构检验问题转化为假设检验问题。构造关于互相关函数的一个概率分布，以保证原假设检验问题的非伪性。因任意的输入信号都可改写成一个白噪声信号通过一个成形输入滤波器而得到，为保证闭环系统输出预测与实际输出值间的接近程度，对于此输入滤波器的选择设计问题，采用一个优化问题的求解来设计输入滤波器。因输入滤波器从表示形式上就代表着输入信号，而输入信号在辨识过程中要选择恰当，要能充分持续激励原闭环系统被辨识出来，从而输入滤波器的选择是整个模型结构检验的首要步骤。

1　问题描述

考虑如下带有输出反馈的实际闭环系统：

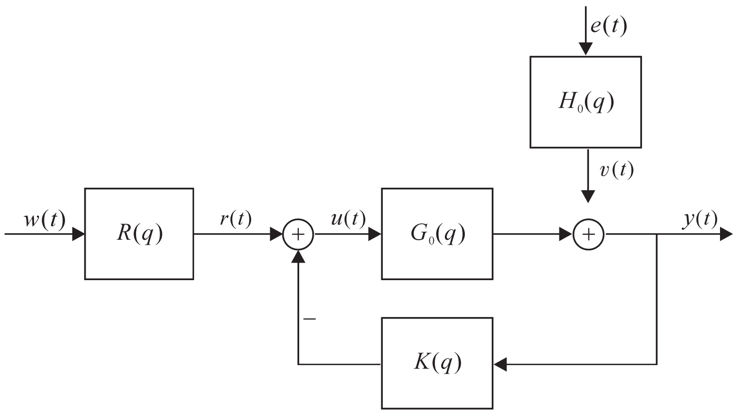

图1　闭环系统结构框图

Fig. 1　The closed loop system structure

图1中对象模型 $G_0(q)$ 和噪声滤波器 $H_0(q)$ 均为线性时不变的传递函数，$K(q)$ 为稳定的线性时不变控制器，驱动信号 $r(t)$ 和外界干扰 $e(t)$ 为互不相关，$e(t)$ 为零均值的白噪声，其方差为 λ_0。$v(t)$ 为白噪声 $e(t)$ 通过噪声滤波器 $H_0(q)$ 后形成的有色噪声。$u(t)$ 和 $y(t)$ 分别为被控对象 $G_0(q)$ 的输入输出信号。将 $r(t)$ 改写为零均值、方差为1的白噪声 $w(t)$ 通过输入滤波器 $R(q)$ 而得到。$R(q)$ 为关于 $r(t)$ 的稳定非最小相位的功率谱因子，q 为时延算子，即存在 $qu(t)=u(t+1)$。由于 $r(t)=R(q)w(t)$，可得 $r(t)$ 的功率谱密度为

$$\phi_r(w)=R(q)R^*(q)\phi_w(w)=\left|R(q)\right|^2 \tag{1}$$

上式表明任何输入信号都可通过对一零均值的白噪声 $w(t)$ 施以滤波器 $R(q)$ 而生成获取。对于图1所示的闭环系统结构框图，可得其函数关系式为

$$y(t)=G_0(q)R(q)w(t)-G_0(q)K(q)y(t)+H_0(q)e(t)$$

进行简单和类似的整理可得：

$$\left.\begin{aligned} y(t)&=\frac{G_0(q)R(q)}{1+G_0(q)K(q)}w(t)+\frac{H_0(q)}{1+G_0(q)K(q)}e(t)\\ u(t)&=\frac{R(q)}{1+G_0(q)K(q)}w(t)-\frac{K(q)H_0(q)}{1+G_0(q)K(q)}e(t)\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

记敏感函数为

$$S_0(q)=\frac{1}{1+G_0(q)K(q)}$$

从而闭环系统的输出量 $y(t)$ 可改写为

$$y(t)=G_0(q)R(q)S_0(q)w(t)+H_0(q)S_0(q)e(t)$$

2 模型参数的置信区域检验

在真实的闭环系统结构中引入未知参数，即(2)式对应的参数化形式为

$$y(t,\boldsymbol{\theta})=\frac{G(q,\boldsymbol{\theta})R(q)}{1+G(q,\boldsymbol{\theta})K(q)}w(t)+\frac{H(q,\boldsymbol{\theta})}{1+G(q,\boldsymbol{\theta})K(q)}e(t) \tag{3}$$

式中：θ 表示未知参数矢量，其分别存在于参数化的系统模型 $G(q,\boldsymbol{\theta})$ 和噪声模型 $H(q,\boldsymbol{\theta})$ 之中。闭环系统辨识的目的在于：从一组给定的观测数据集 $Z^N=\left\{y(t),u(t)\right\}_{t=1}^{N}$ 中辨识出未知参数矢量估计值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N$，其中 N 表示观测数据总个数。(3)式对应的一步前向预测输出值为

$$\hat{y}(t,\boldsymbol{\theta})=\frac{G(q,\boldsymbol{\theta})R(q)}{H(q,\boldsymbol{\theta})}w(t)+\frac{H(q,\boldsymbol{\theta})-1-G(q,\boldsymbol{\theta})K(q)}{H(q,\boldsymbol{\theta})}y(t) \tag{4}$$

计算一步前向预测误差或残差为

$$\varepsilon(t,\boldsymbol{\theta})=y(t)-\hat{y}(t,\boldsymbol{\theta})=\frac{1+G(q,\boldsymbol{\theta})K(q)}{H(q,\boldsymbol{\theta})}\left[y(t)-\frac{G(q,\boldsymbol{\theta})R(q)}{1+G(q,\boldsymbol{\theta})K(q)}w(t)\right] \tag{5}$$

在标准预测误差辨识中，利用数据长度为 N 的观测数据对 $Z^N=\left\{y(t),u(t)\right\}_{t=1}^{N}$ 得到如下辨识参数矢量

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_N=\arg\min_{\theta}V_N(\boldsymbol{\theta},Z^N)=\arg\min_{\theta}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varepsilon^2(t,\boldsymbol{\theta}) \tag{6}$$

渐近极限参数估计值 $\boldsymbol{\theta}^*$ 定义为

$$\boldsymbol{\theta}^*=\arg\min_{\theta}\lim_{N\to\infty}E\left\{V_N(\boldsymbol{\theta},Z^N)\right\}$$

其中：E 表示取数学期望运算。

在通常的辨识求解过程中，均假设存在一个真实的参数矢量 $\boldsymbol{\theta}_0$ 使得

$$G(q,\boldsymbol{\theta}_0)=G_0(q),\ H(q,\boldsymbol{\theta}_0)=H_0(q)$$

上式表明辨识模型属于所考虑的模型集中。在文献[2]有：参数估计值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N$ 的渐近方差矩阵式为

$$\operatorname{cov}\hat{\boldsymbol{\theta}}_N=\boldsymbol{\lambda}_0\langle\varphi,\varphi\rangle^{-1} \tag{7}$$

其中的 φ 定义为预测误差的负梯度，即

$$\varphi(t,\boldsymbol{\theta})=-\frac{\partial\varepsilon(t,\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}=\frac{\partial\hat{y}(t,\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}$$

因(7)式是系统辨识中渐近性分析的基本关系式。故联合(3)式和(5)式可得

$$\hat{y}(t,\boldsymbol{\theta})=\frac{G(q,\boldsymbol{\theta})R(q)}{H(q,\boldsymbol{\theta})}w(t)+\frac{H(q,\boldsymbol{\theta})-1-G(q,\boldsymbol{\theta})K(q)}{1+G(q,\boldsymbol{\theta})K(q)}R(q)w(t)+\frac{H(q,\boldsymbol{\theta})-1-G(q,\boldsymbol{\theta})K(q)}{1+G(q,\boldsymbol{\theta})K(q)}e(t) \tag{8}$$

将(8)式代入到(5)式并进行关于未知参数矢量 $\boldsymbol{\theta}$ 求偏导可得

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}(t,\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}=\left[\frac{G'(\boldsymbol{\theta})K}{H(\boldsymbol{\theta})[1+G(\boldsymbol{\theta})K]}-\frac{H'(\boldsymbol{\theta})}{H(\boldsymbol{\theta})}\right]e(t)-\left[\frac{G'(\boldsymbol{\theta})R}{H(\boldsymbol{\theta})}-\frac{G(\boldsymbol{\theta})RG'(\boldsymbol{\theta})K}{H(\boldsymbol{\theta})[1+G(\boldsymbol{\theta})K]}\right]w(t) \tag{9}$$

利用 $e(t)$ 和 $w(t)$ 间的不相关性有

$$Ee(t)\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)=0$$

在(9)式中提出一个 $H(\boldsymbol{\theta})$ 出来后,(9)式可改写为

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}(t,\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}=\frac{1}{H(\boldsymbol{\theta})}\Big(\big[G'(\boldsymbol{\theta})KS(\boldsymbol{\theta})-H'(\boldsymbol{\theta})\big]e(t)-\big[G'(\boldsymbol{\theta})R-G(\boldsymbol{\theta})RG'(\boldsymbol{\theta})S(\boldsymbol{\theta})K\big]w(t)\Big) \tag{10}$$

(10)式中利用参数化的敏感函数

$$S(\boldsymbol{\theta})=\frac{1}{1+G(\boldsymbol{\theta})K}$$

且存在如下的关系式成立

$$R-G(\boldsymbol{\theta})RKS(\boldsymbol{\theta})=R\left[1-\frac{G(\boldsymbol{\theta})K}{1+G(\boldsymbol{\theta})K}\right]=\frac{R}{1+G(\boldsymbol{\theta})K}=RS(\boldsymbol{\theta})$$

继续将(10)式改写成矩阵的形式为

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}(t,\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}=\frac{1}{H(\theta)}\begin{bmatrix}G'(\boldsymbol{\theta}) & H'(\boldsymbol{\theta})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}KS(\boldsymbol{\theta})H(\boldsymbol{\theta}) & RS(\boldsymbol{\theta})\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e(t)\\ w(t)\end{bmatrix} \tag{11}$$

根据(7)式的渐近方差矩阵关系式可得

$$\left.\begin{aligned}&P_\theta=\operatorname{cov}\hat{\boldsymbol{\theta}}_N=\lambda_0\big[E\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{\theta}_0)\big]^{-1}=\langle\phi,\phi\rangle^{-1}\\&\phi=\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}H_0}\begin{bmatrix}G'(\boldsymbol{\theta}_0) & H'(\boldsymbol{\theta}_0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_0}KS_0H_0 & RS_0\\ -\sqrt{\lambda_0} & 0\end{bmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

其中:$G'(\boldsymbol{\theta})$ 和 $H'(\boldsymbol{\theta})$ 分别表示为

$$G'(\boldsymbol{\theta})=\frac{\partial G(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}},\quad H'(\boldsymbol{\theta})=\frac{\partial H(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}$$

以(12)式作为检验基础,渐近结果有

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_N\xrightarrow{N\to\infty}\boldsymbol{\theta}_0$$

即参数估计值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N$ 趋近于真实的参数值 $\boldsymbol{\theta}_0$,且参数估计误差收敛于一个高斯随机变量

$$\sqrt{N}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N-\boldsymbol{\theta}_0\right)\to\mathbb{N}(0,P_\theta),as\ N\to\infty$$

渐近结果可改写为二次形式,得到 λ^2 分布

$$N\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N-\boldsymbol{\theta}_0\right)^{\mathrm{T}}P_\theta^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N-\boldsymbol{\theta}_0\right)\xrightarrow{N\to\infty}\lambda_n^2 \tag{13}$$

其中:n 为 λ^2 分布中的自由度,此处可近似等于参数矢量中元素的个数。(13)式隐含着随机矢量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N$ 满足如下的一个不确定性边界

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_N\in D(\alpha,\boldsymbol{\theta}_0)=\left\{\boldsymbol{\theta}_0/N(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}_0)^{\mathrm{T}}P_\theta^{-1}(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}_0)\leqslant\lambda_{n,\alpha}^2\right\} \tag{14}$$

$\lambda_{n,\alpha}^2$ 对应 λ_n^2 分布中的概率水平 α,为表征 $\boldsymbol{\theta}_0$ 而不是 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N$ 的概率不确定性式,对于 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N$ 的每一个实现值成立

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_N\in D(\alpha,\boldsymbol{\theta}_0)\Leftrightarrow\boldsymbol{\theta}_0\in D\left(\alpha,\hat{\boldsymbol{\theta}}_N\right)$$

上式即意味着

$$\boldsymbol{\theta}_0\in D\left(\alpha,\hat{\boldsymbol{\theta}}_N\right)=\left\{\theta/N\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N-\boldsymbol{\theta}\right)^{\mathrm{T}}P_\theta^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N-\boldsymbol{\theta}\right)\leqslant\lambda_{n,\alpha}^2\right\}\quad \text{wi th}\quad \text{probability}\ \alpha \tag{15}$$

(14)式给出闭环系统辨识中未知参数矢量估计的置信区间，即 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N \in D(\alpha, \boldsymbol{\theta}_0)$ 的概率水平至少为 α 。

3 互相关函数的置信区域检验

输入激励信号 $w(t)$ 在统计概率框架下与闭环系统输出值预测误差的互相关函数要满足一定的概率水平，为此需要首先计算预测误差的具体表达式。由(5)式可知

$$\varepsilon(t,\boldsymbol{\theta}) = \frac{1+G(\boldsymbol{\theta})K}{H(\boldsymbol{\theta})}\left[\frac{G_0 R}{1+G_0 K}w(t) + \frac{H_0}{1+G_0 K}e(t) - \frac{G(\boldsymbol{\theta})R}{1+G(\boldsymbol{\theta})K}w(t)\right] \tag{16}$$

以参数估计值为前提的预测误差为

$$\begin{aligned}\varepsilon(t,\hat{\boldsymbol{\theta}}_N) = &\underbrace{\frac{1+G(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N)K}{H(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N)}\left[\frac{G_0 R}{1+G_0 K} - \frac{G(\boldsymbol{\theta}^*)R}{1+G(\boldsymbol{\theta}^*)K}\right]w(t)}_{A_1(t,G_0,\boldsymbol{\theta}^*)} + \underbrace{\frac{1+G(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N)K}{H(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N)}\left[\frac{G(\boldsymbol{\theta}^*)R}{1+G(\boldsymbol{\theta}^*)K} - \frac{G(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N)R}{1+G(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N)K}\right]w(t)}_{A_2(t,\hat{\boldsymbol{\theta}}_N,\boldsymbol{\theta}^*)} \\ \vdots \qquad &+ \underbrace{\frac{1+G(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N)K}{H(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N)}\frac{H_0}{1+G_0 K}e(t)}_{A_3(t,\hat{\boldsymbol{\theta}}_N,G_0,H_0)}\end{aligned} \tag{17}$$

(17)式中第1项 $A_1(t,G_0,H_0,\boldsymbol{\theta}^*)$ 对应由估计模型 $G(\boldsymbol{\theta}^*)$ 的渐近偏差项诱导所导致的残差信号部分；第2项 $A_2(t,\hat{\boldsymbol{\theta}}_N,\boldsymbol{\theta}^*)$ 表示由参数估计 $G(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N)$ 的方差项所导致的残差信号部分；第3项 $A_3(t,\hat{\boldsymbol{\theta}}_N,G_0,H_0)$ 对应观测噪声 $e(t)$ 对估计精度的影响，并可表示估计噪声模型 $H(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N)$ 中的建模误差。根据闭环系统结构框图及残差信号的表达式，闭环系统辨识的模型结构检验问题可转化为如下的假设检验问题

$$\gamma_0 \colon A_1(t,G_0,H_0,\boldsymbol{\theta}^*) = 0 \tag{18}$$

在输入信号持续激励的条件下，该假设检验成立的条件为

$$\frac{G(\boldsymbol{\theta}^*)}{1+G(\boldsymbol{\theta}^*)K} = \frac{G_0}{1+G_0 K} \Rightarrow \boldsymbol{\theta}^* = \boldsymbol{\theta}_0$$

在 γ_0 成立的条件下，预测误差 $\varepsilon(t,\hat{\boldsymbol{\theta}}_N)$ 可退化成如下仅含有两项的残差项

$$\varepsilon_1(t,\hat{\boldsymbol{\theta}}_N) = A_2(t,\hat{\boldsymbol{\theta}}_N,\boldsymbol{\theta}^*) + A_3(t,\hat{\boldsymbol{\theta}}_N,G_0,H_0) \tag{19}$$

计算该残差项与输入间的采样互相关函数为

$$\hat{R}_{\varepsilon_1 w}(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varepsilon_1(t,\hat{\boldsymbol{\theta}}_N)w(t-\tau),\ \tau = 0,\cdots,n-1$$

n 为可自由选择的一个参数值，此处仍可选择为参数矢量中元素的个数。定义如下的矢量：

$$\hat{\boldsymbol{R}}_{\varepsilon_1 w} = \begin{bmatrix}\hat{R}_{\varepsilon_1 w}(0) & \hat{R}_{\varepsilon_1 w}(1) & \cdots & \hat{R}_{\varepsilon_1 w}(n-1)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

将上式进行重新整理可得

$$\hat{\boldsymbol{R}}_{\varepsilon_1 w} = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} w(1) & w(2) & \cdots & w(N) \\ 0 & w(1) & \cdots & w(N-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w(N-n+1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1(1,\hat{\boldsymbol{\theta}}_N) \\ \varepsilon_1(2,\hat{\boldsymbol{\theta}}_N) \\ \vdots \\ \varepsilon_1(N,\hat{\boldsymbol{\theta}}_N)\end{bmatrix}$$

利用假设条件中 $e(t)$ 和 $w(t)$ 之间是互不相关，且由(17)式可知上式可简化为

$$\left.\begin{aligned}&\hat{\boldsymbol{R}}_{\varepsilon_1 w}=\begin{bmatrix}\hat{R}_{\varepsilon_1 w}(0)\\ \hat{R}_{\varepsilon_1 w}(1)\\ \vdots\\ \hat{R}_{\varepsilon_1 w}(n-1)\end{bmatrix}=\frac{A_4}{N}\begin{bmatrix}w(1) & w(2) & \cdots & w(N)\\ 0 & w(1) & \cdots & w(N-1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & w(N-n+1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w(1)\\ w(2)\\ \vdots\\ w(N)\end{bmatrix}=\frac{A_4}{N}\begin{bmatrix}N\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}=A_4\begin{bmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}\\ &A_4=\frac{1+G(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N)K}{H(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N)}\left[\frac{G(\boldsymbol{\theta}^*)R}{1+G(\boldsymbol{\theta}^*)K}-\frac{G(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N)R}{1+G(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N)K}\right]\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

由(20)式可见,预测误差与输入信号间的互相关函数满足

$$\hat{\boldsymbol{R}}_{\varepsilon_1 w}(0)=A_4,\quad \hat{R}_{\varepsilon_1 w}(\tau)=0,\quad \tau=1,\cdots,n-1$$

为了计算出互相关函数 $\hat{\boldsymbol{R}}_{\varepsilon_1 w}(0)=A_4$ 的均值和方差,通过对 A_4 的观察有

$$E\left[\hat{\boldsymbol{R}}_{\varepsilon_1 w}(0)\right]=EA_4=0$$

对 A_4 中括号内的差值使用泰勒级数展开可近似得

$$\frac{G(\boldsymbol{\theta}^*)R}{1+G(\boldsymbol{\theta}^*)K}-\frac{G(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N)R}{1+G(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N)K}=-\frac{1}{\left[1+G(\boldsymbol{\theta}^*)K\right]}\Delta\boldsymbol{G}\tag{21}$$

根据(20)式与(21)式可得互相关函数 $\hat{\boldsymbol{R}}_{\varepsilon_1 w}(0)$ 的方差值为

$$\operatorname{cov}\hat{\boldsymbol{R}}_{\varepsilon_1 w}(0)=E\left[\hat{\boldsymbol{R}}_{\varepsilon_1 w}(0)\right]^2=\frac{1}{H_0[1+G_0K]^2}E\Delta\boldsymbol{G}\Delta\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{H_0[1+G_0K]^2}\operatorname{cov}\boldsymbol{G}\tag{22}$$

上式中的 $\operatorname{cov}G$ 表示系统对象辨识 $G(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N)$ 的方差,其展开式为

$$\operatorname{cov}G=G_0'P_\theta G_0'=G_0'\langle\phi,\phi\rangle^{-1}G_0'$$

根据上述渐近分析的应用可知:$\hat{R}_{\varepsilon_1 w}(0)$ 以渐近 N 的形式收敛于一零均值的高斯分布。

$$\hat{R}_{\varepsilon_1 w}(0)\to\mathbb{N}\left(0,\frac{1}{N}\operatorname{cov}\hat{R}_{\varepsilon_1 w}(0)\right)=\mathbb{N}\left(0,\frac{G_0'\langle\phi,\phi\rangle^{-1}G_0'}{NH_0[1+G_0K]^2}\right)\tag{23}$$

从而使得假设检验成立的充分条件是对于随机变量 $\hat{R}_{\varepsilon_1 w}$ 的每一个实现 $\hat{R}_{\varepsilon_1 w}(0)$ 都有

$$\gamma_0\ \text{holds}\Rightarrow\hat{\boldsymbol{R}}^{\mathrm{T}}_{\varepsilon_1 w}(0)\left[\operatorname{cov}\hat{\boldsymbol{R}}_{\varepsilon_1 w}(0)\right]^{-1}\hat{\boldsymbol{R}}_{\varepsilon_1 w}(0)\in\lambda^2(n)\tag{24}$$

即假设检验为非伪的条件是当下式成立

$$\hat{\boldsymbol{R}}^{\mathrm{T}}_{\varepsilon_1 w}(0)\left[\operatorname{cov}\hat{R}_{\varepsilon_1 w}(0)\right]^{-1}\hat{R}_{\varepsilon_1 w}(0)\leqslant c_\lambda(\alpha,n)\tag{25}$$

其中 $c_\lambda(\alpha,n)$ 表示带有 n 个自由度的 λ^2 分布的概率水平 $(1-\alpha)$,或有

$$x\in\lambda^2(n)\Rightarrow pr\left(x\leqslant c_\lambda(\alpha,n)\right)=\alpha\tag{26}$$

(24)式或(26)式给出了闭环系统辨识中预测误差与输入信号间互相关函数的置信区间估计。

4　输入滤波器的检验

为表征输入滤波器 $R(q)$ 的具体形式,可联立如下的真实系统输出方程和对应的参数化输出方程。

$$\begin{cases}y(t)=\dfrac{G_0R}{1+G_0K}w(t)+\dfrac{H_0}{1+G_0K}e(t)\\ \hat{y}(t,\theta)=\dfrac{G(\boldsymbol{\theta})R}{1+G(\boldsymbol{\theta})K}w(t)+\dfrac{H(\boldsymbol{\theta})}{1+G(\boldsymbol{\theta})K}e(t)\end{cases}$$

计算在参数估计值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N$ 下的预测误差为

$$y(t)-\hat{y}\left(t,\hat{\boldsymbol{\theta}}_N\right)=\left[\frac{G_0}{1+G_0K}-\frac{G\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N\right)}{1+G\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N\right)K}\right]Rw(t)+\left[\frac{H_0}{1+G_0K}-\frac{H\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N\right)}{1+G\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N\right)K}\right]e(t) \tag{27}$$

对上式的两项分别利用泰勒级数近似展开可得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{G_0}{1+G_0K}-\frac{G\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N\right)}{1+G\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N\right)K}\approx-\frac{1}{\left[1+G_0K\right]^2}\Delta\boldsymbol{G}\\&\frac{H_0}{1+G_0K}-\frac{H\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N\right)}{1+G\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N\right)K}\approx-\frac{1}{1+G_0K}\Delta\boldsymbol{H}-\frac{H_0K}{\left[1+G_0K\right]^2}\Delta\boldsymbol{G}\\&\Delta\boldsymbol{G}=G\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N\right)-G_0,\ \Delta\boldsymbol{H}=H\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N\right)-H_0\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

将两个泰勒级数展开式代入至预测误差中得

$$y(t)-\hat{y}\left(t,\hat{\boldsymbol{\theta}}_N\right)=\frac{1}{\left[1+G_0K\right]^2}\Delta\boldsymbol{G}Rw(t)++\left[\frac{H_0K}{\left[1+G_0K\right]^2}\Delta\boldsymbol{G}+\frac{1}{1+G_0K}\Delta\boldsymbol{H}\right]e(t) \tag{29}$$

利用巴塞伐尔定理有

$$\begin{aligned}E\left\{\left\|y(t)-\hat{y}\left(t,\hat{\boldsymbol{\theta}}_N\right)\right\|^2\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{R^2}{\left[1+G_0K\right]^4}E\left(\Delta\boldsymbol{G}\Delta\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\right)+\frac{\lambda_0H_0^2K}{\left[1+G_0K\right]^4}E\left(\Delta\boldsymbol{G}\Delta\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\right)+\\\frac{\lambda_0}{\left[1+G_0K\right]^2}E\left(\Delta\boldsymbol{H}\Delta\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\right)+\frac{H_0K}{\left[1+G_0K\right]^3}E\left(\Delta\boldsymbol{G}\Delta\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\right)\end{aligned} \tag{30}$$

为了计算上式中的各个方差矩阵,对(12)式展开并进行复杂的推导整理可得

$$\begin{bmatrix}\operatorname{cov}G\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N\right) & E\left(\Delta\boldsymbol{G}\Delta\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\right)\\E\left(\Delta\boldsymbol{H}\Delta\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\right) & \operatorname{cov}H\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N\right)\end{bmatrix}=\frac{n}{N}\frac{\lambda_0H_0^2}{\left[1+G_0K\right]^2}\begin{bmatrix}R^2S_0^2+\lambda_0K^2S_0^2H_0^2 & -\lambda_0KH_0S_0\\-\lambda_0KH_0S_0 & \lambda_0\end{bmatrix}^{-1} \tag{31}$$

其中的逆矩阵求解为

$$\frac{\begin{bmatrix}\lambda_0 & \lambda_0KH_0S_0\\\lambda_0KH_0S_0 & R^2S_0^2+\lambda_0K^2S_0^2H_0^2\end{bmatrix}}{\lambda_0^2R^2S_0^2}$$

在求解逆矩阵过程中使用到了如下的恒等式

$$\lambda_0\left(R^2S_0^2+\lambda_0K^2S_0^2H_0^2\right)-\lambda_0^2S_0^2K^2H_0^2=\lambda_0^2R^2S_0^2$$

从而得到如下的方差式

$$\operatorname{cov}G\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N\right)=\frac{n}{N}\frac{H_0^2}{R^2},\quad E\left(\Delta\boldsymbol{G}\Delta\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\right)=\frac{n}{N}\frac{H_0^3KS_0}{R^2},\operatorname{cov}H\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N\right)=\frac{n}{N}\left[\frac{H_0^2}{\lambda_0}+\frac{K^2S_0^2H_0^2}{R^2}\right] \tag{32}$$

将(32)式代入(30)式并进行初等数学运算整理可得

$$E\left\{\left\|y(t)-\hat{y}(t)\right\|^2\right\}=\frac{n}{2N\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\lambda_0H_0^4KS_0^4+\lambda_0H_0^2KS_0^3+H_0^4K^3S_0^4}{R^2}dq \tag{33}$$

又因为被控对象的输入量 $u(t)$ 为

$$u(t)=\frac{R}{1+G_0K}w(t)-\frac{KH_0}{1+G_0K}e(t)$$

由上式可得输入量 $u(t)$ 的功率谱密度为

$$\phi_u(\omega)=R^2S_0^2+\lambda_0K^2H_0^2S_0^2 \tag{34}$$

对于输入滤波器 R 的选择可求解如下的优化问题

$$\left.\begin{aligned}&\min_{R^2}\frac{1}{2\pi}\int\frac{a}{R^2(q)}dq,\quad \text{subject to}\int R^2S_0^2\leqslant L-\lambda_0K^2H_0^2S_0^2\\&a=\frac{n}{N}KH_0^2S_0^3\left(\lambda_0H_0^2S_0+\lambda_0+H_0^2KS_0\right)\end{aligned}\right\}\tag{35}$$

优化问题中 L 为一个任意自由选择的正常数，其用来限制实际应用时关于所用输入信号的功率谱大小。对于优化问题(35)式的具体求解过程可参考文献[16]，此处仅给出最后的求解结果。即该优化问题中优化变量 R^2 的选择应满足：

$$\phi_r=R^2(q)=\mu\sqrt{a}=\mu\sqrt{\frac{n}{N}KH_0^2S_0^3\left(\lambda_0H_0^2S_0+\lambda_0+H_0^2KS_0\right)}\tag{36}$$

其中的常量 μ 应满足如下的等式成立

$$\mu=\frac{\left(L-\lambda_0K^2H_0^2S_0^2\right)/\left|S_0\right|^2}{\sqrt{\frac{n}{N}KH_0^2S_0^3\left(\lambda_0H_0^2S_0+\lambda_0+H_0^2KS_0\right)}}\tag{37}$$

(36)式和(37)式共同构成闭环系统辨识中关于输入滤波器的选择，从而也就构成外部输入激励信号 $r(t)$ 和 $u(t)$ 的功率谱形式，此即为模型结构检验过程中对于输入信号的设计要求。

5　仿真算例

为了验证上述闭环系统的模型检验策略，考虑如下的仿真系统。

$$y(t)=G_0(q)R(q)w(t)-G_0(q)K(q)y(t)+H_0(q)e(t)$$

其中的各个量依次为

$$G_0(q)=\frac{0.01293q^{-1}+0.1062q^{-2}+0.1058q^{-3}+0.01279q^{-4}}{1-0.2482q^{-1}+1.091q^{-2}-0.2441q^{-3}+0.9822q^{-4}}$$

$$H_0(q)=1,\quad K(q)=1$$

此时噪声模型为1，其表明作用于闭环系统的外部干扰退化为最为简单的白噪声干扰，反馈取为单位正反馈。干扰 $e(t)$ 为零均值的白噪声，且其方差值为 λ_0，输入 $w(t)$ 为零均值、方差为1的白噪声激励信号。为了便于分析验证模型参数和互相关函数的置信区域，令输入滤波器 $R(q)=1$，即此时仅白噪声激励信号 $w(t)$ 作用于整个闭环系统。选取 $N=500$ 的观测数据对 $\{y(t),w(t)\}_{t=1}^{N}$，对该闭环系统采用直接法来辨识模型 $G_0(q)$ 中的9个未知参数值。9个模型参数辨识的好坏直接作用于闭环系统的输出响应。因此可用原闭环系统的输出响应来衡量辨识精度或模型参数辨识的可信度。

图2表示在辨识模型参数的基础上，整个闭环系统的输出频率响应曲线。图2中红色曲线为真实闭环系统对应Bode plot振幅曲线，红色曲线上下方相邻曲线为当辨识模型参数在不确定性边界(14)式中取值时对应的99%置信Bode plot振幅曲线。由图2可见，3条曲线非常接近，其表明红色振幅曲线恰好夹在两99%置信Bode plot振幅曲线之间。因在利用Matlab仿真出闭环系统的Bode plot输出响应时，相位图是与振幅图是同时产生的。因此对于图3的解释与图2是相似的，同样可说明红色相位曲线恰好夹在两99%置信Bode plot相位曲线之间。

在Matlab系统辨识仿真工具箱中，对残差和输入计算互相关检验。图4给出残差和输入间的采样互相关函数，由图4可见蓝色曲线代表的采样互相关函数在零点处以小偏差的形式来回，随着时间的推移，采样互相关函数也逐渐趋于零值。此即表明残差和输入间的采样互相关函数在开始时刻存在较小的变化，慢慢地向零值靠拢，残差和输入将会成为不相关的关系。图4中的两红色直线表示残差和输入采样互相关函数的上下界，该采样互相关函数夹在这两红色直线构成的置信区间中。

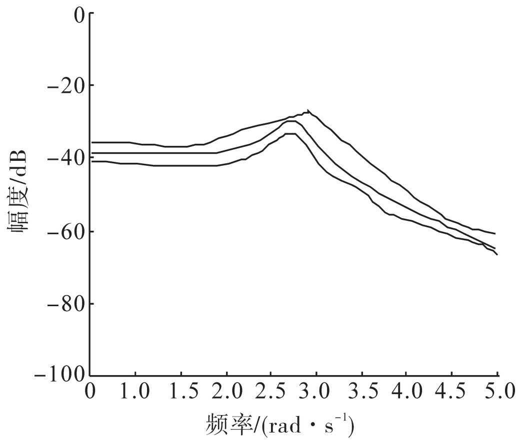

图2 Bode plot 中振幅的置信区间

Fig. 2 The confidence interval of the amplitude in Bode plot

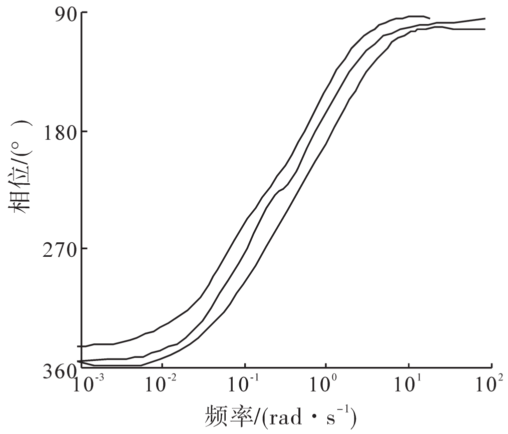

图3 Bode plot 中相位的置信区间

Fig. 3 The confidence interval of the phase in Bode plot

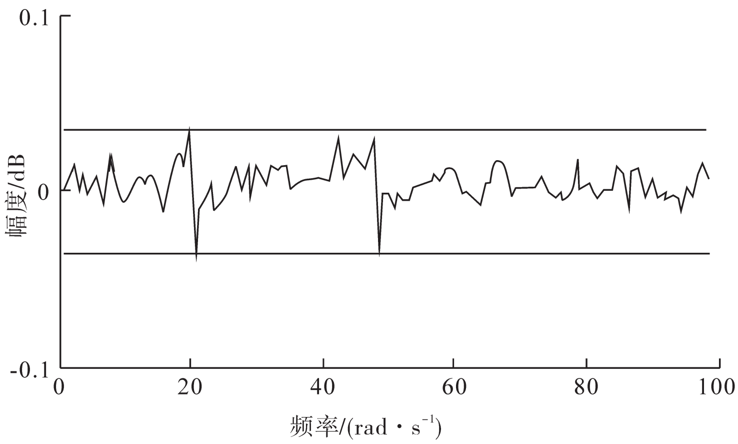

图4 标准互相关检验的置信区间

Fig. 4 The confidence interval of the standard cross correlation test

6 结语

从模型参数的置信区域、互相关函数的置信区域和输入滤波器的选择三方面来分析闭环系统辨识的模型结构检验问题。根据未知参数的渐近方差矩阵内积形式从概率统计意义上构造模型参数及互相关函数的不确定性边界,从优化的角度推导输入滤波器以及输入激励信号的选取形式。

参考文献:

[1] FORSSELL U, LJUNG L. Closed loop identification revisited[J]. Automatica, 1999,35(7):1215-1241.

[2] LJUNG L. System identification:theory for the user[M].New Jersey: Prentice Hall, 1999:245-260.

[3] PINTELON R, SCHOUKENS J. System identification: a frequency domain approach [M]. New York: IEEE Press, 2001:340-352.

[4] JUAN C, AUGERO. A virtual closed loop method for closed loop identification[J]. Automatica, 2011,47(8):1626-1637.

[5] FORSSELL U , LJUNG L. Some results on optimal experiment design[J]. Automatica, 2000,36(5):749-756.

[6] LESKERS M. Closed loop identification of multivariable process with part of the inputs controled[J]. International Journal of Control, 2007,80(10):1552-1561.

[7] HAKAN HJALMARSSION. From experiment design to closed loop control[J]. Automatica, 2005,41(3):393-438.

[8] HAKAN HJALMARSSION. Closed loop experiment design for linear time invariant dynamical systems via LMI[J]. Automatica, 2008,44(3):623-636.

[9] BOMBOIS X. Least costly identification experiment for control[J]. Automatica, 2006,42(10):1651-1662.

[10] ROLAND HILDEBRAND. Identification for control: optimal input design with respect to a worst case gap cost function[J]. SIAM Journal of Control Optimization, 2003,41(5):1586-1608.

[11] GEVERS M. Identification of multi input systems: variance analysis and input design issues[J]. Automatica, 2006,42(4):559-572.

[12] GEVERS M. Identification and information matrix: how to get just sufficiently rich[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009,54(12):2828-2840.

[13] GRAHAM C GOODIN. Bias issues in closed loop identification with application to adaptive[J]. Communications in Information and Systems, 2002,2(4):349-370.

[14] JAMES S WELSH. Finite sample preperties of indirect nonparametric closed loop identification[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002,47(8):1277-1291.

[15] SIPPE G DOUMA. Validity of the standard cross correlation test for model structure validation[J]. Automatica, 2008,44(5):1285-1294.

[16] 王建宏.基于先进辨识的控制策略研究及其应用[D].南京:南京航空航天大学,2011.

[17] 刘喜富.广义Schur补为零时分块矩阵的Drazin逆[J].华东交通大学学报, 2014,31(1):98-101.

Model Structure Validity in Closed Loop System Identification

Wang Jianhong[1,2], Xiong Zhaohua[1]

(1.The 28th Research Institute of China Electronics Technology Group Corporation, Nanjing 210007, China;

2. School of Mechanical and Electronic Engineering, Jingdezhen Ceramic Institute, Jingdezhen 333403, China)

Abstract: Aiming at the problem of the model structure validity in closed loop system identification, this paper derives two probabilistic model uncertainties and optimum input filter from statistical properties of the parameter estimation with the prediction error identification method. The probabilistic bounds and optimum input filter are based on an asymptotic normal distribution of the parameter estimator, accompanied by a covariance matrix, which has to be estimated from sampled data. The uncertainties bounds about the model parameter and cross-correlation function are constructed in the probability sense by using the inner product form of the asymptotic covariance matrix. And the input filter is derived from the point of optimization. Finally the simulation results verify the effectiveness of the proposed identification method.

Key words: closed loop system identification; model uncertainty; model structure validity; input filter