DOI:10.16749/j.cnki.jecjtu.2015.03.009

文章编号:1005-0523(2015)03-0023-09

交叉迭代算法求解车辆-轨道非线性耦合方程的收敛性讨论

吴神花,雷晓燕

(华东交通大学铁路环境振动与噪声教育部工程研究中心,江西 南昌 330013)

摘要:运用有限元法建立车辆-轨道非线性耦合系统动力分析模型,该模型将车辆-轨道系统以轮轨接触为界限分成车辆,轨道两个子系统并通过轮轨接触力的平衡和位移协调条件耦合在一起。通过交叉迭代算法分别求解车辆,轨道系统的运动方程,此时每一步都需要判断使之满足轮轨几何相容条件和相互作用力平衡条件,这样对时间步长的选取要求较高,但是如果时间步长超过某一限值,易于导致迭代失败。引入了修正因子对轮轨接触力进行修正,这不仅可以放宽对时间步长的选取,还能加速收敛,提高计算效率。为验证算法的正确性,不仅进行了算例验证,还给出了引入修正因子的交叉迭代算法求解车辆-轨道非线性耦合系统动力学方程的算例,算例中考虑了不同的时间步长和不同的修正因子对交叉迭代算法收敛速度的影响。计算结果表明引入修正因子的交叉迭代算法具有程序编制简单、收敛速度快、用时少、精度高的优点。

关键词:修正因子;时间步长;交叉迭代算法;车辆-轨道非线性耦合

中图分类号:U213.2+12　　**文献标志码:**A

随着客运高速化、货运重载化和运输密度的大幅提高,车辆与轨道系统动力学问题更加突出,也日趋复杂。科研工作者对于车辆-轨道动力学理论研究也越来越深入,并取得了一系列的成果,例如翟婉明[1]建立了车辆-轨道耦合动力学统一模型;雷晓燕[2-5]采用解析的波数-频域法建立了轨道结构单层或多层梁模型,分析了高速列车引起的轨道和大地振动;向俊,赫丹,曾庆元[6]针对无碴轨道结构提出了横向有限条与板段单元动力分析新模型。将高速列车的动车及拖车均离散为具有二系悬挂的多刚体系统,基于弹性系统动力学总势能不变值原理及形成系统矩阵的“对号入座”法则,建立高速列车-无碴轨道时变系统竖向振动矩阵方程,采用 Wilson-θ 法求解;张斌,雷晓燕等[7-8]建立列车了列车-轨道-路基耦合系统动力分析模型,提出车辆单元和轨道单元。利用车辆单元和轨道单元,考虑列车速度、路基刚度以及过渡段轨道不平顺和路基刚度综合影响因素对轨道过渡段动力特性进行分析;夏禾、曹艳梅等[9]利用解析的波数-频域法建立了列车-轨道-大地耦合模型,将轨道-大地系统考虑为三维层状大地上周期性支撑的欧拉梁模型,也分析了移动列车轴荷载和轨道不平顺引起的动态轮轨力作用下大地的振动响应。上述关于车辆-轨道耦合动力问题的研究各有优势,但也有其缺点:如频域法不能解决非线性模型、非规则轨道结构模型及处理动力型不平顺的问题,“对号入座法”由于车辆和轨道系统的系数矩阵将随车辆在轨道上位置的移动而发生变化,导致在每一时步必须重新生成,使得计算量很大。而文中建立的车辆-轨道非线性耦合系统动力分析模型和引入了修正因子对轮轨接触力进行修正的交叉迭代算法可以很好地解决这些问题。运用有限元法建立车辆-轨道非线性耦合系统动力分析模型,该模型将车辆-轨道系统以轮轨接触为界限分成车辆,轨道两个子系统,并通过轮轨接触力的平衡和位移协调条件耦合在一起。通过交叉迭代算法分别求解车辆,轨道系统的运动方程,此时每一步都需要判断使之满足轮轨几何相容条件和相互作用力平衡条件,这样对时间步

收稿日期: 2014-12-25

基金项目: 国家自然科学基金项目(U1134107)

作者简介: 吴神花(1989—),女,硕士研究生,研究方向为轨道结构动力学。

通讯作者: 雷晓燕(1956—),男,教授,博士生导师,研究方向为轨道结构动力学。

长的选取要求较高,但是如果时间步长超过某一限值,易于导致迭代失败。文中引入了修正因子对轮轨接触力进行了修正,这不仅可以放宽对时间步长的选取,还能加速收敛,提高计算效率。为证明算法的正确性,文中进行了算例验证,还给出了引入修证因子的交叉迭代求解车辆-轨道非线性耦合系统动力学方程的算例,算例中分别考虑了不同的时间步长和不同的修正因子对交叉迭代算法收敛速度的影响。计算结果表明引入修正因子的交叉迭代算法具有程序编制简单、收敛速度快、用时少、精度高的优点。

1 基本假设

在用有限元法建立车辆-轨道非线性耦合系统竖向振动模型时,采用以下基本假设:

1) 仅考虑车辆-轨道耦合系统竖向振动效应。

2) 车辆系统和轨道-路基系统沿线路方向左右对称,可取一半结构研究。

3) 上部车辆系统为附有二系弹簧阻尼的整车模型,车体和转向架考虑沉浮振动和点头振动。

4) 轮轨间为非线性弹性接触。

5) 钢轨被离散为二维梁单元,轨下垫板和扣件的弹性及阻尼分别用弹性系数 k_{y1} 和阻尼系数 c_{y1} 表示。

6) 轨枕质量作为集中质量处理并仅考虑竖向振动效应;枕下道床的支承弹性系数和阻尼系数分别用 k_{y2} 和 c_{y2} 表示。

7) 道砟质量简化为集中质量并仅考虑竖向振动效应;道砟下路基的支承弹性系数和阻尼系数分别用 k_{y3} 和 c_{y3} 表示。

2 车辆子系统

车辆子系统为附有二系弹簧阻尼的整车模型,如图1所示。图中 M_c , J_c 为1/2的车体质量与转动惯量; M_t , J_t 为1/2转向架质量与转动惯量; k_{s1} , k_{s2} 为车辆一、二系悬挂刚度; c_{s1} , c_{s2} 为车辆一、二系悬挂阻尼; $M_{wi}(i=1,2,3,4)$ 为第 i 个车轮的质量; v_c , φ_c 为车体沉浮振动的竖向位移、车体点头振动的角位移; v_{ti} , $\varphi_{ti}\,(i=1,2)$ 为前、后转向架沉浮振动的竖向位移、点头振动的角位移; $v_{wi}(i=1,2,3,4)$ 为第 i 个车轮的竖向位移。考虑轨面随机不平顺,不平顺幅值用 η 表示,与四个车轮接触处的不平顺幅值分别为 η_1 , η_2 , η_3 , η_4 。

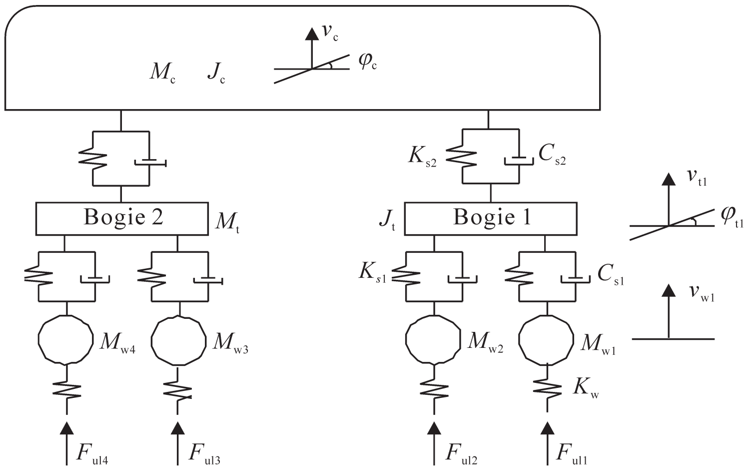


图1 上部车辆子系统模型

Fig.1 Vehicle subsystem model

定义车辆单元节点位移向量:

$$\underset{\sim u}{\boldsymbol{a}}=\{v_c \quad \phi_c \quad v_{t1} \quad v_{t2} \quad \phi_{t1} \quad \phi_{t2} \quad v_{w1} \quad v_{w2} \quad v_{w3} \quad v_{w4}\}^T \tag{1}$$

运用Lagrange方程,可得到上部车辆子系统的动力学方程为

$$\boldsymbol{M}_u \ddot{\boldsymbol{a}}_u + \boldsymbol{C}_u \dot{\boldsymbol{a}}_u + \boldsymbol{K}_u \boldsymbol{a}_u = \boldsymbol{Q}_u \tag{2}$$

其中：$\boldsymbol{M}_u$，$\boldsymbol{C}_u$ 和 $\boldsymbol{K}_u$ 分别为车辆单元的质量矩阵，阻尼矩阵和刚度矩阵，其显式表达式可参见文献[7]，$\boldsymbol{Q}_u$ 为荷载向量

$$\{Q\}_u = \{-M_c g \quad 0 \quad -M_t g \quad -M_t g \quad 0 \quad 0 \quad P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4\}^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

$P_i = -M_{wi} g + F_{uli}$，$F_{uli}$ 为第 i 个车轮的轮轨接触力，可根据轮轨相对接触竖向位移由赫兹公式求得

$$F_{uli} = \begin{cases} \dfrac{1}{G^{3/2}} \left| v_{wi} - (v_{lci} + \eta_i) \right|^{3/2} & v_{wi} - (v_{lci} + \eta_i) < 0 \\ 0 & v_{wi} - (v_{lci} + \eta_i) \geqslant 0 \end{cases} \tag{4}$$

其中：v_{wi}，v_{lci} 分别为车轮、钢轨在第 i 个轮轨接触处的位移，η_i 为钢轨表面不平顺，G 为接触挠度系数[10]。

3　有砟轨道子系统

有砟轨道子系统模型如图2所示。图3为有砟轨道单元模型，图中 v_1，v_4 表示钢轨的竖向位移；θ_1，θ_4 表示钢轨的转角；v_2，v_5 表示轨枕的竖向位移；v_3，v_6 为道砟的竖向位移；m_t，m_b 分别为四分之一的轨枕质量和两轨枕间道砟质量；l 为有砟轨道轨枕间距。

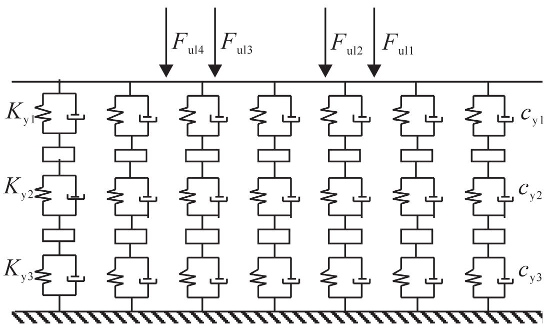


图2　有砟轨道子系统模型

Fig. 2　Ballastless track subsystem model

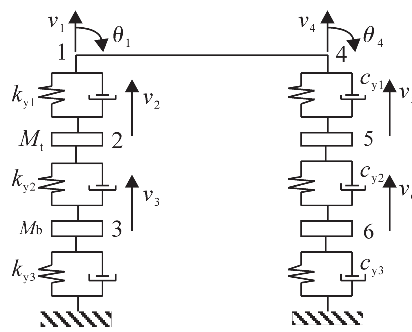


图3　有砟轨道单元模型

Fig.3　Ballasted track element model

定义有砟轨道单元的结点位移为

$$\boldsymbol{a}_l^e = \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4 \quad \theta_4 \quad v_5 \quad v_6\}^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

运用有限元法，可得到下部有砟轨道子系统的有限元方程为

$$\boldsymbol{M}_l \ddot{\boldsymbol{a}}_l + \boldsymbol{C}_l \dot{\boldsymbol{a}}_l + \boldsymbol{K}_l \boldsymbol{a}_l = \boldsymbol{Q}_l \tag{6}$$

其中：$\boldsymbol{M}_l$，$\boldsymbol{C}_l$ 和 $\boldsymbol{K}_l$ 分别为有砟轨道子系统的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵，其显式表达式可参见文献[8]，$\boldsymbol{Q}_l$ 为荷载向量。

4　引入修正因子的交叉迭代算法

采用Newmark数值积分法求解车辆-轨道非线性耦合系统动力学方程，下面给出了引入修正因子的交叉迭代算法求解车辆-轨道非线性耦合系统动力学方程的步骤。

待求解的车辆和轨道子系统方程为二阶常微分方程组。

对于车辆结构，见图1，公式(2)可改写为

$$\boldsymbol{M}_u \ddot{\boldsymbol{a}}_u + \boldsymbol{C}_u \dot{\boldsymbol{a}}_u + \boldsymbol{K}_u \boldsymbol{a}_u = \boldsymbol{Q}_{ug} + \boldsymbol{F}_{ul} \tag{7}$$

式中：$\boldsymbol{Q}_{ug}$ 为车辆重力向量；$\boldsymbol{F}_{ul}$ 为轮轨作用力向量，可用Hertz非线性公式(4)计算组装而成。

$$\underset{-ul}{\boldsymbol{F}}=[0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad F_{ul1}\quad F_{ul2}\quad F_{ul3}\quad F_{ul4}]^{T} \tag{8}$$

$$\underset{-ug}{\boldsymbol{Q}}=-g\left\{M_c\quad 0\quad M_t\quad M_t\quad 0\quad 0\quad M_{w1g}\quad M_{w2g}\quad M_{w3g}\quad M_{w4g}\right\}^{T} \tag{9}$$

$$\underset{-u}{\boldsymbol{a}}=\left\{v_c\quad \phi_c\quad v_{t1}\quad v_{t2}\quad \phi_{t1}\quad \phi_{t2}\quad v_{w1}\quad v_{w2}\quad v_{w3}\quad v_{w4}\right\}^{T} \tag{10}$$

$$\underset{-lc}{\boldsymbol{a}}=\left\{0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad v_{lc1}\quad v_{lc2}\quad v_{lc3}\quad v_{lc4}\right\}^{T} \tag{11}$$

$$\underset{-w}{\boldsymbol{K}}=\mathrm{diag}\left\{0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad k_w\quad k_w\quad k_w\quad k_w\right\} \tag{12}$$

$$k_w=\frac{3}{2G}p_0^{1/3}\qquad (\mathrm{N/cm}) \tag{13}$$

式中：k_w 为轮轨线性化接触刚度；p_0 为车轮静荷载。

对于轨道结构，见图2和图3，见方程(6)

利用Newmark数值积分法求解，已知系统在 $t-\Delta t$ 时刻的解答 ${}^{t-\Delta t}\underset{-}{\boldsymbol{a}},{}^{t-\Delta t}\underset{-}{\dot{\boldsymbol{a}}},{}^{t-\Delta t}\underset{-}{\ddot{\boldsymbol{a}}}$，欲求 t 时刻的位移 ${}^{t}\underset{-}{a}$ 可通过解如下（14）式得到。

$$\left(\underset{-}{\boldsymbol{K}}+c_0\underset{-}{\boldsymbol{M}}+c_1\underset{-}{\boldsymbol{C}}\right){}^{t}\underset{-}{\boldsymbol{a}}={}^{t}\underset{-}{\boldsymbol{Q}}+\underset{-}{\boldsymbol{M}}\left(c_0\,{}^{t-\Delta t}\underset{-t-\Delta t}{\boldsymbol{a}}+c_2\,{}^{t-\Delta t}\underset{-}{\dot{\boldsymbol{a}}}+c_3\,{}^{t-\Delta t}\ddot{a}\right)+\underset{-}{\boldsymbol{C}}\left(c_1\,{}^{t-\Delta t}\underset{-}{\boldsymbol{a}}+c_4\,{}^{t-\Delta t}\underset{-}{\dot{\boldsymbol{a}}}+c_5\,{}^{t-\Delta t}\underset{-}{\ddot{\boldsymbol{a}}}\right) \tag{14}$$

将 ${}^{t-\Delta t}\underset{-}{\boldsymbol{a}},{}^{t-\Delta t}\underset{-}{\dot{\boldsymbol{a}}},{}^{t-\Delta t}\underset{-}{\ddot{\boldsymbol{a}}}$ 和 ${}^{t}\underset{-}{\boldsymbol{a}}$ 代入（15）和（16）式，可得 t 时刻的速度 ${}^{t}\underset{-}{\dot{\boldsymbol{a}}}$ 和加速度 ${}^{t}\underset{-}{\ddot{\boldsymbol{a}}}$

$${}^{t}\underset{-}{\dot{\boldsymbol{a}}}={}^{t-\Delta t}\underset{-}{\dot{\boldsymbol{a}}}+c_6\,{}^{t-\Delta t}\underset{-}{\ddot{\boldsymbol{a}}}+c_7\,{}^{t}\underset{-}{\ddot{\boldsymbol{a}}} \tag{15}$$

$${}^{t}\underset{-}{\ddot{\boldsymbol{a}}}=c_0\left({}^{t}\underset{-}{\boldsymbol{a}}-{}^{t-\Delta t}\underset{-}{\boldsymbol{a}}\right)-c_2\,{}^{t-\Delta t}\underset{-}{\dot{\boldsymbol{a}}}-c_3\,{}^{t-\Delta t}\underset{-}{\ddot{\boldsymbol{a}}} \tag{16}$$

其中，$c_i(i=0,1,2,\cdots,7)$ 为Newmark算法系数[11]。

现给出主要计算步骤如下：

I 初始计算

（1）在起始第一时间步和首次迭代时，假设车辆初始位移、速度和加速度 $\underset{-u}{a}^0$，$\underset{-u}{\dot{\boldsymbol{a}}}^0$，$\underset{-u}{\ddot{\boldsymbol{a}}}^0$，轨道结构初始位移、速度和加速度 $\underset{-l}{\boldsymbol{a}}^0$，$\underset{-l}{\dot{\boldsymbol{a}}}^0$，$\underset{-l}{\ddot{\boldsymbol{a}}}^0$ 均取为0向量，根据 $\underset{-l}{\boldsymbol{a}}^0$ 可得到第i个轮轨接触处的初始钢轨位移 v^0_{lci}（i=1，2，3，4），进而得到 $\underset{-lc}{\boldsymbol{a}}^0$。

II 对时间步长循环

设在时间步长 t，已进行了 $k-1$ 次迭代，现考察第 k 次迭代：

（1）将车辆位移 ${}^{t}\underset{-u}{\boldsymbol{a}}^{k-1}$ 和轨道位移 ${}^{t}\underset{-lc}{\boldsymbol{a}}^{k-1}$ 代入公式(4)计算 ${}^{t}F^{k}_{uli}\left(i=1,2,3,4\right)$，即

$${}^{t}F^{k}_{uli}=\begin{cases}\dfrac{1}{G^{3/2}}\left|{}^{t}v^{k-1}_{wi}-\left({}^{t}v^{k-1}_{lci}+{}^{t}\eta^{k-1}_{i}\right)\right|^{3/2} & {}^{t}v^{k-1}_{wi}-\left({}^{t}v^{k-1}_{lci}+{}^{t}\eta^{k-1}_{i}\right)<0\\ 0 & {}^{t}v^{k-1}_{wi}-\left({}^{t}v^{k-1}_{lci}+{}^{t}\eta^{k-1}_{i}\right)\geqslant 0\end{cases}$$

（2）运用松弛法对轮轨接触力进行修正，令

$${}^{t}F^{k}_{uli}={}^{t}F^{k-1}_{uli}+\mu\left({}^{t}F^{k}_{uli}-{}^{t}F^{k-1}_{uli}\right) \tag{16}$$

其中，μ 为修正因子，取值视时间步长而定。

（3）将 ${}^{t}F^{k}_{uli}$ 组合成轮轨力向量 ${}^{t}\underset{-ul}{F}^{k}$ 施加于下部轨道结构，解微分方程(6)，得到轨道结构位移、速度和加速度 ${}^{t}\underset{-l}{\boldsymbol{a}}^{k}$，${}^{t}\underset{-l}{\dot{\boldsymbol{a}}}^{k}$，${}^{t}\underset{-l}{\ddot{\boldsymbol{a}}}^{k}$。

（4）根据轨道结构位移 ${}^{t}\underset{-l}{\boldsymbol{a}}^{k}$ 可得第 i 个轮轨接触处的钢轨位移 ${}^{t}v^{k}_{lci}$，并由Hertz接触公式(4) 计算轨道结构对车辆系统的作用力 ${}^{t}F^{k}_{uli}$。

（5）将 ${}^{t}F^{k}_{uli}$ 组合成轮轨力向量 ${}^{t}\underset{-ul}{F}^{k}$ 并作为外荷载施加于车辆子系统，解车辆子系统微分方程(7)，得到

车辆位移、速度和加速度 ${}^{t}\boldsymbol{a}_{u}^{k}$，${}^{t}\dot{\boldsymbol{a}}_{u}^{k}$，${}^{t}\ddot{\boldsymbol{a}}_{u}^{k}$。

（6）计算轨道位移差值

$$\{\Delta\,{}^{t}\boldsymbol{a}\}_{l}^{k}={}^{t}\boldsymbol{a}_{l}^{k}-{}^{t}\boldsymbol{a}_{l}^{k-1} \tag{17}$$

其中，${}^{t}\boldsymbol{a}_{l}^{k}$、${}^{t}\boldsymbol{a}_{l}^{k-1}$ 分别为当前迭代步及上一迭代步结束时轨道结构的结点位移向量。

定义收敛准则为

$$\frac{Norm\{\Delta\,{}^{t}\boldsymbol{a}\}_{l}^{k}}{Norm\left({}^{t}\boldsymbol{a}_{l}^{k}\right)}\leqslant\varepsilon \tag{18}$$

其中：

$$Norm\{\Delta\,{}^{t}\boldsymbol{a}\}_{l}^{k}=\sum_{i=1}^{n}\{\Delta\,{}^{t}\boldsymbol{a}^{2}(i)\}_{l}^{k}\,,\ Norm\left({}^{t}\boldsymbol{a}_{l}^{k}\right)=\sum_{i=1}^{n}\{{}^{t}\boldsymbol{a}_{l}^{k2}(i)\} \tag{19}$$

ε 取 $1.0\times10^{-8}\sim1.0\times10^{-5}$ 之间的数时，既能保证收敛精度，又有较好的计算速度。

收敛准则也可以定义为力的收敛准则，但是力的收敛准则比位移收敛准则的计算速度慢。

（7）对轨道位移进行收敛性判别

（a）如果收敛性得到满足，转步骤Ⅱ，进入下一时间步长循环，令 $t=t+\Delta t$，并取

$$ {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{a}_{u}^{0}={}^{t}\boldsymbol{a}_{u}^{k},\quad {}^{t+\Delta t}\dot{\boldsymbol{a}}_{u}^{0}={}^{t}\dot{\boldsymbol{a}}_{u}^{k},\quad {}^{t+\Delta t}\ddot{\boldsymbol{a}}_{u}^{0}={}^{t}\ddot{\boldsymbol{a}}_{u}^{k}$$

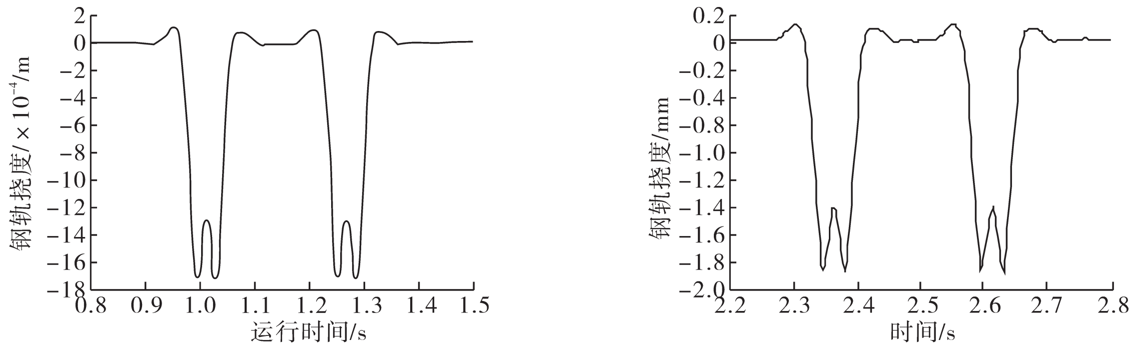
$$ {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{a}_{l}^{0}={}^{t}\boldsymbol{a}_{l}^{k},\quad {}^{t+\Delta t}\dot{\boldsymbol{a}}_{l}^{0}={}^{t}\dot{\boldsymbol{a}}_{l}^{k},\quad {}^{t+\Delta t}\ddot{\boldsymbol{a}}_{l}^{0}={}^{t}\ddot{\boldsymbol{a}}_{l}^{k}$$

继续计算，直至整个计算时域 T。

（b）如果收敛性不满足，转步骤Ⅱ，令 $k=k+1$，进入下一迭代步循环。

5　模型验证

为了验证模型和方法的正确性，利用文中提出的修正后的交叉迭代算法计算文献[7]中的算例。分别用两种方法分析整车通过时车辆和轨道的动态响应，其中车辆为我国高速铁道车辆，轨道为60 kg·m^{-1}有砟轨道，列车速度为252 km·h^{-1}，假设轨道为完全平顺，其它参数见文献[9]。计算结果见图4，可见两者吻合良好，说明引入修正因子的交叉迭代算法具有有效性和可行性。



(a) 参考文献计算结果　　(b) 本文计算结果

图4　钢轨挠度曲线

Fig.4　Time history of rail deflection

6　算例分析

如果不引入修正因子，时间步长很小才能收敛，而时间步长过小则会导致收敛速度慢，耗时长。

文中给出了修正因子交叉迭代求解车辆-轨道非线性耦合系统动力学方程的算例，算例中车辆参数为考虑高速整车CRH3列车，参数见表1，列车运行速度为200 km·h^{-1}，运行时间为3 s。轨道结构为60 kg·m^{-1}有

砟轨道，无缝线路，其参数见表2。采用美国六级不平顺功率谱密度函数作为轨道不平顺的激励，收敛精度均取为10e-8。由于时间步长选取大于0.002 s时，即使引入修正因子，算法仍不收敛。为了讨论交叉迭代算法求解方程的收敛情况和计算效率，这里的时间步长分别取为0.002，0.001，0.000 5，0.000 25 s，修正因子则随收敛情况适当选取，具体结果见表3-表6。表中的迭代次数约定为算完一次交叉迭代，即在某一时间步内轨道结构方程和车辆方程均完成一次求解；迭代次数按最小和最大迭代次数统计。图5为利用力的收敛准则与利用位移收敛准则得到的轮轨力相对差值、图6为时间步长0.000 25 s，修正因子在0.6与0.7时的轮轨力时程相对差值。

表1 CRH3高速列车车辆参数表[7]

Tab.1 Vehicle parameters of CRH3

参数	数值	参数	数值
车体质量2 M_c /kg	40 000	一系悬挂阻尼 c_{s1} /(kN·s·m^{-1})	50
转向架质量2 M_t /kg	3 200	二系悬挂刚度 k_{s2} /(kN·m^{-1})	400
轮对质量2 M_{wi} /kg	2 400	二系悬挂阻尼 c_{s2} /(kN·s·m^{-1})	60
车体点头惯量2 J_c /(kg·m^2)	5.47×10^5	固定轴距2 l_1 /m	2.5
转向架点头惯量2 J_t /(kg·m^2)	6 800	转向架中心距离2 l_2 /m	17.375
一系悬挂刚度 k_{s1} /(kN·m^{-1})	1 040	车辆长度/m	25.675

表2 我国干线60 kg/m轨道结构基本参数[8]

Tab.2 Parameters for ballasted track

参数	数值	参数	数值
钢轨质量 m_r /kg	60.64	道砟质量 m_b /kg	560
钢轨密度 ρ_r /(kg·m^{-3})	7 800	垫板刚度 k_{y1} /(MN·m^{-1})	78
钢轨惯性矩 I_r /cm^4	3 217	垫板阻尼系数 c_{y1} /(kN·s·m^{-1})	50
钢轨弹性模量 E_r /MPa	2.06×10^5	道床刚度 k_{y2} /(MN·m^{-1})	180
钢轨截面积 A_r / cm^2	77.45	道床阻尼 c_{y2} /(kN·s·m^{-1})	60
轨枕间距 l /m	0.568	路基刚度 k_{y3} /(MN·m^{-1})	65
轨枕质量 m_t /kg	250	路基阻尼 c_{y3} /(kN·s·m^{-1})	90

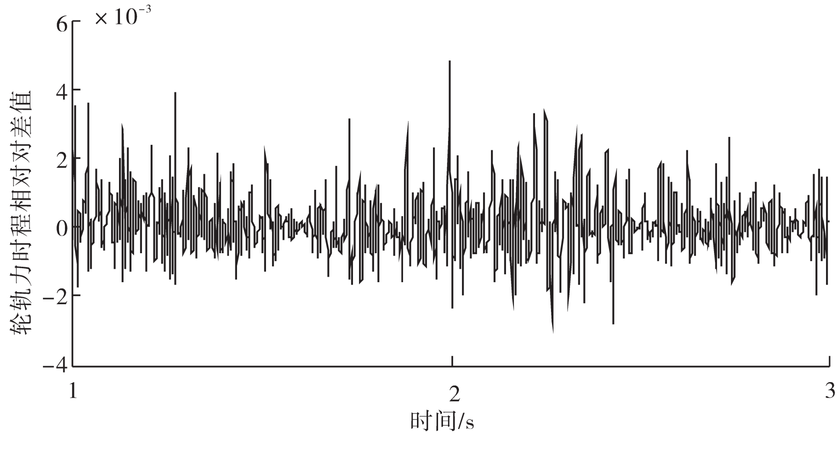


图5 力收敛准则与位移收敛准则下的轮轨力时程的相对差值

Fig.5 The relative difference of time history of the wheel-rail force between the force convergence and displacement convergence criterion

由图5看出，力收敛准则与位移收敛准则下轮轨力时程的相对差值在0.6%以内，基本可以认为相等，这说明力收敛和位移收敛这两种常用的收敛模式均可以采纳，但在相同的情况下利用位移收敛准则时程

序运行的时间更短,所以本文均采取位移收敛模式。

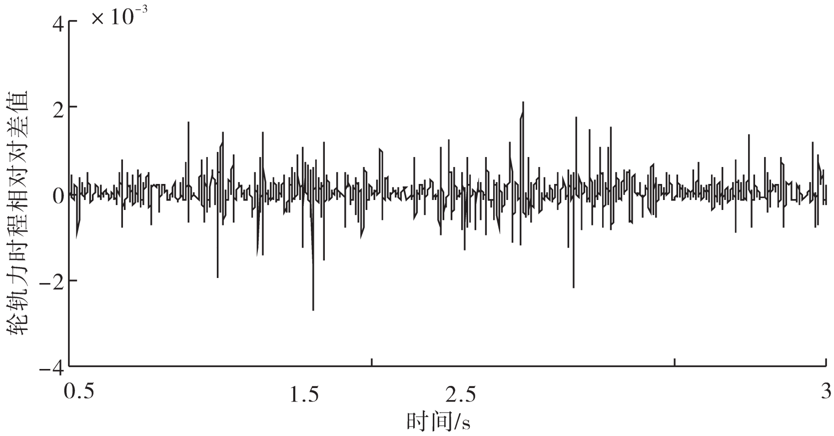


图6 修正因子为0.6与0.7时轮轨力时程相对差值

Fig.6 The relative difference of time history of the wheel-rail force between the correction factor of 0.6 and 0.7

由图6看出,不同修正因子轮轨力相对误差在0.3%以内,基本可以认为相等,这说明不同修正因子的引入对车辆-有砟轨道非线性耦合系统的动力响应的计算结果没有影响。

表3 时间步长0.002 s时收敛情况和计算效率

Tab.3 The convergence and computational efficiency in time step of 0.002 s

修正因子	最小迭代次数	最大迭代次数	程序运行时间/s
0.1	3	42	226 s
≥0.1		不收敛	

由表3可知,当时间步长为0.002 s时,修正因子大于0.1时算法不收敛,在修正因子为0.1时,程序运行时间为226 s。

表4 时间步长0.001 s时收敛情况和计算效率

Tab.4 The convergence and computational efficiency in time step of 0.001 s

修正因子	最小迭代次数	最大迭代次数	程序运行时间/s
0.1	3	39	427
0.2	3	23	248
0.3	3	16	199
≥0.4		不收敛	

由表4可知,当时间步长为0.001 s时,修正因子大于0.3时算法不收敛,在程序收敛的情况下修正因子越大迭代次数越少,程序运行时间也越短,在时间步长1 ms时程序运行时间最小为199 s。

表5 时间步长0.000 5 s时收敛情况和计算效率

Tab.5 The convergence and computational efficiency in time step of 0.000 5 s

修正因子	最小迭代次数	最大迭代次数	程序运行时间/s
0.1	3	35	990
0.2	3	20	672
0.3	3	14	554
0.4	3	11	483
0.5	3	9	444
≥0.6		不收敛	

由表5可知,当时间步长为0.000 5 s时,修正因子大于0.5时算法不收敛;在收敛的情况下修正因子越大迭代次数越少,程序运行时间也越短,此时程序运行时间最小为442 s。

表6 时间步长0.000 25 s时收敛情况和计算效率

Tab.6 The convergence and computational efficiency in time step of 0.000 25 s

修正因子	最小迭代次数	最大迭代次数	程序运行时间/s
0.1	3	34	2 412
0.2	3	20	1 912
0.3	3	14	1 677
0.4	3	11	1 638
0.5	3	9	1 545
0.6	3	7	1 467
0.7	3	6	1 388
⩾0.8	不收敛		

由表6可知当时间步长为0.000 25 s时，修正因子大于0.7时算法不收敛，在收敛的情况下修正因子越大迭代次数越少，程序运行时间也越少，此时程序运行时间最小为1 388 s。

7 结论

1）若不引入修正因子，则需要选取较大的时间步长，而时间步长超过某一限值，又易导致迭代失败。

2）若时间步长过长即使引入修正因子算法仍不收敛；在能收敛的情况下，时间步长、修正因子越大，收敛速度越快，程序运行时间越短；但时间步长较长时，取很小的修正因子时算法才能收敛。为提高算法收敛速度，需要综合考虑时间步长和修正因子的影响。

3）将车辆-轨道非线性耦合系统分解为车辆子系统和轨道子系统，可分别独立求解，既降低了分析问题的规模，又减小了程序设计的难度。同时，由于两个子系统有限元方程的系数矩阵全部为定值，且为对称矩阵，只须对方程的系数矩阵一次求逆，在每一时步的迭代中只须进行回代计算，因而极大地提高了计算速度。目前已有的基于“对号入座”求解车辆-轨道耦合系统动力响应的算法，随着车辆在轨道上的位置不断改变，有限元耦合方程的系数矩阵也在不断变化，因此在每一时步的计算中，需要进行求逆运算，大大降低了计算效率。目前已有的基于“对号入座”求解车辆-轨道耦合系统动力响应的算法，随着车辆在轨道上的位置不断改变，有限元耦合方程的系数矩阵也在不断变化，因此在每一时步的计算中，需要进行求逆运算，大大降低了计算效率。本文通过对列车在200 m长轨道上运行引起车辆和轨道动力响应实例的仿真分析，得到结论：采用本文提出的引入修正因子的“交叉迭代算法”在普通计算机工作站上运行用时只须199 s，而基于“对号入座”算法用时则需要60 min，一般情况下，前者的计算效率是后者的10多倍，而且求解问题的规模越大则计算效率越高。

应当指出，文中提出的算法具有普遍适用性，可广泛应用于移动荷载作用下的各类线性和非线性问题的分析中。

参考文献:

[1] 翟婉明. 车辆-轨道垂向系统的统一模型及其耦合动力学原理 [J]. 铁道学报, 1992,14(3):10-21.

[2] 雷晓燕. 轨道临界速度与轨道强振动研究[J]. 岩土工程学报,2006,28(3):419-422.

[3] 雷晓燕. 轨道结构动力分析的傅里叶变换法[J]. 铁道学报,2007,29(3):67-71.

[4] 雷晓燕. 高速列车诱发地面波与轨道强振动研究[J]. 铁道学报,2006,28(3):78-82.

[5] 雷晓燕. 高速铁路轨道振动与轨道临界速度的傅里叶变换法[J]. 中国铁道科学,2007,28(6):30-34.

[6] 向俊,赫丹,曾庆元. 横向有限条与无砟轨道板段单元的车轨系统竖向振动分析法[J].铁道学报, 2007,29(4):64-69

[7] 雷晓燕,张斌,刘庆杰. 轨道过渡段动力特性的有限元分析[J]. 中国铁道科学,2009,30(5):15-21.
[8] 雷晓燕,张斌,刘庆杰. 列车-轨道系统竖向动力分析的车辆轨道单元模型[J]. 振动与冲击,2010,29(3):168-173.
[9] H XIA, Y M CAO. Theoretical modeling and characteristic analysis of moving-train induced ground vibrations [J]. Journal of Sound and Vibration,2010,329(7):819-5163.
[10] 雷晓燕. 轨道力学与工程新方法[M]. 北京:中国铁道出版社,2000:45-46.
[11] 雷晓燕. 有限元法[M]. 北京:中国铁道出版社,2000:177-180.

Convergence Condition of Cross Iterative Algorithm for Vehicle-Track Nonlinear Coupling Equations

Wu Shenhua, Lei Xiaoyan

(Engineering Research Center of Railway Environment Vibration and Noise of the Ministry of Education, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: A model for dynamic analysis of vehicle-track nonlinear coupling system was established by finite element method. The whole system was divided into two subsystems, i.e., the vehicle subsystem considered as secondary spring vehicle model and the track subsystem regarded as three discrete elastic beams model. Coupling of the two systems was achieved by equilibrium conditions for wheel-rail nonlinear contact forces and geometrical compatibility conditions. A cross-iterative algorithm was presented to solve the dynamics equations of vehicle-track nonlinear coupling system, but every step must be judged to satisfy equilibrium conditions for wheel-rail nonlinear contact forces and geometrical compatibility conditions, leading to the selection of a higher time step that if the time step exceeded a certain value it would be easy to cause failure of the iteration. In view of this situation, a relaxation technique was introduced to correct the wheel-rail contact force, which not only could broaden the selection of the time step but also could accelerate the iterative convergence rate. By contrast with the example of reference, the correctness of the algorithm was verified. Examples of cross-iterative algorithm of the relaxation technique were given, in which the influence of different time steps and relaxation techniques were considered. Results demonstrated that the cross-iterative algorithm had the advantages of simple programming, fast convergence rate, less computation time and high accuracy.

Key words: relaxation technique; time step; cross-iterative algorithm; vehicles-track nonlinear coupling system

（责任编辑　王建华）