

文章编号:1005-0523(2014)06-0108-06

棒棒糖图的IC-着色和IC-指数

张楚文,王力工

(西北工业大学理学院应用数学系,陕西 西安 710072)

摘要:棒棒糖图 $B_{m,n}$ 是由圈 C_m 上的任一个顶点和路 P_n 的一个1度顶点重合而得到 $n+m-1$ 阶连通图。研究了棒棒糖图 $B_{m,n}$ 的IC-着色和IC-指数,推出了它的IC-指数的一个上界,并借助计算机编程,证明了 m 分别为3,4,5时的几种棒棒糖图 $B_{m,n}$ 的IC-着色和IC-指数。当 $m=3$, $n=1,2,\dots,6$ 时,有 $M(B_{3,n})=5n+2$; 当 $m=4$, $n=1,2,\dots,5$ 时,有 $M(B_{4,1})=13$, $M(B_{4,2})=21$, $M(B_{4,3})=26$, $M(B_{4,4})=34$, $M(B_{4,5})=40$; 当 $m=5$, $n=1,2,3,4$ 时,有 $M(B_{5,1})=21$, $M(B_{5,2})=31$, $M(B_{5,3})=39$, $M(B_{5,4})=48$ 。

关键词:IC-着色;IC-指数;棒棒糖图**中图分类号:**O157.5**文献标志码:**A

1 引言及定义

图的IC-着色问题有着很强的实际背景,它源自数论中的邮票问题^[1-3],近年来在无线网络通信中有所应用,例如程卓等人^[4]提出基于IC-着色和干扰温度模型的差分调频系统多址原理,用IC-着色与干扰温度理论控制网内用户的发射行为,使之达到区分预期信号和干扰信号的目的。Salehi E等人^[5]于2005年引入了图的IC-着色的概念并得到了一些结果。

定义1^[6] 设 $G=(V,E)$ 是一个图, N 是正整数集。 $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$, f 是定义在 V 上的,取值在 N 的函数,若对于任意两个相连的点 v_i 和 v_j , $f(v_i)$ 不等于 $f(v_j)$, 则称 f 是 G 的一个着色。

定义2^[5] 设图 G 是一个连通图,对于图 G 的一个着色 f 和图 G 的一个 H 子图,则记 $f(H)=\sum_{v \in V(H)} f(v)$, 特别的将 $f(G)$ 记作 $S(f)$ 。如果对于任意整数 $k \in \{1,2,3,\dots,f(G)\}$, 存在 G 的一个连通子图 H , 使得 $f(H)=k$, 则称 f 为图 G 的一个IC-着色。并定义 $M(G)=\max\{f(G)\}$ 为图 G 的IC-指数, 并且称适合 $f(G)=M(G)$ 的IC-着色 f 为图 G 的一个极大IC-着色。

由定义易得,一个图 G 存在IC-着色的必要条件是 G 为连通图。

定义3 棒棒糖图 $B_{m,n}$ 是由圈 C_m 上的任一个顶点和路 P_n 的一个1度顶点重合而得到 $n+m-1$ 阶的连通图。

一般地说,确定一个图的IC-指数是困难的,由文献[5,7-13]已知一些图的IC-指数:完全图 K_n , 星 $K_{1,n}$, 完全二部图 $K_{m,n}$, 圈 C_n , 路 P_n , K_n-e (表示减掉一条边的 n 阶完全图), 双星图 $DS(m,n)$ (由两个星图 $K_{1,m}$ 和 $K_{1,n}$ 的中心连一条新边得到的图), 其结果如下:

收稿日期:2014-06-27**基金项目:**国家自然科学基金(11171273);国家大学生创新创业训练计划项目(201310699069)**作者简介:**张楚文(1992—),男,主要研究方向为计算机网络。**通讯作者:**王力工(1968—),男,教授,博士生导师,主要研究方向为图论及其应用。

1)^[5] $M(K_n) = 2n - 1$; K_n 的最大着色: $(1, 2, 4, 8, \dots, 2n - 1)$ 。

2)^[7] $M(K_3 - e) = 6$; $M(K_n - e) = 2^n - 3$, $n \geq 4$ 。

3)^[8] 当 $n \in \{3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 14\}$ 时, 则 $M(C_n) = n(n - 1) + 1$ 。

4)^[5] $M(K_{1,n}) = 2^n + 2, 2 \leq n$ 。

5)^[9] $M(K_{m,n}) = 3 \times 2^{m+n-2} - 2^{m-2} + 2, 2 \leq m \leq n$ 。

$K_{m,n}$ 的最大着色 f , $K_{m,n}$ 的顶点二划分 (X, Y) , 其中 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}, Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ 。

$$\begin{cases} f(x_1) = 1, f(x_2) = 2, f(y_1) = 3 \\ f(y_i) = 2f(y_{i-1}) - 1, 2 \leq i \leq n - 1 \\ f(y_n) = 2f(y_{n-1}) + 1 \\ f(x_i) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{i-1}) + f(y_1) + f(y_2) + \dots + f(y_n) - 2, 3 \leq i \leq m \end{cases}$$

6)^[10-11] $M(DS(m, n)) = (2^{m-1} + 1)(2^{n-1} + 1), 2 \leq m \leq n$ 。

对于其他类型的某些图的IC-指数的上下界, 如下:

7)^[5] $(n + 1)n \geq M(P_n) \geq \left(2 + \frac{n}{2}\right)\left(n - \frac{n}{2}\right) + \frac{n}{2} - 1$ 。

8)^[5] $(n + 1)\frac{n}{2} \leq M(C_n) \leq n(n - 1) + 1$ 。

9)^[12-13] 对任意连通图 G 和 H , 均有 $M(G + H) > (M(G) + 1)(M(H) + 1) - 1$ 。

10)^[12-13] 设 $n(n \geq 2)$ 个整数 $b_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 满足 $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_n \geq 2$, 则有 $M(ST(n; b_1, b_2, \dots, b_n)) \geq 2b_1 + \sum (b_{i+1} - 1)b_i^i, 1 \leq i \leq n$ 。

研究棒棒糖图 $B_{m,n}$ 的IC-着色问题, 得到它的IC-指数的一个上界。并用计算机编程得到 $m=3, 4, 5$ 几类棒棒糖图 $B_{m,n}$ 的IC-着色及IC-指数。即当 $m=3, n=1, 2, \dots, 6$ 时, 有 $M(B_{3,n})=5n+2$; 当 $m=4, n=1, 2, \dots, 5$ 时, 有 $M(B_{4,1})=13, M(B_{4,3})M(B_{4,4})=34, M(B_{4,5})=40$; 当 $m=5, n=1, 2, 3, 4$ 时, 有 $M(B_{5,1})=21, M(B_{5,2})=31, M(B_{5,3})=39, M(B_{5,4})=48$ 。最后猜想: 对于棒棒糖图 $B_{3,n}$, 则有 $M(B_{3,n})=5n+2$ 。

2 棒棒糖图IC-着色和IC-指数的几个结果

定理1 设 $B_{m,n}$ 是一个具有 $n + m - 1$ 个顶点的棒棒糖图, 如图1所示, 其中 $\{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subseteq V(C_m) \subseteq V(B_{m,n}), \{w_1 = v_1, w_2, \dots, w_n\} \subseteq V(P_n) \subseteq V(B_{m,n})$, 则 $M(B_{m,n}) \leq \frac{1}{2}(n + 1)[n + m(m - 1)]$ 。

证明: 用 $R(B_{m,n})$ 表示棒棒糖图 $B_{m,n}$ 中所有连通子图的总数, 用 N_i 表示由 i 个顶点构成的连通子图总数。如果存在单射 f 为图 $B_{m,n}$ 的一个IC-着色, 那么只有当任意两个连通子图 H_i 和 H_j , 满足 $f(H_i) \neq f(H_j)$ 时, 才有 $M(B_{m,n}) = R(B_{m,n})$, 否则, $M(B_{m,n}) < R(B_{m,n})$ 。显然 $R(B_{m,n})$ 是 $M(B_{m,n})$ 的一个上界。下面只要推导 $R(B_{m,n})$ 公式即可。

$R(B_{m,n})$ 的计算分成3个部分:

1) 计算棒棒糖图 $B_{m,n}$ 中圈 C_m 的连通子图总数, 其值用 R_1 表示。因为在圈 C_m 中 $N_1, N_2, \dots, N_{m-1} = m, N_m = 1$, 所以

$$R_1 = R(C_m) = R\{B_{m,n}[V(C_m)]\} = m(m - 1) + 1$$

2) 计算棒棒糖图 $B_{m,n}$ 中路 P_{n-1} 的连通子图总数, 其值用 R_2 表示。因为在路 P_{n-1} 中 $N_1 = n - 1$,

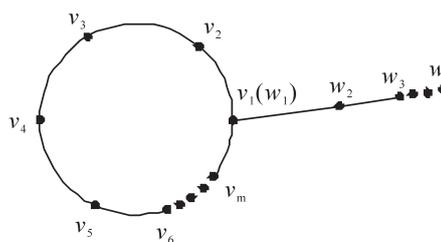


图1 棒棒糖图 $B_{m,n}$

Fig. 1 Lollipop graph $B_{m,n}$

$N_2 = n - 2, \dots, N_{n-1} = 1$, 所以

$$R_2 = R(P_{n-1}) = R\{B_{m,n}[V(P_{n-1})]\} = \sum_1^{n-1} i = \frac{1}{2}n(n-1)$$

3) 计算棒棒糖图 $B_{m,n}$ 中圈 C_m 和路 P_n 交界的连通子图总数, 其值用 R_3 表示, 在圈中包含第一个顶点的连通子图个数为 $\frac{1}{2}m(m-1) + 1$, 分别和路 P_{n-1} 的各个顶点相连, 所以

$$R_3 = \frac{1}{2}(m(m-1) + 1)(n-1)$$

综上所述

$$R(B_{m,n}) = R_1 + R_2 + R_3 = \frac{1}{2}(n+1)[n + m(m-1)]$$

所以上界得证。

定理2 在棒棒糖图 $B_{m,n}$ 中, 圈 C_m 的顶点集 $V(C_m) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, 其中顶点 v_i 的着色为 $f(v_i)$, 路 P_n 的顶点集 $V(P_n) = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$, 其中顶点 w_i 的着色为 $f(w_i)$, 有以下结论。

- 1) 当 $m = 3, n = 1, 2, \dots, 6$ 时, 有 $M(B_{3,n}) = 5n + 2$ 。
- 2) 当 $m = 4, n = 1, 2, \dots, 5$ 时, 有 $M(B_{4,1}) = 13, M(B_{4,2}) = 21, M(B_{4,3}) = 26, M(B_{4,4}) = 34, M(B_{4,5}) = 40$ 。
- 3) 当 $m = 5, n = 1, 2, 3, 4$ 时, 有 $M(B_{5,1}) = 21, M(B_{5,2}) = 31, M(B_{5,3}) = 39, M(B_{5,4}) = 48$ 。

具体着色如图2所示。

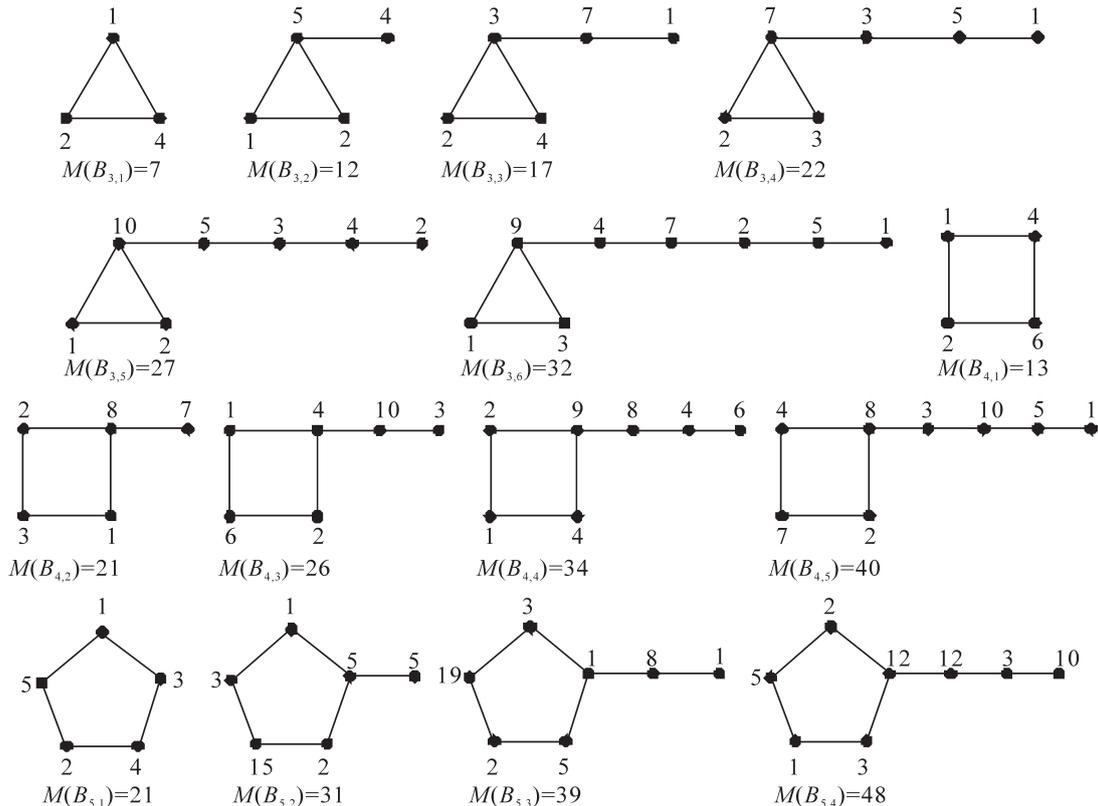


图2 一些棒棒糖图 $B_{m,n}$ 的 IC-指数和极大 IC-着色

Fig.2 The IC-indices and maximal IC-colorings of several lollipop graphs $B_{m,n}$

证明: 分别对 $m = 3, 4, 5$ 中的一种情况进行证明, 同理可证其他情况。

- 1) 当 $m = 3, n = 6$, $\{f(v_1), f(v_2), f(v_3)\} = \{9, 1, 3\}, \{f(w_1), f(w_2), \dots, f(w_6)\} = \{9, 4, 7, 2, 5, 1\}$, 求证

$$M(B_{3,6}) = 32$$

下面给出分别由 $1, 2, \dots, 8$ 个点构成的连通子图的IC-着色

$$\begin{cases} f(H_1): 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9 \\ f(H_2): 4, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 11 \\ f(H_3): 8, 13, 14, 16, 20 \\ f(H_4): 15, 17, 18, 21, 22, 23 \\ f(H_5): 19, 23, 24, 25, 27 \\ f(H_6): 26, 28, 30 \\ f(H_7): 29, 31 \\ f(H_8): 32 \end{cases}$$

以上数遍历 $[1, 32]$, 所以 $f(B_{3,6})=32$, 即对任意 $j(1 \leq j \leq f(B_{3,6})=32)$, 都存在图 $B_{3,6}$ 的连通子图 H 使得 $j=f(H)$ 。又因为计算机验证得出不存在 $f(B_{3,6})=33$ 的IC-着色, 所以

$$M(B_{3,6})=32$$

2) 当 $m=4, n=5$, $\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_4)\}=\{8, 2, 7, 4\}, \{f(w_1), f(w_2), \dots, f(w_5)\}=\{8, 3, 10, 5, 1\}$, 求证

$$M(B_{4,5})=40$$

下面给出分别由 $1, 2, \dots, 8$ 个点构成的连通子图的IC-着色

$$\begin{cases} f(H_1): 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10 \\ f(H_2): 6, 9, 10, 11, 12, 13, 15 \\ f(H_3): 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 \\ f(H_4): 17, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26 \\ f(H_5): 24, 27, 28, 30, 32 \\ f(H_6): 29, 31, 32, 34, 35, 37 \\ f(H_7): 33, 36, 38, 39 \\ f(H_8): 40 \end{cases}$$

以上数遍历 $[1, 40]$, 所以 $f(B_{4,5})=40$, 即对任意 $j(1 \leq j \leq f(B_{4,5})=40)$, 都存在图 $B_{4,5}$ 的连通子图 H 使得 $j=f(H)$ 。又因为计算机验证得出不存在 $f(B_{4,5})=41$ 的IC-着色, 所以

$$M(B_{4,5})=40$$

3) 当 $m=5, n=4$, $\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_5)\}=\{12, 2, 5, 1, 3\}, \{f(w_1), f(w_2), \dots, f(w_4)\}=\{12, 12, 3, 10\}$, 求证

$$M(B_{5,4})=48$$

下面给出分别由 $1, 2, \dots, 8$ 个点构成的连通子图的IC-着色:

$$\begin{cases} f(H_1): 1, 2, 3, 5, 10, 12 \\ f(H_2): 4, 6, 7, 13, 14, 15, 24 \\ f(H_3): 8, 9, 16, 17, 19, 25, 26, 27 \\ f(H_4): 11, 18, 20, 21, 22, 28, 29, 30, 31, 37 \\ f(H_5): 23, 30, 31, 32, 33, 34, 39, 40 \\ f(H_6): 33, 35, 36, 37, 41, 42, 44 \\ f(H_7): 38, 43, 45, 46, 47 \\ f(H_8): 48 \end{cases}$$

以上数遍历 $[1, 48]$, 所以 $f(B_{5,4})=48$, 即对任意 $j(1 \leq j \leq f(B_{5,4})=48)$, 都存在图 $B_{5,4}$ 的连通子图 H 使得 $j=f(H)$ 。又因为计算机验证得出不存在 $f(B_{5,4})=49$ 的IC-着色, 所以

$$M(B_{5,4})=48$$

结论分析:借助计算机编程和理论分析等方法,得到了定理 1、2,即得到棒棒糖图 $B_{m,n}$ 的 IC-指数的一个上界和一些阶数较小的棒棒糖图 $B_{m,n}$ 的 IC-指数。由定理 2 知道,当 $m=3, n=1, 2, \dots, 6$ 时,有 $M(B_{3,n})=5n+2$ 。而对于 $m=4$ 和 $m=5$ 的棒棒糖图 $B_{m,n}$,其 IC-着色 $M(B_{4,n}), M(B_{5,n})$ 关于 n 的函数关系并不显著。因此我们猜想:

猜想:对于任意正整数 n ,则有 $M(B_{3,n})=5n+2$ 。

3 算法

棒棒糖图 $B_{m,n}$ 是由圈 C_m 和路 P_n 共同组成,而圈和路的 IC-指数和着色都没有发现明确规律,所以要确定棒棒糖图 $B_{m,n}$ 的 IC-指数是困难的。因此,我们采用计算机编程来求解棒棒糖图 $B_{m,n}$ 的 IC-指数与相应 IC-着色,也就是要找到 $n+m-1$ 个正整数 $x_1, x_2, \dots, x_m; y_2, y_3, \dots, y_n$, 其中 $x_i=f(v_i), y_i=f(w_i)$, $\sum_{i=1}^m v_i \in C_m, \sum_{j=2}^n w_j \in P_n, v_1=w_1$, 使得其满足以下几个条件:

- 1) 存 1 性,至少存在一点 $x_i=1$ 或 $y_i=1$ 。
- 2) 有界性, $\max\{M(B_{m-1,n}), M(B_{m,n-1})\} \leq \sum_{i=1}^m x_i + \sum_{j=2}^n y_j \leq \frac{1}{2}(n+1)[n+m(m-1)]$ 。
- 3) 完整性,集合 $f(H_i) = \left\{ 1, 2, 3, \dots, \left(\sum_{i=1}^m x_i + \sum_{j=2}^n y_j \right) \right\}$ 。

算法步骤:

第 1 步 枚举 $n+m-1$ 个正整数 $x_1, x_2, \dots, x_m; y_2, y_3, \dots, y_n$, 并保证其满足条件 1) 2)。

第 2 步 分成三部分计算所有的着色:

在圈 C_m 中,循环求和,求出

$$\begin{cases} f(H_1): x_1, x_2, \dots, x_m \\ f(H_2): x_1 + x_2, x_2 + x_3, \dots, x_m + x_1 \\ \dots \\ f(H_m): x_1 + x_2 + \dots + x_m \end{cases}$$

在路 P_n 中,单向求和,求出

$$\begin{cases} f(H_1): y_2, y_3, \dots, y_n \\ f(H_2): y_2 + y_3, y_3 + y_4, \dots, y_{n-1} + y_n \\ \dots \\ f(H_{n-1}): y_2 + y_3 + \dots + y_n \end{cases}$$

在交界区域,求出

$$\begin{cases} \text{圈 } C_m \text{ 中 } 1 \text{ 个顶点和路 } P_n \text{ 的连通的图 } x_1 + y_2, x_1 + y_2 + y_3, \dots, x_1 + y_2 + \dots + y_n \\ \text{圈 } C_m \text{ 中 } 2 \text{ 个顶点和路 } P_n \text{ 的连通子图 } x_2 + x_1 + y_2, \dots, x_2 + x_1 + \dots + y_n; \\ \qquad \qquad \qquad x_m + x_1 + y_2, \dots, x_m + x_1 + \dots + y_n \\ \dots \\ \text{圈 } C_m \text{ 中 } m \text{ 个顶点和 } P_n \text{ 路的连通子图 } x_m + x_{m-1} \dots + x_1 + y_2; \dots; x_m + x_{m-1} \dots + \\ \qquad \qquad \qquad x_1 + y_2 + \dots + y_n \end{cases}$$

第 3 步 若第 2 步中所求结果满足条件 3), 则保留 $x_1, x_2, \dots, x_m; y_2, y_3, \dots, y_n$ 的取值并记下此时的 IC-指数

$$\sum_{i=1}^m x_i + \sum_{j=2}^n y_j$$

第 4 步 从第 3 步中得到符合条件的结果中,筛选出最大 IC-指数和 IC-着色。

参考文献:

- [1] ALTER R, BERNTT J A. A postage stamp problem [J]. Amer Math Monthly, 1980,87:206-210.
- [2] HEIMER R L, LANGNBACH H. The Stamp Problem [J]. J Recreational Math, 1974,7:235-250.
- [3] LUNON W F. A Postage stamp problem [J]. Comput J, 1969,12:377-380.
- [4] 程卓,王殊,屈晓旭,等.基于IC着色的认识差分调频系统多址原理[J].武汉大学学报:理学版,2010,56(4):1-7.
- [5] SALEHI E, LEE S, KHATIRINEJAD M. IC-colorings and IC-indices of graphs [J]. Discrete Mathematics, 2005, 299:297-310.
- [6] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory with applications[M]. Amsterdam:Elsevier Science Publishing Co. Inc, 1976:156-160.
- [7] PENRICE S G. Some new graph labeling problems:A preliminary report[J]. DIMACS Technical Reports, 1995,95(7):1-9.
- [8] 周娟,谢承旺,徐保根,等.关于圈 C_n 的 IC-着色和 IC-指数[J]. 华东交通大学学报, 2012,29(4):64-68.
- [9] SHIUE CL, FU H L. The IC-indices of complete bipartite graphs[J]. The Electronic Journal of Combinatorics, 2008,15(43):1-13.
- [10] 陈剑峰, 杨大庆. 双星图的 IC-着色[J]. 纯粹数学与应用数学, 2012,28(2):201-212.
- [11] 陈剑峰, 杨大庆. 双星图的 IC-指数[J]. 数学的实践与认识, 2013,43(7):132-140.
- [12] 徐保根. 关于连通图的 IC-着色[J]. 华东交通大学学报, 2006,23(1):134-136.
- [13] 徐保根. 图的控制理论[M]. 北京: 科学出版社, 2006:33-37.

IC-indices and IC-colorings of Lollipop Graphs

Zhang Chuwen, Wang Ligong

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: The lollipop graph $B_{m,n}$ is a connected graph obtained by identifying any vertex of a cycle C_m and a vertex of degree 1 of a path P_n . This paper studies the IC-indices and maximal IC-colorings of lollipop graphs. An upper bound of the IC-index of the lollipop graph $B_{m,n}$ is obtained. By using a computer search, the IC-indices and maximal IC-colorings of several lollipop graphs $B_{m,n}$ are obtained. The results are as follows: When $m=3$ and $n=1,2,\dots,6$, $M(B_{3,n})=5n+2$; When $m=4$, $M(B_{4,1})=13$, $M(B_{4,2})=21$, $M(B_{4,3})=26$, $M(B_{4,4})=34$. When $m=5$, $M(B_{5,1})=21$, $M(B_{5,2})=31$, $M(B_{5,3})=39$, $M(B_{5,4})=48$.

Key words: IC-coloring; IC-index; lollipop graphs