DOI:10.16749/j.cnki.jecjtu.2015.03.001

第32卷第3期 2015年6月 华东交通大学学报 Journal of East China Jiaotong University Vol. 32 No. 3 Jun., 2015

文章编号:1005-0523(2015)03-0122-04

# 矩阵方程AX=B的自反解与反自反解及最佳逼近

王 婧[1],刘喜富[2]

(华东交通大学1. 国际学院;2. 理学院,江西 南昌 330013)

**摘要**:给定两个广义反射矩阵$P,Q$,通常对于矩阵方程$AX=B$关于$P,Q$的自反解和反自反解的研究大多是通过矩阵分解或广义奇异值分解来进行的。采用广义逆,建立该方程存在自反解和反自反解的充要条件以及解的一般表达式,并研究与之相关的矩阵最佳逼近问题。

**关键词**:自反解;反自反解;矩阵方程;最佳逼近解

**中图分类号**:O151.2 **文献标志码**:A

本文用$C^{n\times m}$表示所有$n\times m$阶复矩阵集合。对于矩阵$A\in C^{n\times n}$,其迹记为$\mathrm{tr}(A)$。对于矩阵$A\in C^{m\times n}$,其共轭转置矩阵、值域、F范数和M-P逆分别记为$A^*$、$R(A)$、$\|A\|_F=\sqrt{\mathrm{tr}(AA^*)}=\sqrt{\mathrm{tr}(A^*A)}$和$A^+$。$I_n$表示$n$阶单位矩阵。并记$E_A=I-AA^+$,$F_A=I-A^+A$。

设矩阵$P\in C^{n\times n}$,若其满足$P^*=P$和$P^2=I$,则称其为广义反射矩阵。设$A\in C^{m\times n}$,给定广义反射矩阵$P\in C^{m\times m}$和$Q\in C^{n\times n}$,若矩阵$A$满足$A=PAQ$,则称$A$为关于$P,Q$的自反矩阵,记所有关于$P,Q$的自反矩阵的全体为$C_r^{m\times n}(P,Q)=\{A\in C^{m\times n}:A=PAQ\}$;若矩阵$A$满足$A=-PAQ$,则称$A$为关于$P,Q$的反自反矩阵,记所有关于$P,Q$的反自反矩阵的全体为$C_a^{m\times n}(P,Q)=\{A\in C^{m\times n}:A=-PAQ\}$。

给定矩阵$A\in C^{k\times m}$和$B\in C^{k\times n}$,$X\in C^{m\times n}$为未知矩阵,考虑矩阵方程

$$AX=B \tag{1}$$

由于关于方程(1)的一般解的研究已非常全面,故从上世纪70年代起,该方程的约束解的研究逐渐受到关注,这些约束主要包括:Hermitian、(半)正定、实部(半)正定、(反)自反、对称、中心对称等约束。约束矩阵方程问题在结构力学、固体力学、物理、地质、分子光谱学、电学、量子力学、结构设计、参数识别、自动控制等许多领域都具有重要应用。也正是由于约束解有着广泛的应用,才推动着其理论研究的不断完善。例如,Khatri和Mitra[1]对其Hermitian解和半正定解进行了研究;文献[2-3]对实部半正定解和实部正定解做了系统研究;文献[4]利用矩阵分解技术研究了该方程的$P,Q$的自反解与反自反解与最佳逼近问题;文献[5]利用广义奇异值分解讨论了它的自反最小二乘与最佳逼近问题。对于方程$A^HXA=B$的反自反解与最佳逼近问题,文献[6-7]同样利用广义奇异值分解对此作了研究。

本文主要利用矩阵广义逆理论重新研究以下两个问题。

**问题Ⅰ** $P\in C^{m\times m}$和$Q\in C^{n\times n}$为广义反射矩阵,设$A\in C^{k\times m}$、$B\in C^{k\times n}$,求$X\in C_r^{m\times n}(P,Q)$或$X\in C_a^{m\times n}(P,Q)$,使得$AX=B$。

**问题Ⅱ** 设问题Ⅰ的解集$S_X$非空,给定矩阵$C\in C^{m\times n}$,求$\hat{X}\in S_X$,使

$$\left\|\hat{X}-C\right\|_F=\min_{X\in S_E}\|X-C\|_F \tag{2}$$

收稿日期:2014-12-28

基金项目:国家自然科学基金项目(11461026);江西省科技厅项目(20142BAB211010)

作者简介:王婧(1986—),女,助教,硕士,研究方向为矩阵方程求解。

通讯作者:刘喜富(1984—),男,讲师,博士,研究方向为矩阵与数值代数。

## 1 问题I的解

$P\in C^{m\times m}$ 和 $Q\in C^{n\times n}$ 为广义反射矩阵,设 $A\in C^{k\times m}$ 、$B\in C^{k\times n}$ ,为了下文叙述方便,全文采用以下记号:$\tilde{A}=\begin{pmatrix}A\\AP\end{pmatrix}$ ,$\tilde{B}=\begin{pmatrix}B\\BQ\end{pmatrix}$ ,$\bar{B}=\begin{pmatrix}B\\-BQ\end{pmatrix}$ 。

为了证明本文的结论,需要以下引理。

**引理1**[4] 给定 $A\in C^{k\times m}$ ,$B\in C^{k\times n}$ ,$X\in C^{m\times n}$ 为未知矩阵。则矩阵方程 $AX=B$ 有解当且仅当 $r\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix}=r(A)$ ,并且此一般解可表示为

$$X=A^{+}B+F_{A}V \tag{3}$$

其中:$V$ 为适当阶数的任意矩阵。

**引理2** $P\in C^{m\times m}$ 和 $Q\in C^{n\times n}$ 为广义反射矩阵,设 $A\in C^{k\times m}$ 、$B\in C^{k\times n}$ ,则 $\tilde{A}^{+}\tilde{A}$ 、$F_{\tilde{A}}\in C_{r}^{m\times m}(P,P)$ ,$\tilde{A}^{+}\tilde{B}\in C_{r}^{m\times m}(P,Q)$ ,$\tilde{A}^{+}\bar{B}\in C_{a}^{m\times m}(P,Q)$ 。

**证明** 由于 $P$ 为广义反射矩阵,自然也是酉矩阵,根据广义逆的性质有 $P\tilde{A}^{+}=(\tilde{A}P)^{+}$ ,所以 $P\tilde{A}^{+}\tilde{A}P=(\tilde{A}P)^{+}\tilde{A}P$ 。另外 $R(\tilde{A}^{*})=R\begin{pmatrix}A^{*} & PA^{*}\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}PA^{*} & A^{*}\end{pmatrix}=R\left((\tilde{A}P)^{*}\right)$ ,再根据广义逆的性质 $M^{+}M=N^{+}N$ 当且仅当 $R(M^{*})=R(N^{*})$ 可得

$$P\tilde{A}^{+}\tilde{A}P=(\tilde{A}P)^{+}\tilde{A}P=\tilde{A}^{+}\tilde{A} \tag{4}$$

因此 $\tilde{A}^{+}\tilde{A}\in C_{r}^{m\times m}(P,P)$ ,显然也有 $F_{\tilde{A}}\in C_{r}^{m\times m}(P,P)$ 成立。

另一方面

$$P\tilde{A}^{+}\tilde{B}Q=(\tilde{A}P)^{+}\tilde{B}Q=\begin{pmatrix}AP\\A\end{pmatrix}^{+}\begin{pmatrix}BQ\\B\end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix}0 & I\\I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\AP\end{pmatrix}\right]^{+}\begin{pmatrix}BQ\\B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A\\AP\end{pmatrix}^{+}\begin{pmatrix}0 & I\\I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}BQ\\B\end{pmatrix}=\tilde{A}^{+}\tilde{B} \tag{5}$$

所以,$\tilde{A}^{+}\tilde{B}\in C_{r}^{m\times m}(P,Q)$ 。同理可得 $\tilde{A}^{+}\bar{B}\in C_{a}^{m\times m}(P,Q)$ 。证毕。

**引理3** $P\in C^{m\times m}$ 和 $Q\in C^{n\times n}$ 为广义反射矩阵,设给定 $A\in C^{k\times m}$ 、$B\in C^{k\times n}$ ,$X\in C^{m\times n}$ 为未知矩阵。若矩阵方程 $AX=B$ 存在关于 $P$ 、$Q$ 的自反解,则此自反解 $X_r$ 可表示为

$$X_{r}=\frac{X+PXQ}{2} \tag{6}$$

其中:$X$ 为方程 $AX=B$ 和 $APX=BQ$ 的公共解。

**证明** 设 $X$ 是 $AX=B$ 和 $APX=BQ$ 的公共解,易证 $AX_{r}=B$ ,且 $X_{r}=PX_{r}Q$ ,即 $X_r$ 是方程 $AX=B$ 的关于 $P$ 、$Q$ 的自反解。

另一方面,方程 $AX=B$ 的任意一个关于 $P$ 、$Q$ 的自反解 $X_r$ 都可以表示成 $X_{r}=\dfrac{X_{r}+PX_{r}Q}{2}$ ,且 $X_r$ 是方程 $AX=B$ 和 $APX=BQ$ 的公共解。证毕。

接下来,给出本文的主要结论。

**定理1** $P\in C^{m\times m}$ 和 $Q\in C^{n\times n}$ 为两广义反射矩阵,设 $A\in C^{k\times m}$ 、$B\in C^{k\times n}$ ,$X\in C^{m\times n}$ 为未知矩阵。则矩阵方程 $AX=B$ 存在关于 $P$ 、$Q$ 的自反解当且仅当 $r\begin{pmatrix}A & B\\AP & BQ\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}A\\AP\end{pmatrix}$ ,并且此自反解可表示为

$$X_{r}=\tilde{A}^{+}\tilde{B}+F_{\tilde{A}}U \tag{7}$$

其中:$U\in C_{r}^{m\times n}(P,Q)$ 为任意矩阵。

**证明** 由引理3可知,$AX=B$ 存在关于 $P$ 、$Q$ 的自反解当且仅当 $AX=B$ 和 $APX=BQ$ 存在公共解,即方程 $\begin{pmatrix}A\\AP\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}B\\BQ\end{pmatrix}$ 有解。再根据引理1可得,后者可解的充要条件为 $r\begin{pmatrix}A & B\\AP & BQ\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}A\\AP\end{pmatrix}$ ,且其解为 $X=\tilde{A}^{+}\tilde{B}+F_{\tilde{A}}V$ 。再由引理1和引理3可得式(7)。

同理可得如下结论。

**定理2** $P\in C^{m\times m}$ 和 $Q\in C^{n\times n}$ 为两广义反射矩阵，给定 $A\in C^{k\times m}$、$B\in C^{k\times n}$，$X\in C^{m\times n}$ 为未知矩阵。则矩阵方程 $AX=B$ 存在关于 $P$、$Q$ 的反自反解当且仅当 $r\begin{pmatrix} A & B \\ AP & -BQ \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} A \\ AP \end{pmatrix}$，并且此反自反解 $X_a$ 可表示为

$$X_a=\tilde{A}^{+}\bar{B}+F_{\tilde{A}}W \tag{8}$$

其中：$W\in C_a^{m\times n}(P,Q)$ 为任意矩阵。

## 2 问题Ⅱ的解

根据定理1和定理2的结论，本节将给出问题Ⅱ的最佳逼近解。在此之前，先证明下面关于矩阵范数的两个结论。

**引理4** $P\in C^{m\times m}$ 和 $Q\in C^{n\times n}$ 为广义反射矩阵，设 $A\in C^{k\times m}$、$B\in C^{k\times n}$、$C\in C^{m\times n}$，$U\in C_r^{m\times n}(P,Q)$、$W\in C_a^{m\times n}(P,Q)$，则

$$\left\|F_{\tilde{A}}U-F_{\tilde{A}}C\right\|_F^2=\left\|F_{\tilde{A}}U-\frac{1}{2}F_{\tilde{A}}(C+PCQ)\right\|_F^2+\frac{1}{2}\mathrm{tr}[F_{\tilde{A}}(CC^*-CQC^*P)F_{\tilde{A}}] \tag{9}$$

$$\left\|F_{\tilde{A}}W-F_{\tilde{A}}C\right\|_F^2=\left\|F_{\tilde{A}}W-\frac{1}{2}F_{\tilde{A}}(C-PCQ)\right\|_F^2+\frac{1}{2}\mathrm{tr}[F_{\tilde{A}}(CC^*+CQC^*P)F_{\tilde{A}}] \tag{10}$$

**证明** 由于F范数为酉不变范数，根据假设有

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{tr}(F_{\tilde{A}}UQC^*PF_{\tilde{A}})=\mathrm{tr}(PF_{\tilde{A}}UQC^*PF_{\tilde{A}}P)=\mathrm{tr}(F_{\tilde{A}}PUQC^*F_{\tilde{A}})=\mathrm{tr}(F_{\tilde{A}}UC^*F_{\tilde{A}})\\
&\mathrm{tr}(F_{\tilde{A}}PCQU^*F_{\tilde{A}})=\mathrm{tr}(PF_{\tilde{A}}PCQU^*F_{\tilde{A}}P)=\mathrm{tr}(F_{\tilde{A}}CU^*F_{\tilde{A}})\\
&\mathrm{tr}(F_{\tilde{A}}CQC^*PF_{\tilde{A}})=\mathrm{tr}(PF_{\tilde{A}}CQC^*PF_{\tilde{A}}P)=\mathrm{tr}(F_{\tilde{A}}PCQC^*F_{\tilde{A}})\\
&\mathrm{tr}(F_{\tilde{A}}PCC^*PF_{\tilde{A}})=\mathrm{tr}(PF_{\tilde{A}}PCC^*PF_{\tilde{A}}P)=\mathrm{tr}(F_{\tilde{A}}CC^*F_{\tilde{A}})
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\left\|F_{\tilde{A}}U-\frac{1}{2}F_{\tilde{A}}(C+PCQ)\right\|_F^2\\
&=\mathrm{tr}\left\{\left[F_{\tilde{A}}U-\frac{1}{2}F_{\tilde{A}}(C+PCQ)\right]\left[F_{\tilde{A}}U-\frac{1}{2}F_{\tilde{A}}(C+PCQ)\right]^*\right\}\\
&=\mathrm{tr}\left\{F_{\tilde{A}}UU^*F_{\tilde{A}}-\frac{1}{2}F_{\tilde{A}}UC^*F_{\tilde{A}}-\frac{1}{2}F_{\tilde{A}}UQC^*PF_{\tilde{A}}-\frac{1}{2}F_{\tilde{A}}CU^*F_{\tilde{A}}-\frac{1}{2}F_{\tilde{A}}PCQU^*F_{\tilde{A}}+\right.\\
&\qquad\left.\frac{1}{4}F_{\tilde{A}}CC^*F_{\tilde{A}}+\frac{1}{4}F_{\tilde{A}}CQC^*PF_{\tilde{A}}+\frac{1}{4}F_{\tilde{A}}PCQC^*F_{\tilde{A}}+\frac{1}{4}F_{\tilde{A}}PCC^*PF_{\tilde{A}}\right\}\\
&=\mathrm{tr}\left\{F_{\tilde{A}}UU^*F_{\tilde{A}}-F_{\tilde{A}}UC^*F_{\tilde{A}}-F_{\tilde{A}}CU^*F_{\tilde{A}}+\frac{1}{2}F_{\tilde{A}}CC^*F_{\tilde{A}}+\frac{1}{2}F_{\tilde{A}}CQC^*PF_{\tilde{A}}\right\}\\
&=\left\|F_{\tilde{A}}U-F_{\tilde{A}}C\right\|_F^2-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[F_{\tilde{A}}(CC^*-CQC^*P)F_{\tilde{A}}\right]
\end{aligned} \tag{12}$$

于是，式(9)得证。同理，可得式(10)。证毕。

**定理3** 设 $C\in C^{m\times n}$，设方程 $AX=B$ 的解集 $S_X\subseteq C_r^{m\times n}(P,Q)$ 非空，则问题Ⅱ在 $S_X$ 内有唯一解 $\hat{X}_r$，可表示为

$$\hat{X}_r=\tilde{A}^{+}\tilde{B}+\frac{1}{2}F_{\tilde{A}}(C+PCQ) \tag{13}$$

并且

$$\left\|\hat{X}_r-C\right\|_F^2=\min_{X\in S_E}\left\|X-C\right\|_F^2=\left\|\tilde{A}^{+}\tilde{B}-\tilde{A}^{+}\tilde{A}C\right\|_F^2+\frac{1}{2}\mathrm{tr}[F_{\tilde{A}}(CC^*-CQC^*P)F_{\tilde{A}}] \tag{14}$$

**证明** 设 $X$ 为 $AX=B$ 的自反解，根据定理2、引理4，则有

$$\left\|X-C\right\|_F^2=\left\|\tilde{A}^{+}\tilde{B}+F_{\tilde{A}}U-C\right\|_F^2=\left\|\tilde{A}^{+}\tilde{B}-\tilde{A}^{+}\tilde{A}C\right\|_F^2+\left\|F_{\tilde{A}}U-F_{\tilde{A}}C\right\|_F^2$$

$$=\left\|\tilde{A}^{+}\tilde{B}-\tilde{A}^{+}\tilde{A}C\right\|_F^2+\left\|F_{\tilde{A}}U-\frac{1}{2}F_{\tilde{A}}(C+PCQ)\right\|_F^2+\frac{1}{2}\mathrm{tr}[F_{\tilde{A}}(CC^*-CQC^*P)F_{\tilde{A}}] \tag{15}$$

因此,要使 $\|X-C\|_F^2$ 达到最小,只需使 $\left\|F_{\tilde{A}}U-\frac{1}{2}F_{\tilde{A}}(C+PCQ)\right\|_F^2$ 达到最小即可。显然,方程 $F_{\tilde{A}}U=\frac{1}{2}F_{\tilde{A}}(C+PCQ)$ 有解,且 $U=\frac{1}{2}F_{\tilde{A}}(C+PCQ)+\tilde{A}^{+}\tilde{A}Z$ ,$Z$ 为任意矩阵。将 $U$ 代入式(7)即可得本定理的结论。证毕。

同理,可得如下结论。

**定理4** 设 $C\in C^{m\times n}$ ,设方程 $AX=B$ 的解集 $S_X\subseteq C_a^{m\times n}(P,Q)$ 非空,则问题Ⅱ在 $S_X$ 内有唯一解 $\hat{X}_a$ ,可表示为

$$\hat{X}_a=\tilde{A}^{+}\bar{B}+\frac{1}{2}F_{\tilde{A}}(C-PCQ) \tag{16}$$

并且

$$\left\|\hat{X}_a-C\right\|_F^2=\min_{X\in S_X}\|X-C\|_F^2=\left\|\tilde{A}^{+}\bar{B}-\tilde{A}^{+}\tilde{A}C\right\|_F^2+\frac{1}{2}\mathrm{tr}[F_{\tilde{A}}(CC^*+CQC^*P)F_{\tilde{A}}] \tag{17}$$


**参考文献:**

[1] KHATRI C, MITRA S. Hermitian and nonnegative definite solutions of linear matrix equations[J]. Siam J Appl Math, 1976,31: 579-585.

[2] LIU X. Comments on "The common Re-nnd and Re-pd solutions to the matrix equations $AX=C$ and $XB=D$ " [J]. Appl Math Comput, 2014, 236: 663-668.

[3] WU L. The re-positive defininte solutions to the matrix inverse problem $AX=B$ [J]. Linear Algebra Appl, 1992,174:145-151.

[4] ZHANG J, ZHOU S, HU X. The $(P,Q)$ generalized reflexive and anti-reflexive solutions of the matrix equation $AX=B$ [J]. Appl Math Comput, 2009, 209: 254-258.

[5] 肖庆丰, 胡锡炎, 张磊. 矩阵方程 $AX=B$ 的自反最小秩解及其最佳逼近[J]. 纯粹数学与应用数学, 2012,28(6):719-727.

[6] 彭向阳, 张磊, 胡锡炎. 矩阵方程 $A^H XA=B$ 的反Hermitian反自反解[J]. 曲阜师范大学学报, 2005,31(1):1-6.

[7] 王艾红. 矩阵方程 $A^H XA=B$ 的反自反解及其最佳逼近[J]. 长沙大学学报, 2005,19(5):5-9.


# Reflexive and Anti-reflexive Solutions to Matrix Equation $AX=B$ and the Optimal Approximation


Wang Jing[1], Liu Xifu[2]

(1. International School, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China; 2. School of Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)



**Abstract:** Generally, the main methods to study the $P,Q$ reflexive and anti-reflexive solutions of the matrix equation $AX=B$ are the decomposition of matrices and the generalized singular value decomposition of matrices. This paper studies the equation by using the generalized inverse and establishes conditions for the existence and representations of the reflexive and anti-reflexive solutions .Moreover, the optimal approximation solutions are also discussed.



**Key words:** reflexive solution; anti-reflexive solution; matrix equation; optimal approximation


(责任编辑 姜红贵)