DOI:10.16749/j.cnki.jecjtu.2014.06.001

文章编号:1005-0523(2014)06-0093-03

偶图符号控制数的下界

徐保根

(华东交通大学理学院,江西 南昌 330013)

摘要: 设 $G=(V,E)$ 是一个图,一个实值函数 $f: V\to\{-1,+1\}$ 满足 $\sum_{v\in N[u]} f(v)\geq 1$ 对一切 $u\in V(G)$ 都成立,则称 f 为图 G 的一个符号控制函数。图 G 的符号控制数定义为 $\gamma_s(G)=\min\{\sum_{v\in V(G)} f(v)|f$ 为图 G 的符号控制函数$\}$。研究了偶图的符号控制问题,主要给出了偶图符号控制数的两个下界。

关键词: 偶图;符号控制函数;符号控制数

中图分类号: O157.5 **文献标志码:** A

1 引言及定义

本文所指的图均为无向简单图,文中未说明的符号和术语同于文献[1-2]。

设 G 为一个图,用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示 G 的顶点集和边集。对于任意顶点 $v\in V(G)$,定义 v 的邻域 $N(v)=\{u|uv\in E(G)\}$,闭邻域 $N[v]=N(v)\cup\{v\}$。$d_G(v)=|N(v)|$ 为 v 点在 G 中的度,并且 $\Delta=\Delta(G)$ 和 $\delta=\delta(G)$ 分别表示图 G 的最大度和最小度。若 A 和 B 为 $V(G)$ 的两个不交子集,则

$$E(A,B)=\{uv\in E(G)|u\in A, v\in B\}$$

图的控制理论是图论中的重要课题,近些年来,图的控制概念有了许多新的变化,Cockayne E J等人[3]在符号控制的基础上,引入了多种控制概念和控制参数,这在一定程度上改变了人们对控制理论的认识。自从文献[4]中引入了图的符号边控制以来,各式各样的边控制概念和控制参数相继产生,使得控制理论在内容上不断丰富和完善,文献[5]中综述了近年来的主要研究成果。在文献[6-8]中,我们探讨了符号边控制的一些下界,并研究了偶图的符号边控制数。在本文中,将探讨偶图的符号控制数的下界。

为了方便,若 $S\subseteq V(G)$,$f: V\to R$ 为一个实值函数,则记

$$f(S)=\sum_{v\in S} f(v)$$

下面给出关于图的符号控制的定义。

定义1[3] 设 $G=(V,E)$ 是一个图,一个实值函数 $f: V\to\{-1, +1\}$ 满足 $f(N[u])\geq 1$ 对一切 $u\in V(G)$ 都成立,则称 f 为图 G 的一个符号控制函数。图 G 的符号控制数定义为

$$\gamma_s(G)=\min\{f(V)|f \text{ 为图 } G \text{ 的符号控制函数}\}$$

且称满足 $\gamma_s(G)=f(V)$ 的符号控制函数为 G 的一个最小符号控制函数。

收稿日期: 2014-09-27

基金项目: 国家自然科学基金(11361024);江西省高校科技落地计划项目(KJLD12067);江西省自然科学基金(20114BAB201010);江西省教育厅科技项目(GJJ12295)

作者简介: 徐保根(1963—),男,教授,主要研究方向为图论及其应用。

2 主要结果及证明

本文主要给出偶图的符号控制数的两个下界,它们分别依赖于图的最大度和最小度。

定理1 对于任意 n 阶偶图 G ,若 $\Delta=\Delta(G)$ 表示图 G 的最大度,则有

$$\gamma_s(G)\geqslant\frac{4-\Delta}{4+\Delta}n$$

证明 记 $G=(V,E)$,并且 $V=V_1\cup V_2$ 为偶图 G 的 $2-$部顶点划分,其中 $|V_i|=n_i\,(1\leqslant i\leqslant 2)$, $n_1+n_2=n$ 。

设 f 为图 G 的一个最小符号控制函数,即有

$$\gamma_s(G)=f(V)$$

令 $A=\{v\in V|\,f(v)=+1\}$, $B=\{v\in V|\,f(v)=-1\}$, $|A|=s$, $|B|=n-s$,显然有 $\gamma_s(G)=f(V)=|A|-|B|=2s-n$ 。

记 $A_1=A\cap V_1$, $A_2=A\cap V_2$, $B_1=B\cap V_1$, $B_2=B\cap V_2$ 。可见, $V_1=A_1\cup B_1$, $V_2=A_2\cup B_2$,并且 $A=A_1\cup A_2$, $B=B_1\cup B_2$ 。

对于每个 $v\in B_1$,由定义知 $f(N[v])\geqslant 1$,故 v 点至少与 A 中的两个点相邻,又因为 G 为偶图,即 v 点与 A_1 中的点均不相邻,从而知 v 点至少与 A_2 中的两个点相邻,故 B_1 与 A_2 之间的边数 $|E(B_1,A_2)|\geqslant 2|B_1|$ 。同理, B_2 与 A_1 之间的边数 $|E(B_2,A_1)|\geqslant 2|B_2|$ 。

故 A_2 中至少有一个点 u ,使得 u 点邻接 B_1 中的点数不少于 $\frac{2|B_1|}{|A_1|}$ 。由于 $f(N[u])\geqslant 1$,且 $A_2\subseteq V_2$ 为点独立集,故 u 点邻接 A_1 中的点数也不少于 $\frac{2|B_1|}{|A_1|}$ 。

即有 $d(u)\geqslant\frac{4|B_1|}{|A_1|}$,从而有 $\Delta\geqslant\frac{4|B_1|}{|A_1|}$,同理也有 $\Delta\geqslant\frac{4|B_2|}{|A_2|}$,即 $s=|A_1|+|A_2|\geqslant\frac{4(|B_1|+|B_2|)}{\Delta}=\frac{4(n-s)}{\Delta}$ 。因此, $s\geqslant\frac{4n}{\Delta+4}$,故 $\gamma_s(G)=2s-n\geqslant\frac{4-\Delta}{4+\Delta}n$ 。至此定理1证毕。

定理2 对于任意 n 阶偶图 G ,若 $\delta=\delta(G)$ 表示图 G 的最小度,则有

$$\gamma_s(G)\geqslant\sqrt{(\delta+2)^2+4n(\delta+2)}-(n+\delta+2)$$

证明 记偶图 $G=(V_1\cup V_2,E)$,其中 $V=V_1\cup V_2$ 为偶图的二部点集划分。设 f 为图 G 的一个最小符号控制函数,即有 $\gamma_s(G)=f(V)$ 。与定理1证明同样地,令 $A=\{v\in V|\,f(v)=+1\}$, $B=\{v\in V|\,f(v)=-1\}$, $|A|=s$, $|B|=n-s$,显然有 $\gamma_s(G)=f(V)=|A|-|B|=2s-n$ 。记 $A_1=A\cap V_1$, $A_2=A\cap V_2$, $B_1=B\cap V_1$, $B_2=B\cap V_2$ 。可见, $V_1=A_1\cup B_1$, $V_2=A_2\cup B_2$,并且 $A=A_1\cup A_2$, $B=B_1\cup B_2$ 。

对于对于每个 $v\in B_1$,由定义知 $f(N[v])\geqslant 1$,注意到 G 为偶图,故 v 点至少与 A_2 中 $\left\lceil\frac{\delta}{2}\right\rceil+1$ 个点相邻,即有 $|E(B_1,A_2)|\geqslant|B_2|(\left\lceil\frac{\delta}{2}\right\rceil+1)\geqslant\frac{|B_2|(\delta+2)}{2}$ 。从而 A_2 中存在一点 $u\in A_2$,使得 u 点与 B_1 中至少 $\frac{|B_2|(\delta+2)}{2|A_2|}$ 个点相邻。又由定义知 $f(N[u])\geqslant 1$,故 u 点与 A_1 中至少 $\frac{|B_2|(\delta+2)}{2|A_2|}$ 个点相邻,即有 $|A_1|\geqslant\frac{|B_2|(\delta+2)}{2|A_2|}$,从而 $2|A_1|\cdot|A_2|\geqslant|B_2|(\delta+2)$,完全类似地也可得到 $2|A_1|\cdot|A_2|\geqslant|B_1|(\delta+2)$ 。将两式相加得

$$4|A_1|\cdot|A_2|\geqslant(|B_1|+|B_2|)(\delta+2)=(n-|A_1|-|A_2|)(\delta+2)$$

注意到

$$s=|A|=|A_1|+|A_2|\text{ ,故 }s^2\geqslant 4|A_1|\cdot|A_2|\geqslant(n-s)(\delta+2)$$

导出

$$s\geqslant\frac{1}{2}(-\delta-2+\sqrt{(\delta+2)^2+4n(\delta+2)})$$

因此，$\gamma_s(G)=2s-n\geqslant\sqrt{(\delta+2)^2+4n(\delta+2)}-(n+\delta+2)$。

至此,定理2证毕。

参考文献:

[1] BONDYJ A , MURTY V S R. Graph Theory with Applications[M].Amsterdam:Elsevier, 1976.

[2] HAYNES T W, HEDETNIEMI S T, SLATER P J. Domination in Graphs [M]. New York: Marcel Dekker Inc,1998.

[3] COCKAYNE E J, MYNHARDT C M. On a generalization of signed dominating function of graphs[J]. Ars Combin,1996,46:235-245.

[4] XU BAOGEN. On signed edge domination numbers of graphs[J]. Discrete Math, 2001,239:179-189.

[5] 徐保根. 图的控制与染色理论[M]. 武汉:华中科技大学出版社,2013:11.

[6] 徐保根. 关于图的符号边控制数的下界[J]. 华东交通大学学报, 2004,21(1):110-113

[7] 徐保根. 一类偶图的符号边控制数[J]. 华东交通大学学报, 2004,21(2):124-126

[8] 赵金凤,徐保根. 关于图的符号边控制数的下界[J]. 江西师大学报:自然科学版, 2010,43(1):27-29.

The Lower Bounds of Signed Domination Numbers in Bipartite Graphs

Xu Baogen

(School of Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: Let $G=(V,E)$ be a graph, a real function $f:V\to\{-1,+1\}$ is said to be a signed dominating function (SDF) of G if $\sum_{v\in N[u]}f(v)\geqslant 1$ holds for every vertex $u\in V(G)$, the signed domination number $\gamma_f(G)$ of G is defined as $\gamma_s(G)=\min\{\sum_{v\in V}f(v)\,|\,f\ is\ a\ SDF\ of\ G\}$. This paper discusses some questions on the signed domination of graphs and obtains mainly two lower bounds of the signed domination numbers for bipartite graphs.

Key words: bipartite graph; signed dominating function; signed domination number