

文章编号:1005-0523(2015)02-0062-05

# 需求不确定状态下的航班机型分配问题研究

张兴香,朱星辉

(南京航空航天大学民航学院,江苏 南京 211106)

**摘要:**机型分配问题是飞机、机组排班问题的基础,是整个航班计划中的关键环节。文章针对市场需求高度不确定的情况,建立了两阶段随机混合整数规划模型,其中第一阶段考虑机族层次的分配,确保每个航节均分配1种且仅有1种机族,第二阶段根据进一步的市场需求信息及预测,考虑每个航节所分配的机族内具体机型的分配问题。针对建立的模型,设计了Benders分解算法,并通过算例验证了该模型较传统确定型模型更有效性,能够为航空公司的机型分配提供决策支持。

**关键词:**机型分配;随机需求;两阶段随机混合整数规划

**中图分类号:**F560

**文献标志码:**A

机型分配问题(FAP)是指在已知班期时刻表、机队结构、机型数量及每种机型飞每条航线的运营成本等条件下,确定每个航班用什么机型来飞,使其总利润最大或总成本最小的问题。航空公司对机型分配的完整决策过程通常包括机型初分配、战略性的机型再分配以及飞机交换三个相继阶段。文章旨在对机型初分配阶段进行研究,分配的结果可以为机组排班问题提供决策支持,同时也为后续的机型再分配阶段提供参考。

有关机型分配的研究方法经历了一个从简单到复杂,从理想化模型到实用性研究的演变过程。最早的机型分配研究可以追溯到Abara<sup>[1]</sup>和Berge等<sup>[2]</sup>,其研究是建立在市场需求确定的假设基础上,建立确定型机型分配模型进行研究。然而在实际运营过程中,市场需求并不确定,这给航空公司制定航班计划带来了巨大挑战。2009年,考虑到市场需求预测的准确性随着离港日期的迫近有所提高,Jiang和Barnhart<sup>[3]</sup>根据航班客票销售情况动态预测市场需求,将重新调整航班时刻作为一种新的动态调整机制,建立了一个综合航班时刻再调整和机型再分配的优化模型。2010年,Sherali等<sup>[4]</sup>构建了一个考虑航班计划制定的机型分配模型,并对大规模规划模型进行了详细的Polyhedral分析和Benders分解。由于燃油成本在航空公司整个运营成本中占据较大比重,2012年,Naumann<sup>[5]</sup>在燃油价格和市场需求均不确定的情况下,设计了一个两阶段随机规划的机型再分配模型。Pilla等<sup>[6]</sup>在Boeing公司提出的需求驱动分配理念的基础上,将航班机型分配划分为考虑机组——飞机分配兼容性的航班机型分配与提高旅客需求捕获水平而进行机型交换的两个阶段,并以此构建航班机型分配的两阶段随机规划模型。针对两阶段随机规划问题,鉴于传统的L-型算法收敛速度缓慢,Pilla提出应用自适应多切割聚合算法对模型进行求解。2013年,Jiang等<sup>[7]</sup>在其2009年研究的基础上作了进一步研究,提出一个针对非航班波式运行的枢纽机场的鲁棒性航班计划模型。Cadaro<sup>[8]</sup>在Jiang<sup>[7]</sup>模型的基础上,考虑旅客再捕获效应并作了进一步研究。Sherali等<sup>[9]</sup>在机型分配问题中,考虑航班计划中的其他环节,如柔性的航班时刻、需求再捕获效应、航节的选择以及多种票价等问题,并采用分离

**收稿日期:**2014-10-21

**基金项目:**国家自然科学基金资助项目(71201081);中央高校基本科研业务费资助项目(NS2012114)

**作者简介:**张兴香(1988—),女,硕士研究生,主要从事交通运输系统优化与仿真,航班计划优化。

**通讯作者:**朱星辉(1978—),男,讲师,主要从事系统分析与建模、管理智能化研究。

技术对模型进行预处理。此外,Sherali等<sup>[10]</sup>人在航班计划综合模型中进一步考虑飞机维修路径问题和经停航班问题,并利用有效不等式的引入提高了模型的可解性。

综合分析上述研究成果,航空公司制定机型分配计划是一项规模巨大且复杂的系统工程,是NP-Hard问题,针对制定机型分配计划期间市场需求处于高度不确定的特性,构造了一个两阶段随机混合整数规划模型,其中第一阶段是机族分配阶段(一种机族可能包括若干种飞行机组可以互换的机型),即确定每个航节所分配到的机族;第二阶段是机型分配阶段,主要考虑根据不同的需求情景在第一阶段指定的机族内选择具体的机型分配给相应航节。

## 1 模型建立

机型分配问题的建模基础通常有连接网络<sup>[1]</sup>和时空网络<sup>[2]</sup>,选择时空网络为基础对机型分配问题进行研究,其节点表示航班到达或离岗,弧(边)包括航班弧、地面弧和过夜弧。

### 1.1 模型符号说明

在构建模型之前,首先对模型涉及的参数及变量予以说明:

集合。 $K$ :整个机队中所有机族的集合, $k \in K$ 。 $T$ :整个机队中所有机型的集合, $t \in T$ 。 $T_k$ :属于机族 $k$ 的机型集合,有 $T_k \subseteq T$ 。 $N_t$ :机型 $t$ 的航班网络中节点的集合, $n \in N_t$ 。 $G_t$ :机型 $t$ 的航班网络中地面弧的集合, $g \in G_t$ 。 $L$ :所有航节的集合, $l \in L$ 。 $L_k$ :分配给机族 $k$ 的航节集合,有 $L_k \subseteq L$ 。 $\Pi$ :所有旅客行程的集合, $i \in \Pi$ 。 $\Pi(l)$ :所有包含航节 $l$ 的旅客行程集合,有 $\Pi(l) \subseteq \Pi$ 。 $O_t$ :表示机型 $t$ 通过时间线的弧线集合,包括航班弧和地面弧,理论上时间线可以任意选择,因为任何时刻都需要保持飞机流平衡,为方便计算,通常选择空中飞机最少的时候作为时间线。 $S$ :市场需求情景集合, $s \in S$ 。

变量。 $z$ :第一阶段决策变量向量。 $z_{lk}$ :第一阶段决策变量,当航节 $l$ 由机族 $k$ 执飞时,等于1,否则为0,有 $z_{lk} \subseteq z$ 。 $x^s$ :表示在需求情景 $s$ 下,第二阶段决策变量向量。 $x_{lt}^s$ :第二阶段决策变量,在需求情景 $s$ 下,当航节 $l$ 由机型 $t$ 执飞时,等于1,否则为0,有 $x_{lt}^s \subseteq x^s$ 。 $y_{gt}^s$ :表示在市场需求情景 $s$ 下,机型 $t$ 有地面弧 $g$ 。 $P_t^s$ :表示在市场需求情景 $s$ 下,机型 $t$ 的不可用性因子。 $q_i^s$ :表示在市场需求情景 $s$ 下,旅客行程 $i$ 上可接受的需求变量。

参数及其它标识。 $\mu^s$ :表示在市场需求情景 $s$ 下,所有旅客行程的需求向量。 $\mu_i^s$ :表示在市场需求情景 $s$ 下,旅客行程 $i$ 上的需求,有 $\mu_i^s \subseteq \mu^s$ 。 $c_{lt}$ :表示用机型 $t$ 执飞航节 $l$ 的成本。 $cap_t$ :表示机型 $t$ 的座位数。 $f_i^s$ :表示在市场需求情景 $s$ 下,旅客行程 $i$ 的平均票价。 $p^s$ :表示市场需求情景 $s$ 发生的概率值,有 $\sum_{s \in S} p^s = 1$ 。 $B_t$ :表示机型 $t$ 中可用的飞机数量。 $\psi_t$ :表示机型 $t$ 在不可用时的惩罚成本。 $v$ :第一阶段的目标函数值,即整个模型的目标函数值。 $H_s(z, \mu^s)$ :第二阶段在需求情景 $s$ 下的目标函数值。 $bf_{ln} = \pm 1$ ,表示航节 $l$ 开始或者结束于机型 $t$ 的航班网络节点 $n$ , $l \in L$ , $n \in N_t$ 。 $bg_{gn} = \pm 1$ ,表示地面弧 $g$ 开始或者结束于机型 $t$ 的航班网络节点 $n$ , $g \in G_t$ , $n \in N_t$ 。

### 1.2 建立模型

根据上述参数及变量,建立机型分配两阶段随机混合整数规划模型,简称“两阶段模型”,第一阶段(P1)是机族分配问题,第二阶段(P2)根据不同的需求情景,同一机族内的机型分配问题。两阶段模型如下:

$$(P1) \quad \min \quad v = \sum_{s \in S} p^s H_s(z, \mu^s) \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{k \in K} z_{lk} = 1 \quad \forall l \in L \quad (2)$$

$$z_{lk} \subseteq z, \quad z \in \{0, 1\} \quad (3)$$

对于每个需求情景 $s \in S$ ,有:

$$(P2) \quad \min \quad H_s(z, \mu^s) = \sum_{l \in L} \sum_{t \in T} c_{lt} x_{lt}^s + \sum_{t \in T} \psi_t P_t^s - \sum_{i \in \Pi} f_i^s q_i^s \quad (4)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{t \in T_k} x_{lt}^s = z_{lk} \quad \forall l \in L, k \in K \quad (5)$$

$$\sum_{l \in L} b f_{ln} x_{lt}^s + \sum_{g \in G_t} b g_{gn} y_{gt}^s = 0 \quad \forall n \in N_t, \forall t \in T \quad (6)$$

$$\sum_{l \in O_t} x_{lt}^s + \sum_{g \in O_t} y_{gt}^s - P_t^s \leq B_t \quad \forall t \in T \quad (7)$$

$$\sum_{i \in \Pi(l)} q_i^s \leq \sum_{t \in T} \text{cap}_t x_{lt}^s \quad \forall l \in L \quad (8)$$

$$q_i^s \leq \mu_i^s \quad \forall i \in \Pi, \mu_i^s \subseteq \mu^s \quad (9)$$

$$x_{lt}^s \subseteq x^s, x^s \in \{0, 1\}, (y_{gt}^s, q_i^s, P_t^s) \geq 0 \quad (10)$$

式(1)为期望总利润最大化目标函数;式(2)为第一阶段覆盖约束,要求每个航节分配1种且只有1种机族;式(3)为第一阶段变量取值范围约束;式(4)为第二阶段目标函数,要求在需求情景  $s$  下,期望利润最大化;式(5)为第二阶段覆盖约束,要求每个航节从自身所分配到的机族里分配1种且只有1种机型;式(6)为航班网络流守恒约束;式(7)为每种机型的飞机使用数量不能超过该机型的可用飞机总数;式(8)为座位数约束;式(9)为需求约束;式(10)为第二阶段变量取值范围约束。

如果将市场需求看成是确定性的,(P1)和(P2)可以合并成一个传统的确定型模型。

## 2 算法分析

针对大规模的随机规划问题,多使用启发式算法和智能算法求解。Benders 提出求解混合线性和非线性整数规划问题的分解算法。此算法的优点在于不但可以求得最优解或渐近最优解,而且可以由计算的上界和估计的下界评价所求解的质量。根据两阶段模型特点,采用 Benders 算法求解两阶段模型。Benders 分解算法的基本思想是:将原问题剖分成相对简单的主问题和容易求解的子问题,通过不断迭代,用子问题的对偶信息构造 Benders 切,作为新的约束条件加入到主问题中,继续迭代,直到获得原问题的最优解或满意解。

为了简化计算,将上述模型中的二进制变量  $x^s$  松弛为连续变量( $z$  变量保持不变)。设  $\phi_l^{1s}$ 、 $\phi_n^{2s}$ 、 $\phi_t^{3s}$ 、 $\phi_l^{4s}$  和  $\phi_i^{5s}$  分别表示模型(P2)中式(5)~(9)对应的对偶变量,则由(P2)的对偶问题可以得到一个 Benders 切平面如下:

$$\eta^s \geq \sum_{k \in K} \sum_{l \in L_k} z_{lk} \phi_l^{1s} + \sum_{t \in T} B_t \phi_t^{3s} + \sum_{i \in \Pi} \mu_i^s \left( \max_{k \in K^i} \phi_i^{5ks} \right) \quad (11)$$

其中  $K^i \equiv \{k \in K | i \in \bigcup_{l \in L^k} \Pi(l)\}$ 。每次迭代用式(11)产生一个 Benders 切,并加入到(P1)的约束条件中,得到主问题模型(P3),用(P3)的目标函数值作为估计下限。

$$(P3) \quad \min \quad v = \sum_{s \in S} p^s \eta^s \quad (12)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{k \in K} z_{lk} = 1 \quad \forall l \in L \quad (13)$$

$$\eta^s \geq \sum_{k \in K} \sum_{l \in L_k} z_{lk} \phi_l^{1s} + \sum_{t \in T} B_t \phi_t^{3s} + \sum_{i \in \Pi} \mu_i^s \left( \max_{k \in K^i} \phi_i^{5ks} \right) \quad (14)$$

$$z_{lk} \subseteq z, z \in \{0, 1\} \quad (15)$$

求解算法步骤:

**步骤1** 初始化参数。设原问题的上、下限分别为:  $ub = 0, lb = -\infty$ ;上、下限的相对误差值为  $\varepsilon$ ;迭代计数变量  $m = 0$ ,最大迭代次数为  $cut$ 。

**步骤2** 满足下面条件之一终止迭代。  $(ub - lb)/ub \leq \varepsilon$  , 或者  $m = cut$  ; 否则, 继续下面的步骤。

**步骤3** 解主问题(P3), 将求出的目标函数值作为新的下限, 用解  $z$  更新子问题及其对偶问题中的相应值; 对于随机需求的每一个情景, 解子问题及其对偶问题。

**步骤4** 由式(11), 产生一个新的Benders切平面, 并把它加入到主问题(P3)中。

**步骤5** 如求出(P1)的现行目标函数值  $v^{inc} < ub$  , 按  $ub = v^{inc}$  修正上限, 然后重新执行步骤2。

在利用Benders分解算法求解过程中, 为了加快求解速度, 针对式(7)可用性约束设计增加一个聚合可用性割, 如式(16)所示。

$$\sum_{t \in \bigcup_{k \in K} O_k} z_{tk} \leq \sum_{t \in T_k} B_t \quad \forall k \in K, \tag{16}$$

式中,  $O_k$  表示机型  $t$  在一天中繁忙时刻(如 15:00)的弧线集合, 选择繁忙时刻意味着航班弧远远多于地面弧, 此时地面弧可忽略不计。聚合可用性割(16)的加入能够在较短的时间内获得更高质量的  $z$  解, 减少求解过程的总耗时。

### 3 实例分析

设某航空公司的机队分两种机族  $k_1, k_2$ , 其中机族  $k_1$  包含机型  $t_1, t_2$ , 机族  $k_2$  包含机型  $t_3, t_4$ , 而这四种机型的舱位容量分别为 121 座, 136 座, 141 座和 124 座, 飞机架数均为 4 架, 且假设所有飞机都是可用的, 因此  $\psi_i = \infty, P_i^s = 0$ 。取  $\Pi = L = \{l_1, l_2, l_3, l_4\}$ , 即每条旅客行程只包括一个航节。  $S = \{s_1, s_2\}$ , 即包含两种需求情景, 且每种需求情景出现的概率分别为  $P^{s_1} = 0.6, P^{s_2} = 0.4$ , 机型成本、票价和市场需求如表 1 所示。表 1 中最后两列为两种情景的平均票价和市场需求。

表 1 模型中用到的参数值  
Tab.1 Parameters' values in the model

航节	成本				情景 1		情景 2		平均值	
	$c_{k_1}$	$c_{k_2}$	$c_{k_3}$	$c_{k_4}$	$f_i^1$	$\mu_i^1$	$f_i^2$	$\mu_i^2$	$\bar{f}_i$	$\bar{\mu}_i$
$l_1$	9 000	18 000	19 000	10 000	450	90	600	140	510	110
$l_2$	9 000	17 000	18 000	10 000	530	100	700	150	598	120
$l_3$	8 000	17 000	18 000	9 000	480	90	640	140	544	110
$l_4$	8 000	18 000	19 000	9 000	580	90	730	140	640	110

将以上数据代入两阶段模型, 用平均值代入确定型模型, 通过 MATLAB 7.0 编程求解, 所得分配结果如表 2 所示。

表 2 确定型需求和不确定型需求的分配结果  
Tab.2 Assignment results under certain and uncertain demands

航节	两阶段模型			确定型模型	
	机族	情景 1 下机型分配	情景 2 下机型分配	机族	机型
$l_1$	$k_2$	$t_4$	$t_3$	$k_1$	$t_1$
$l_2$	$k_2$	$t_4$	$t_3$	$k_1$	$t_1$
$l_3$	$k_1$	$t_1$	$t_2$	$k_1$	$t_1$
$l_4$	$k_1$	$t_1$	$t_2$	$k_1$	$t_1$

由表 2 中的分配结果可以看出, 两阶段模型用到了两种机族  $k_1$  和  $k_2$ , 且在两种需求情景下的机型分配方案大有不同, 而确定型模型中只用了一种机族  $k_1$ , 方案欠缺灵活性。此外, 由两阶段模型和确定型模型

计算得出的目标函数值分别是-290 636和-274 160,通过比较可以得出两阶段模型比确定型模型的利润多16476。从以上得出的机型分配方案和目标函数值均可看出本文建立的两阶段模型比确定型模型较优。

#### 4 结论

针对机型分配模型研究,传统的确定型模型并不符合市场需求高度不确定的实际情况,因此,它只能作为理论研究,缺乏实际可操作性。

1) 建立了一个两阶段随机混合整数规划模型,不仅反映了机型分配阶段需求不确定的实际情况,且第一阶段的机族分配结果足以机组排班提供决策支持,而第二阶段不同需求情景下的机型分配结果也为后期的机型再分配阶段提供参考。

2) 由于两阶段模型的复杂性,本文中设计了收敛速度较快的Benders分解算法。

3) 为了对两种模型的优劣有一个清晰而直观的认识,在最后设计了一个小规模算例,证明两阶段模型较确定型模型更具灵活性和有效性。在航空公司的实际运营中,由于机型种类和飞机数量繁多,制约机型分配方案的条件也非常多,因此,有关机型分配方面的研究还有待进一步的深入和提高。

#### 参考文献:

- [1] ABARA J. Applying integer linear programming to the fleet assignment problem[J]. *Interfaces*, 1989,19(4) 20-28.
- [2] BERGE M E, HOPPERSTAD C A. Demand driven dispatch: A method for dynamic aircraft capacity assignment, models and algorithms[J]. *Operational Research*, 1993,41(8):153-168.
- [3] JIANG H, BARNHART C. Dynamic Airline Scheduling[J]. *Transportation Science*, 2009,43(3):336-354.
- [4] SHERALI H D, KI-HWAN BAE, MOHAMED HAOUARI. Integrated airline schedule design and fleet assignment: polyhedral analysis and benders' decomposition aApproach[J]. *Inform Journal on Computing*, 2010,22(4):500-513.
- [5] NAUMANN M, SUHL L, FRIEDEMANN M. A stochastic programming model for integrated planning of refueling and financial hedging under fuel price and demand uncertainty[J]. *Proceedia Social and Behavioral Sciences*, 2012,54: 47-55.
- [6] PILLA V L, ROSENBERGER J M, VICTORIA CHEN, et al. A multivariate adaptive regression splines cutting plane approach for solving a two-stage stochastic programming fleet assignment model[J]. *European Journal of Operational Research*, 2012,216: 162-171.
- [7] JIANG H, BARNHART C. Robust airline schedule design in a dynamic scheduling environment[J]. *Computers and Operations Research*, 2013,40(3):831-840.
- [8] CADARSO L, MARÍN A. Robust passenger oriented timetable and fleet assignment integration in airline planning[J]. *Journal of Air Transport Management*, 2013,26:44-49.
- [9] SHERALI H D, KI-HWAN BAE, MOHAMED HAOUARI. A benders decomposition approach for an integrated airline schedule design and fleet assignment problem with flight retiming, schedule balance, and demand recapture[J]. *Annals of Operations Research*, 2013, 210(1):213-244.
- [10] SHERALI H D, KI-HWAN BAE, MOHAMED HAOUARI. An integrated approach for airline flight selection and timing, fleet assignment, and aircraft routing[J]. *Transportation Science*, 2013,47(4):455-476.

(下转第94页)

## Coordinating Strategy of Competitive Closed-Loop Supply Chain Based on Shapley Method

Guo Junhua, Du Yanhang

(School of Economics and Management, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

**Abstract:** This study establishes the closed-loop supply chain model composed by two competitive manufactures and a single retailer. It compares the profits under different decisions and adopts Shapley method to coordinate the system. Findings are as follows: Decision variables for two competitive manufactures are equal when they have the same demand function of products and recovery function of waste products based on the same cost; The system profit is highest under centralized decision strategy when the rate of product demanding, recycling of waste products and recovery is the most efficient. The Shapley model can thus optimize the system in order to realize Pareto improvement. In traditional forward supply chain, the total profit of the system increases with increasing sensitive varieties of the retail price. On the contrary, in reverse supply chain, the gross profit decreases with the increase of price sensitive varieties.

**Key words:** competition; closed-loop supply chain; coordination; Shapley

(责任编辑 刘棉玲)

(上接第 71 页)

## Research on Airline Fleet Assignment under Stochastic Demands

Zhang Xingxiang, Zhu Xinghui

(College of Civil Aviation, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 211106, China)

**Abstract:** The airline fleet assignment is the basis of aircraft scheduling decisions and crew scheduling decisions, which is the most crucial link of the airline flight scheduling. Aiming at the highly uncertain market demands, this study proposes a two-stage stochastic mixed-integer programming approach. The first stage makes only family-level assignment decisions and ensures that each flight leg is covered by exactly one aircraft family. The second stage performs the detailed assignments of fleet types within the allotted family to each leg according to forecasted market demands. In the model, the Benders decomposition algorithm is developed. The instance verifies the proposed model is more effective than the traditional ones and it can provide the foundations for decision making of airline fleet assignment.

**Key words:** fleet assignment; stochastic demand; two-stage stochastic mixed-integer programming

(责任编辑 王建华 李萍)