DOI:10.16749/j.cnki.jecjtu.2014.04.004

第31卷第4期 华东交通大学学报 Vol. 31 No. 4
2014年8月 Journal of East China Jiaotong University Aug.,2014

文章编号:1005-0523(2014)04-0077-05

章鱼图的IC-着色和IC-指数

杨 杨,王力工

(西北工业大学理学院应用数学系,陕西 西安 710072)

摘要:章鱼图$H(C_m,n)$是指由圈C_m的一个顶点与星图$ST_n=K_{1,n}$的中心重迭得到的图,研究了章鱼图$H(C_m,n)$的IC-着色问题,通过分类讨论的方法,分别得到了当$m=3,4,5,n\geq1$时章鱼图$H(C_m,n)$的极大IC-着色和它们相应的IC-指数,并提出章鱼图$H(C_m,n)$一个上界猜想。

关键词: IC-着色;IC-指数;章鱼图

中图分类号:O157.5 **文献标志码:**A

本文所指的图均为无向简单图,文中未说明的符号和术语可参考文献[1]。

设图$G=(V,E)$是一个连通图,对于图G的一个着色$f:V(G)\to\mathbb{N}$和G的一个子图H,定义$f(H)=\sum_{v\in V(H)}f(v)$,特别的将$f(G)$记作$S(f)$。如果对于任意整数$k\in\{1,2,3,\cdots,f(G)\}\triangleq[1,f(G)]$存在$G$的一个连通子图$H$,使得$f(H)=k$,则称$f$为图$G$的一个IC-着色。并定义$M(G)=\max\{f(G)\mid f为图G的一个IC-着色\}$为图$G$的IC-指数,并且称适合$f(G)=M(G)$的IC-着色$f$为图$G$的一个极大IC-着色。

图的IC-着色问题来源自数论中邮票问题[2-4],自从提出以来,得到了广泛的研究:1995年,Penrice在文献[4]得到结论:

1) $M(K_n)=2^n$。

2) 当$n\geq2$时,$M(K_{1,n})=2^n+n$。

3) 当$3\leq n\leq9$,$n\neq7$时,$M(C_n)=n(n-1)+1$。

2005年,Salehi等人在文献[5]正式提出IC-着色和IC-指数的概念,并得到结论:当$n\geq2$时,$M(K_{2,n})=3\cdot2^n+1$。2006年,徐宝根在文献[6]得到结论:设整数$n\geq2$且$b_1\geq b_2\geq\cdots\geq b_n\geq2$则$M(ST(n;b_1,b_2,\cdots,b_n))\geq2b_1+\sum_{i=1}^{n-1}(b_{i+1}-1)b_n^i$,2008年,Shiue和Fu在文献[7]得到结论:当$2\leq m\leq n$时,$M(K_{m,n})=3\cdot2^{m+n-2}-2^{m-2}+2$。2011年,陈剑峰在文献[8]与[9]当中分别得到了笛卡尔积图$P_m\times P_n$和星的细分图的IC-指数的一个下界。2012年,周娟等在文献[10]得到结论当$n=10,12,14$时,$M(C_n)=n(n-1)+1$。2012年,陈剑峰等在文献[11]和文献[12]研究了双星图的IC-着色,得到了:对于双星图$DS(m,n)(2\leq m\leq n)$的IC-着色,设f是$G=DS(m,n)$的一个极大IC-着色,则当$f(v_1)=1$时,有$M(G)=(2^{m-1}+1)(2^{n-1}+1)$,而且$f$是唯一的,并由这个结论得到了双星图的IC-指数为$M(DS(m,n))=(2^{m-1}+1)(2^{n-1}+1)$。

收稿日期: 2014-01-10

基金项目: 国家自然科学基金(11171273);国家级大学生创新创业训练计划项目资助(201310699069)

作者简介: 杨杨(1990—),男,硕士研究生,研究方向为图论;王力工(1968—),男,教授,博士生导师,研究方向为图论及应用。

章鱼图$H(C_m,n)$是指由圈C_m的一个顶点与星图$ST_n=K_{1,n}$的中心重叠得到的图,本文研究了章鱼图$H(C_m,n)$的IC-着色问题,分别得到了当$m=3,4,5,n\geqslant 1$时章鱼图$H(C_m,n)$的极大IC-着色和它们的IC-指数,并给出章鱼图$H(C_m,n)$IC-指数的一个上界猜想。

对于章鱼图$H(C_m,n)$,如图1。圈的顶点集设为$V(C_m)=\{u_i|1\leqslant i\leqslant m\}$,星图的顶点集设为$V(ST_n)=\{v_j|1\leqslant j\leqslant n\}$,记星图$ST_n$的中心为$u_1=v$。

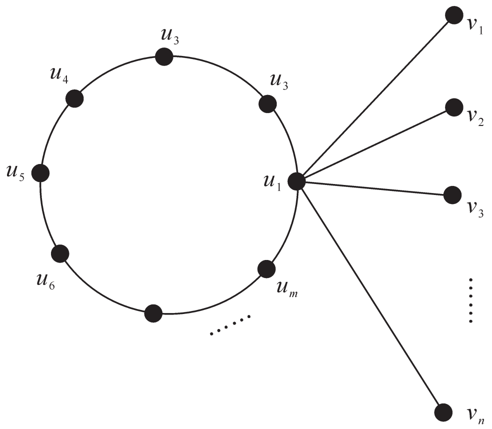

图1 章鱼图 $H(C_m,n)$

Fig. 1 Octopus Graph $H(C_m,n)$

定理1 当$m=3,n\geqslant 1$时,章鱼图$G=H(C_m,n)$的IC-指数满足

$$M(G)\geqslant[m(m-1)/2+1](2^n+1)=2^{n+2}+4 \quad (1)$$

证明 当$m=3,n\geqslant 1$时,章鱼图$G=H(C_m,n)$的一个着色记为f,其中$f(u_1)=5$,$f(u_2)=1$,$f(u_3)=2$,$f(v_j)=2^{j+1}$ $(j=1,2,\cdots,n)$,下面证明f是章鱼图$G=H(C_m,n)$的一个IC-着色。

当$k\in[1,5]$时,若$k=1$,有$f(u_2)=1$;若$k=2$,有$f(u_3)=2$;若$k=3$,有$f(u_2)+f(u_3)=3$;若$k=4$,有$f(v_1)=4$;若$k=5$,有$f(u_1)=5$;当$k\in[6,2^{n+1}+4]$时,记$u_1=v_{-1},u_2=v_0$,考虑$k-5$的展开式:$k-5=\sum_{i=-1}^{n}c_i2^{i+1},c_i=0,1$,对$k\in[6,2^{n+2}+4]$,存在由点$\bigcup_i\{v_i|c_i=1\}\cup\{u_1\}$导出的连通子图$H_k$,使得$f(H_k)=k$,综上可知$f$是章鱼图$G=H(C_m,n)$的IC-着色,从而得到

$$M(G)\geqslant S(f)=[m(m-1)/2+1](2^n+1)=2^{n+2}+4 \quad (2)$$

定理2 当$m=3,n\geqslant 1$时,章鱼图$G=H(C_m,n)$的IC-指数为

$$M(G)=[m(m-1)/2+1](2^n+1)=2^{n+2}+4 \quad (3)$$

证明 当$m=3,n\geqslant 1$时,定理3.1已证得$M(G)\geqslant S(f)=[m(m-1)/2+1](2^n+1)$,下面只需证$M(G)\leqslant[m(m-1)/2+1](2^n+1)=2^{n+2}+4$。设章鱼图$G=H(C_m,n)=H(C_3,n)$的IC-指数为$M$,对$k=1,2,3,\cdots$,依次寻找图$G$的连通子图$H_k$,使得$f(H_k)=M-k$,在着色的过程中,目标是选择使$M$最大的方案,下面分步骤进行着色。

步骤1:当$k=1$时,为使连通子图H_1存在,要对章鱼图$H(C_3,n)$上的点着色1,着色为1的点可以为u_2或v_1。

情况1:当$f(u_2)=1$,存在连通子图$H_1=G\backslash\{u_2\}$,使得$f(H_1)=M-1$。

情况2:当$f(v_1)=1$,存在连通子图$H_1=G\backslash\{v_1\}$,使得$f(H_1)=M-1$。

步骤2:当$k=2$时,为使连通子图H_2存在,要对章鱼图$H(C_3,n)$上的点着色1或2,在步骤1的情况1下,着色的点可以为u_3或v_1,在步骤1的情况2下,着色的点可以为u_2或v_2。为了使得M尽可能大,此步骤中的以下4种情形为最优方案。

情况1:当$f(u_2)=1$,$f(u_3)=2$,存在连通子图$H_2=G\backslash\{u_3\}$,使得$f(H_2)=M-2$,存在连通子图$H_3=G\backslash\{u_2,u_3\}$,使得$f(H_3)=M-3$。

情况2:当$f(u_2)=1$,$f(v_1)=2$,存在连通子图$H_2=G\backslash\{v_1\}$,使得$f(H_2)=M-2$,存在连通子图$H_3=G\backslash\{u_2,v_1\}$,使得$f(H_3)=M-3$。

情况3:当$f(u_2)=2$,$f(v_1)=1$,存在连通子图$H_2=G\backslash\{u_2\}$,使得$f(H_2)=M-2$,存在连通子图$H_3=G\backslash\{u_2,v_1\}$,使得$f(H_3)=M-3$。

情况 4:当 $f(v_1)=1$,$f(v_2)=2$,存在连通子图 $H_2=G\backslash\{v_2\}$,使得 $f(H_2)=M-2$,存在连通子图 $H_3=G\backslash\{v_1,v_2\}$,使得 $f(H_3)=M-3$ 。

步骤3:显然在步骤2的4种情形下都存在图G的连通子图 H_3 ,使得 $f(H_3)=M-3$ 。当 $k=4$ 时,根据步骤1和步骤2的着色规则继续着色,得到以下7种情况。

情况1:当 $f(u_2)=1$,$f(u_3)=2$,$f(v_1)=4$,存在连通子图 $H_4=G\backslash\{v_1\}$,使得 $f(H_4)=M-4$;存在连通子图 $H_5=G\backslash\{u_2,v_1\}$,使得 $f(H_5)=M-5$;存在连通子图 $H_6=G\backslash\{u_3,v_1\}$,使得 $f(H_6)=M-6$;存在连通子图 $H_7=G\backslash\{u_2,u_3,v_1\}$,使得 $f(H_7)=M-7$ 。以下情况同步骤3中的情况1可得,存在连通子图 H_k ,使得 $f(H_k)=M-k$,$k=4,5,6,7$ 。

情况2:当 $f(u_2)=1$,$f(u_3)=4$,$f(v_1)=2$ 。

情况3:当 $f(u_2)=1$,$f(v_1)=2$,$f(v_2)=2$ 。

情况4:当 $f(u_2)=2$,$f(u_3)=4$,$f(v_1)=1$ 。

情况5:当 $f(u_2)=2$,$f(v_1)=1$,$f(v_2)=4$ 。

情况6:当 $f(u_2)=4$,$f(v_1)=1$,$f(v_2)=2$ 。

情况7:当 $f(v_1)=1$,$f(v_2)=2$,$f(v_3)=4$ 。

继续进行着色时,不失一般性,以步骤三的情况1为例,下面依次对点 $v_2,v_3,v_4,\cdots$ 进行着色。考虑 $k=8$ 时,为使连通子图 H_8 存在,需满足 $f(v_2)+l=8$,其中 $l\in\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$,易知 $1\leqslant f(v_2)\leqslant 8$,为保证着色极大,则 $f(v_2)=8$,同理可得,为使得 $f(H_k)=M-k,k=1,2,3,\cdots$ 的连通子图 H_k 存在,且保证着色极大,易证除中心 v 外,余下的点的着色一定为 $16,32,64,\cdots,2^{n-1}$,此时已对章鱼图中的 n 个点完成着色。

当对章鱼图中的 n 个点(除中心 v 外)的着色为 $1,2,4,\cdots,2^{n-1}$ 时,存在一种特殊情形,仅对星图顶点的着色,着色为 $f(v_j)=2^{j-1}$,$j=1,2,3,\cdots,n$,此时可以找到连通子图 H_k ,使得 $f(H_k)=M-k,k=\sum_{j=1}^{n}c_j2^{j-1}$,$c_j=0.1$,连通子图为 $H_k=G\backslash\bigcup_j\{v_j|c_j=1\}$,从而当 $k=1,2,3,\cdots,2^n-1$ 时,可以找到连通子图 H_k ,使得 $f(H_k)=M-k$,下面分2种情形继续着色。

情形1:当 $f(u_1)=1$ 时,$H'=G\backslash\{v,v_1,v_2,\cdots,v_n\}=G[u_2,u_3]$ 为连通子图且 $f(H)=M-2^n$ 。为使数 $M-(2^n+1)$ 对应一个连通子图,应有 $f(u_2)+l=2^n+1$,$l\in\{0,1,2,3,\cdots,2^n\}$,记 u_2 的着色为 α ,则 $\alpha\leqslant 2^n+1$,此时 $M-k$ 都对应一个连通子图,其中 $k=1,2,3,\cdots,2^n+\alpha$,再考虑数 $M-(2^n+\alpha+1)$ 所对应的连通子图,同理有 $f(u_3)\leqslant 2^n+\alpha+1$ 。当 $f(u_i)(i=2,3)$ 都取得最大值时,依次检验数 $i=1,2,\cdots,2^{n+2}+3$,都有连通子图与之对应,此时 $f(G)=\sum_{j=1}^{n}f(v_j)+f(u_1)+\sum_{i=2}^{3}f(u_i)=2^{n+1}+2\alpha+1\leqslant 2^{n+2}+3$,极大着色为 $S(f_1)=2^{n+2}+3$ 。

情形2:当 $f(u_1)\neq 1$ 时,为使数 $M-2^n$ 对应一个连通子图,应有 $f(u_2)+l=2^n$,$l\in\{0,1,2,3,\cdots,2^n-1\}$,记 u_2 的着色为 α ,则 $\alpha\leqslant 2^n$,此时则 $M-k$ 都对应一个连通子图,其中 $k=1,2,3,\cdots,2^n-1+\alpha$,再考虑数 $M-(2^n+\alpha)$ 所对应的连通子图,同理有 $f(u_3)\leqslant 2^n+\alpha$ 。当 $f(u_i)(i=2,3)$ 都取得最大值时,依次检验数 $i=1,2,3,\cdots$,发现当 $i=3$ 时,无连通子图与之对应,从而应有 $f(u_1)\leqslant 3$,此时 $f(G)=\sum_{j=1}^{n}f(v_j)+f(u_1)+\sum_{i=2}^{3}f(u_i)=2^{n+1}+2\alpha+1\leqslant 2^{n+2}+2$,极大着色为 $S(f_2)=2^{n+2}+2$ 。

当对章鱼图中的 n 个点(除中心 v 外)的着色为 $1,2,4,\cdots,2^{n-1}$ 时,除去上述仅对章鱼图中的星图着色的情况外,继续着色,易证,余下点的着色必为 $2^n,2^{n+1},\cdots$;此时,除章鱼图的中心 v 之外,其它点的着色都已经确定。

下面以步骤3中的情况1,情况2的着色为例进行分析。

对于步骤3中的情况1,继续着色,着色为 $f(u_2)=1$, $f(u_3)=2$, $f(v_j)=2^{j+1}$, $j=1,2,\cdots,n$,依次检验 $i=1,2,3,\cdots$,发现当 $i=5$ 时,无连通子图与之对应,故对中心 v 着色使得 $f(v)+l=5$, $l\in\{0,1,2,4\}$,易知 $1\leqslant f(v)\leqslant 5$,当 $f(v)$ 取得最大值时,依次检验 $i=1,2,3,\cdots,2^{n+2}+4$,都有连通子图与之对应,此时 $f(G)=\sum_{i=1}^{3}f(u_i)+\sum_{j=1}^{n}f(v_j)=2^{n+2}-1+f(v)\leqslant 2^{n+2}+4$,极大着色为 $S(f_3)=2^{n+2}+4$ 。

对于步骤3中的情况2,继续着色,着色为 $f(u_2)=1$, $f(u_3)=4$, $f(v_1)=2$, $f(v_j)=2^{j+1}$, $j=2,3,\cdots,n$,依次检验 $i=1,2,3,\cdots$,发现当 $i=3$ 时,无连通子图与之对应,故对中心 v 着色使得 $f(v)+l=3$, $l\in\{0,1,2\}$,易知 $1\leqslant f(v)\leqslant 3$,当 $f(v)$ 取得最大值时,依次检验 $i=1,2,3,\cdots,2^{n+2}+2$,都有连通子图与之对应,此时 $f(G)=\sum_{i=1}^{3}f(u_i)+\sum_{j=1}^{n}f(v_j)=2^{n+2}-1+f(v)\leqslant 2^{n+2}+2$,极大着色为 $S(f_4)=2^{n+2}+2$ 。

通过对步骤3的2种着色情况的分析,推广到所有情况,当所有点(除中心 v 外)的着色确定后,依次检验 $i=1,2,3,\cdots$,当 $i=3$ 时,发现除步骤3的情况1之外,无连通子图与之对应,故对中心 v 着色使得 $f(v)+l=3$, $l\in\{0,1,2\}$,易知 $1\leqslant f(v)\leqslant 3$,当 $f(v)$ 取得最大值时,依次检验 $i=1,2,3,\cdots,2^{n+2}+2$,都有连通子图与之对应,此时 $f(G)=\sum_{i=1}^{3}f(u_i)+\sum_{j=1}^{n}f(v_j)=2^{n+2}-1+f(v)\leqslant 2^{n+2}+2$,极大着色为 $S(f)=2^{n+2}+2$ 。

综合以上所有情况可知,章鱼图 $H(C_m,n)=H(C_3,n)$ 的着色满足 $f(G)\leqslant S(f_1)=2^{n+2}+4$,结合定理3.1可知当 $m=3,n\geqslant 1$ 时,章鱼图 $G=H(C_m,n)$ 的IC-指数为

$$M(G)=[m(m-1)/2+1](2^n+1)=2^{n+2}+4 \tag{4}$$

例1 当 $m=3,n\geqslant 1$ 时,章鱼图 $H(C_m,n)=H(C_3,n)$ 的极大IC-着色见图2。

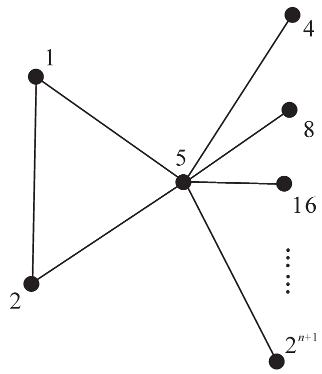

图2 章鱼图 $H(C_3,n)$ 的极大IC-着色

Fig. 2 Maximal IC-coloring of $H(C_3,n)$

定理3 当 $m=4$, $n\geqslant 1$ 时,章鱼图 $H(C_m,n)$ 的IC-指数为

$$M(G)=[m(m-1)/2+1](2^n+1)=7\cdot 2^n+7 \tag{5}$$

证明 当 $m=4$, $n\geqslant 1$ 时,记章鱼图的着色为 f ,章鱼图 $H(C_m,n)=H(C_4,n)$ 的着色为 $f(u_1)=8$, $f(u_2)=1$, $f(u_3)=3$, $f(u_4)=2$, $f(v_j)=7\cdot 2^{j-1}(j=1,2,\cdots,m)$,同定理3.1的证明可得, f 是章鱼图 $G=H(C_m,n)$ 的IC-着色,从而得到当 $m=3,4,n\geqslant 1$ 时, $M(G)\geqslant S(f)=[m(m-1)/2+1](2^n+1)=7\cdot 2^n+7$ 。

下面证明 $M(G)\leqslant[m(m-1)/2+1](2^n+1)=7\cdot 2^n+7$,设章鱼图 $G=H(C_m,n)=H(C_4,n)$ 的IC-指数为 M ,对 $k=1,2,3,\cdots$,依次寻找连通子图 H_k ,使得 $f(H_k)=M-k$,下面分步骤进行着色(由于情况太多,在此不一一列举),仿照定理3.2的证明,可得当 $m=3,4,n\geqslant 1$ 时, $M(G)\leqslant S(f)=[m(m-1)/2+1](2^n+1)=7\cdot 2^n+7$,从而章鱼图 $G=H(C_m,n)=H(C_4,n)$ 的IC-指数为 $M(G)=[m(m-1)/2+1](2^n+1)=7\cdot 2^n+7$ 。

例2 当 $m=4,n\geqslant 1$ 时,章鱼图 $H(C_m,n)=H(C_4,n)$ 的极大IC-着色见图3。

定理4 当 $m=5,n\geqslant 1$ 时,章鱼图 $G=H(C_m,n)$ 的IC-指数为

$$M(G)=11+10\times 2^n \tag{6}$$

证明 当 $m=5,n\geqslant 1$ 时,记章鱼图的着色为 f ,章鱼图 $G=H(C_m,n)=H(C_5,n)$ 的着色为 $f(u_1)=5$, $f(u_2)=1$, $f(u_3)=3$, $f(u_4)=5\cdot 2^n+5$, $f(u_5)=2$, $f(v_j)=5\cdot 2^{j-1}(j=1,2,\cdots,m)$,参照定理1和定理2的证明,同理可证得,这一着色是章鱼图 $G=H(C_m,n)$ 的一种极大IC-着色,IC-指数为 $M(G)=11+10\times 2^n$ 。

例3 当 $m=5,n\geqslant 1$ 时,章鱼图 $H(C_m,n)=H(C_5,n)$ 的极大IC-着色见图4。

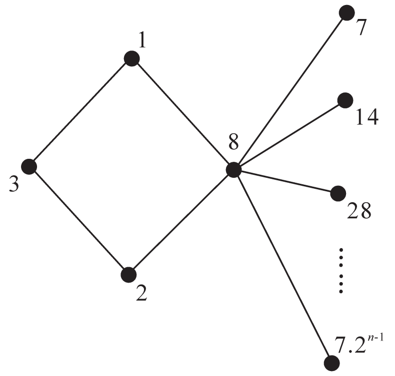

图3 章鱼图 $H(C_4,n)$ 的极大IC-着色

Fig. 3 Maximal IC-coloring of $H(C_4,n)$

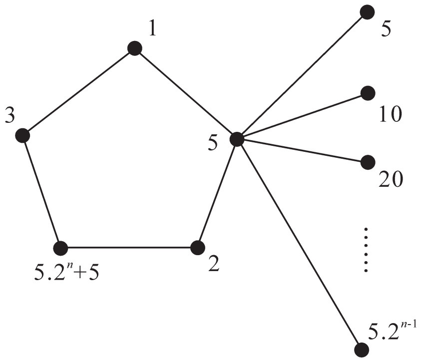

图4 章鱼图 $H(C_5,n)$ 的极大IC-着色

Fig. 4 Maximal IC-coloring of Octopus Graph $H(C_5,n)$

猜想 当 $m\geqslant 3,n\geqslant 1$ 时,章鱼图 $H(C_m,n)$ 的IC-指数的上界为

$$M(H(C_m,n))\leqslant\left[m(m-1)/2+1\right](2^n+1) \tag{7}$$

参考文献:

[1] SALEHI E, SIN MIN LEE, KHATIRINEJAD M S. IC-colorings and IC-indices of graphs [J]. Discrete Mathematics, 2005,299(8): 297-310.

[2] ALTER R, BRNETT J A. A postage stamp problem [J]. The American Mathematical Monthly, 1980,87(3):206-210.

[3] 程卓, 王殊. 基于IC着色的认知差分跳频系统多址原理[J]. 武汉大学学报:理学版, 2010,56(4):478-482.

[4] PENRICE S G. Some new graph labeling problems: A preliminary report [J]. DIMACS Technical Reports, 1995,95(7):1-9.

[6] 徐宝根.关于连通图的IC-着色[J].华东交通大学学报,2006,23(1):134-136.

[7] SHIUE C L, FU H L. The IC-indices of complete bipartite graphs[J]. The Electronic Journal of Combinatorics, 2008,15(3):1-13.

[8] 陈剑峰.笛卡尔积图 $P_m\times P_n$ 的IC-着色[J].莆田学院学报,2011,18(2):13-15.

[9] 陈剑峰.星的细分图的IC-着色[J].莆田学院学报,2012,19(2):11-13.

[10] 周娟,谢承旺,徐宝根.关于圈 C_n 的IC-着色和IC-指数[J]. 华东交通大学学报,2012,29(4):64-68.

[11] 陈剑峰, 杨大庆.双星图的IC-着色[J].纯粹数学与应用数学,2012,28(2):201-212.

[12] 陈剑峰, 杨大庆.双星图的IC-指数[J].数学的实践与认识,2013,43(7):132-140.

IC-coloring and IC-index of Octopus Graphs

Yang Yang, Wang Ligong

(Department of Applied Mathematics, School of Science, Northwestern Polytechnical University, Xi′an 710072, China)

Abstract: The octopus graph $H(C_m,n)$ is formed by identifying a vertex of the cycle C_m and the center of a star $ST_n=K_{1,n}$. In this paper, the problem of IC-colorings on the octopus graph is studied. When $m=3,4,5,n\geqslant 1$, IC-indices and maximal IC-colorings of the octopus graph $H(C_m,n)$ are obtained respectively. A conjecture for the upper bound of the IC-index of the octopus graph is proposed.

Key words: IC-coloring; IC-index; octopus graph