

文章编号:1005-0523(2015)03-0126-07

给定最大度的极大拉普拉斯谱单圈偶图

林国光, 宋海洲

(华侨大学数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要:通过图的移接变形对拉普拉斯谱半径的影响,研究了给定最大度为 $\Delta > 2$ 的 n 阶极大拉普拉斯谱单圈偶图的性质,得到了它的规范拉普拉斯谱向量中绝对值最大的分量对应的顶点的度均等于 Δ 且这些顶点的位置均在圈上。

关键词:单圈偶图; 最大度; 拉普拉斯谱半径; 移接变形; 向量

中图分类号:O157.5

文献标志码:A

1 预备知识

本文所考虑的图均为无环、无重边、有限且无向的简单连通图。设 $G=(V(G), E(G))$ 是 n 阶简单连通图, 其顶点集为 $V(G)=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 边集为 $E(G)=\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 。图 G 中顶点 v_i 的度记为 $d_G(v_i)$, 简记 $d(v_i)$ 。设 $A(G)$ 和 $D(G)=\text{diag}(d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n))$ 分别为图 G 的邻接矩阵和度对角矩阵, 则图 G 的拉普拉斯矩阵为 $L(G)=D(G)-A(G)$ 。设 $X=(x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_n})^T$ 为矩阵 $L(G)$ 的特征向量, $\mu(G)$ 为 G 的拉普拉斯谱半径, 由 Rayleigh-Ritz 定理^[1]可知

$$\mu(G) = \max_{\|X\|=1} X^T L(G) X = \max_{\|X\|=1} \sum_{v_i v_j \in E(G)} (x_{v_i} - x_{v_j})^2 \quad (1)$$

则由 $(D(G)-A(G))X=\mu(G)X$ 有

$$\mu(G)x_{v_i} = (D(G)-A(G))_i X = d(v_i)x_{v_i} - \sum_{v_i \sim v_j} x_{v_j} \quad (2)$$

其中: $(D(G)-A(G))_i$ 表示矩阵 $D(G)-A(G)$ 的第 i 行; x_{v_i}, x_{v_j} 分别表示 X 中对应于顶点 v_i, v_j 的分量; $v_i \sim v_j$ 表示顶点 v_i 与顶点 v_j 相邻接。

边数等于顶点数的简单连通图称为单圈图, 圈长为偶数的单圈图称为单圈偶图。本文中用 $S=(V(S), E(S), C)$ 表示单圈偶图, 其中 C 为 S 中的唯一一圈; 用 (u, v) 表示 $E(S)$ 中的一条边, 简记 uv 。其中 $u, v \in V(S)$; 用 $S-uv$ 表示从 S 中删去边 $uv \in E(S)$ 所得到的图, 用 $S+uv$ 表示从 S 中添加边 $uv \notin E(S)$ 所得到的图, 其中 $u, v \in V(S)$; 用 $N_S(v)$ 表示 S 中所有与顶点 v 相邻的顶点构成的集合; 用 $d(u, v)$ 表示在 S 中的顶点 u 到顶点 v 的距离; 用 $\Delta(S)$ 表示 S 的最大度, 简记为 $\Delta(\Delta > 2)$; 用 S_n^Δ 表示最大度为 Δ 的 n 阶单圈偶图构成的集合。

图的拉普拉斯谱半径是图谱理论的重要研究课题之一。1986年 Brualdi 和 Solheid^[2]提出了一个关于图的谱半径问题: 对于一个给定图的集合, 确定该集合中图的谱半径的上界(或下界), 并刻画该上界(或下界)的极图。近年来在极图刻画方面的研究有很大的进展: 如郭继明等^[3]和刘慧清等^[4]分别研究了在给定

收稿日期: 2014-12-26

基金项目: 福建省自然科学基金项目(2011J05005); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(10HZR26)

作者简介: 林国光(1988—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为图论。

通讯作者: 宋海洲(1971—), 男, 副教授, 主要研究方向为图论。

直径条件下树和单圈图中谱半径最大的极图;张晓东^[5-6]研究了给定度序列的条件下树和单圈图取得拉普拉斯谱半径和拟拉普拉斯谱半径最大的极图;冯琳等^[7]刻画出固定围长的单圈图的无符号拉普拉斯谱极图等等。本文研究给定最大度为 $\Delta > 2$ 的 n 阶极大拉普拉斯谱单圈偶图的性质,得出它的规范拉普拉斯谱向量中绝对值最大的分量对应的顶点的度均等于 Δ 且这些顶点的位置均在圈上。

2 基本定义及引理

本节先给出后面证明主要结论时将要用到的一些定义及引理。

定义1 设 $S=(V(S),E(S),C)$ 是一个单圈偶图。若 $L(S)$ 的特征向量 $X=(x_v)_{v \in V(S)}$ 满足 $\|X\|=1$, 且 $\mu(S)=X^T L(S)X$, 则称 X 为 S 的一个规范拉普拉斯谱向量^[8]。

定义2 设 $S^* \in S_n^\Delta$, 若对任意 $S \in S_n^\Delta$ 均有 $\mu(S) \leq \mu(S^*)$ 成立, 则称 S^* 为 S_n^Δ 中的一个极大拉普拉斯谱单圈偶图。

定义3 设 $S \in S_n^\Delta$, S 中度为1的顶点称为 S 的一个叶子顶点(或称悬挂顶点), 有时简称叶子, 与叶子顶点相连的边称为悬挂边。

引理1^[9] 设 $G=(V_1, V_2; E)$ 是含有 n 个顶点的偶图, $V_1=\{v_1, v_2, \dots, v_j\}$, $V_2=\{v_{j+1}, v_{j+2}, \dots, v_n\}$, $V(G)=V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ 且 G 中的每条边都连接 V_1 中一点和 V_2 中一点。令 X 为 G 的一个规范拉普拉斯谱向量, 则 $\text{sgn}(x_{v_1}) = \dots = \text{sgn}(x_{v_j}) = -\text{sgn}(x_{v_{j+1}}) = \dots = -\text{sgn}(x_{v_n}) \neq 0$, 其中 $\text{sgn}(a)$ 表示实数 a 的符号。

引理2^[9] (嫁接变形) 设 u, v 是连通偶图 $G=(V_1, V_2; E)$ 的两个互不相同的顶点, 且 $N_G(v) \setminus W_G(u) \setminus \{u\} = \{v_1, v_2, \dots, v_s\} (1 \leq s \leq d(v))$ 。记 G^* 是由 G 删除边 vv_i , 同时添加边 $uv_i (1 \leq i \leq s)$ 后所得到的连通偶图(见图1)。设 X 是 G 的一个规范拉普拉斯谱向量, 若 $|x_u| \geq |x_v|$, 则 $\mu(G) < \mu(G^*)$ 。

引理3^[5] (交叉移接变形) 设 u_1, u_2, v_1, v_2 是简单连通偶图 $G=(V(G), E(G))$ 的四个互不相同的顶点, 且 v_1 与 u_1 相邻, v_1 与 v_2 不相邻, v_2 与 u_2 相邻, u_1 与 u_2 不相邻。记 G^* 是由 G 删除边 v_1u_1, v_2u_2 , 同时添加边 v_1u_2, u_1v_2 后所得到的简单连通偶图(见图2)。设 X 是 G 的一个规范拉普拉斯谱向量, 若 $|x_{v_1}| \geq |x_{u_2}|$ 且 $|x_{v_2}| \geq |x_{u_1}|$, 则 $\mu(G^*) \geq \mu(G)$ 。由引理1显然可知 G 为单圈偶图时, 引理3仍成立。

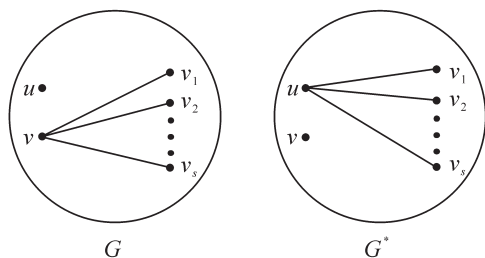


图1 偶图 G 和偶图 G^*

Fig.1 Bipartite graph G and G^*

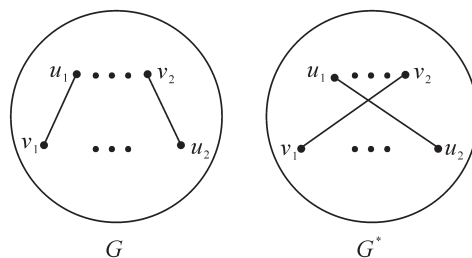


图2 简单连通图 G 和 G^*

Fig.2 Simple connected graph G and G^*

引理4^[10] 设 G 是一个顶点阶数 $n \geq 2$ 的简单连通图, 则 $\mu(G) \geq \Delta + 1$, 等号成立当且仅当 $\Delta = n - 1$, 其中 $\mu(G)$ 为 $L(G)$ 的最大特征值, Δ 为 G 的最大度。

引理5 设 S^* 是 S_n^Δ 中的一个含有叶子顶点的极大拉普拉斯谱单圈偶图, X 是 S^* 的一个规范拉普拉斯谱向量。设 u_k 是 S^* 中的一个叶子顶点, $u_{k-1} \in N_{S^*}(u_k)$, 则 $|x_{u_k}| < |x_{u_{k-1}}|$ 。

证明 由引理4可知 $\mu(S^*) \geq \Delta + 1$, 显然在单圈偶图中 $\Delta < n - 1$, 所以 $\mu(S^*) > \Delta + 1$ 。由式(2)可知 $\mu(S^*)x_{u_k} = d(u_k)x_{u_k} - x_{u_{k-1}}$, 有 $\frac{|x_{u_{k-1}}|}{|x_{u_k}|} = \mu(S^*) - d(u_k) > 1$ 。因此可证 $|x_{u_k}| < |x_{u_{k-1}}|$ 。

故引理5成立。

引理6 设 S^* 是 S_n^A 中的一个极大拉普拉斯谱单圈偶图, X 是 S^* 的一个规范拉普拉斯谱向量, 顶点 u, v 是同时在 S^* 的圈上或圈外。若 $d(u) > d(v)$, 则 $|x_u| > |x_v|$ 。

证明 反证法。假设若 $d(u) > d(v)$ 且有 $|x_u| \leq |x_v|$ 成立。因为 $d(u) > d(v)$, 从而在 $N_{S^*}(u) \setminus N_{S^*}(v) \setminus \{v\}$ 中一定存在 $d(u) - d(v)$ 个点, 不妨设为 $u_1, \dots, u_{d(u)-d(v)}$, 使得 $S_1 = S^* - uu_1 - \dots - uu_{d(u)-d(v)} + vu_1 + \dots + vu_{d(u)-d(v)}$ 仍为单圈偶图, 则易知 $S_1 \in S_n^A$ 。由 $|x_v| \geq |x_u|$, 利用引理2可知 $\mu(S_1) > \mu(S^*)$, 与 S^* 的定义矛盾。故引理6成立。

由引理6可以得到如下推论。

推论1 设 S^* 是 S_n^A 中的一个极大拉普拉斯谱单圈偶图, X 是 S^* 的一个规范拉普拉斯谱向量, 顶点 u, v 是同时在 S^* 的圈上或圈外。① 若 $|x_u| > |x_v|$, 则 $d(u) \geq d(v)$; ② 若 $|x_u| = |x_v|$, 则 $d(u) = d(v)$ 。

3 主要结果及其证明

定理1 假设 S^* 是 S_n^A 中的一个极大拉普拉斯谱单圈偶图, C 是 S^* 中的唯一圈, X 是 S^* 的一个规范拉普拉斯谱向量。则 X 中绝对值最大的分量对应的顶点的度均等于 Δ 。

证明 反证法。假设 S^* 中存在一个顶点 v^* 使得 $|x_{v^*}| = \max\{|x_v| | v \in V(S^*)\}$, $d(v^*) < \Delta$, 记 $k = d(v^*)$ 。在 S^* 中任取一个度为 Δ 的顶点 u , 即 $d(u) = \Delta$ 。下面对 k 的大小分以下三种情形讨论。

情形1 当 $k = 1$ 时

则顶点 v^* 必为叶子顶点, 取 $w \in N_{S^*}(v^*)$, 由引理5可知 $|x_w| < |x_{v^*}|$ 与 $|x_{v^*}| = \max\{|x_v| | v \in V(S^*)\}$ 矛盾。

情形2 当 $k = 2$ 时

对于情形2, 根据顶点 u, v^* 在 S^* 中的位置分以下三种情形讨论。

情形2.1 当顶点 u, v^* 同时在圈上或圈外时

因为 $d(u) > d(v^*)$, $|x_u| \leq |x_{v^*}|$, 与引理6矛盾。

情形2.2 当顶点 u 在圈外且顶点 v^* 在圈上时

因 $\Delta > 2$, 故在 $N_{S^*}(u) \setminus N_{S^*}(v^*) \setminus \{v^*\}$ 中一定存在 $\Delta - 2$ 个点, 不妨设为 $u_1, \dots, u_{\Delta-2}$, 使得 $S_1 = S^* - uu_1 - \dots - uu_{\Delta-2} + v^*u_1 + \dots + v^*u_{\Delta-2}$ 仍为单圈偶图, 则易知 $S_1 \in S_n^A$ 。由 $|x_{v^*}| \geq |x_u|$, 利用引理2可知 $\mu(S_1) > \mu(S^*)$, 与 S^* 的定义矛盾。

情形2.3 当顶点 v^* 在圈外且顶点 u 在圈上时

对于情形2.3, 根据顶点 v^* 离圈上最近的顶点是不是 u 分以下两种情形讨论。

情形2.3.1 顶点 v^* 离圈上最近的顶点不是 u

因 $\Delta > 2$, 故在 $N_{S^*}(u) \setminus N_{S^*}(v^*) \setminus \{v^*\}$ 中一定存在 $\Delta - 2$ 个点, 不妨设为 $u_1, \dots, u_{\Delta-2}$, 使得 $S_2 = S^* - uu_1 - \dots - uu_{\Delta-2} + v^*u_1 + \dots + v^*u_{\Delta-2}$ 仍为单圈偶图, 则易知 $S_2 \in S_n^A$ 。由 $|x_{v^*}| \geq |x_u|$, 利用引理2可知 $\mu(S_2) > \mu(S^*)$, 与 S^* 的定义矛盾。

情形2.3.2 顶点 v^* 离圈上最近的顶点是 u

对于情形2.3.2, 根据 Δ 的大小分以下两种情形讨论。

情形2.3.2.1 当 $\Delta = 3$ 时

则取 $v_1 \in N_C(u)$, 令 $S_3 = S^* - uv_1 + v_1v^*$, 下面对 S_3 圈长的奇偶性进行讨论。

若 S_3 的圈长为奇数, 则取 $v_2 \in N_C(v_1) \setminus \{u\}$, 令 $S_4 = S^* - v_1v_2 + v_2v^*$, 易知 $S_4 \in S_n^A$, 由 $|x_{v^*}| \geq |x_{v_1}|$, 利用引理2可知 $\mu(S_4) > \mu(S^*)$, 与 S^* 的定义矛盾。

若 S_3 的圈长为偶数, 则 $S_3 \in S_n^A$, 由 $|x_{v^*}| \geq |x_u|$, 利用引理2可知 $\mu(S_3) > \mu(S^*)$, 与 S^* 的定义矛盾。

情形2.3.2.2 当 $\Delta \geq 4$ 时

因 $\Delta - 2 \geq 2$, 故在 $N_{S^*}(u) \setminus N_{S^*}(v^*) \setminus \{v^*\}$ 中一定存在 $\Delta - 2$ 个点, 不妨设为 $u_1, \dots, u_{\Delta-2}$, 使得 $S_5 = S^* -$

$uu_1 - \cdots - uu_{\Delta-2} + v^*u_1 + \cdots + v^*u_{\Delta-2}$ 仍为单圈偶图, 则易知 $S_5 \in S_n^\Delta$ 。由 $|x_v| \geq |x_u|$, 利用引理2可知 $\mu(S_5) > \mu(S^*)$, 与 S^* 的定义矛盾。

情形3 当 $k \geq 3$ 时

因 $\Delta > k \geq 3$, 故在 $N_{S^*}(u) \setminus W_{S^*}(v^*) \setminus \{v^*\}$ 中一定存在 $\Delta - k$ 个点, 不妨设为 $u_1, \cdots, u_{\Delta-k}$, 使得 $S_6 = S^* - uu_1 - \cdots - uu_{\Delta-k} + v^*u_1 + \cdots + v^*u_{\Delta-k}$ 仍为单圈偶图, 则易知 $S_6 \in S_n^\Delta$ 。由 $|x_v| \geq |x_u|$, 利用引理2可知 $\mu(S_6) > \mu(S^*)$, 与 S^* 的定义矛盾。

综上所述情形讨论, 可知假设不成立, 故定理1成立。

引理7 设 $S \in S_n^\Delta$, X 是 S 的一个规范拉普拉斯谱向量且 $|x_{u_0}| = \max\{|x_v| | v \in V(S)\}$, C 是 S 中的唯一圈。若 $u_0 \notin V(C)$, 设 $u_0u_1 \cdots u_k (k \geq 1)$ 是一条在圈外长度为 k 的路且 u_k 为叶子顶点。若存在 $w_1 \in V(C)$, 有 $|x_{w_1}| \leq |x_{u_k}|$ 成立。则存在 $S_1 \in S_n^\Delta$ 使得 $\mu(S_1) > \mu(S)$ 成立。

证明 由定理1可知 $d(u_0) = \Delta$, 由引理5可知 $|x_{u_k}| < |x_{u_{k-1}}|$ 。记 w^* 为圈中到 u_0 的最近的顶点, 取 $w_2 \in N_C(w_1) \setminus \{w^*\}$, 令 $S_1 = S - w_1w_2 + w_2u_k$, 下面对图 S_1 的圈长的奇偶性分以下两种情形讨论。

情形1 当 S_1 的圈长为偶数时

易知 $S_1 \in S_n^\Delta$, 由 $|x_{u_k}| \geq |x_{w_1}|$, 利用引理2可知 $\mu(S_1) > \mu(S)$ 成立。

情形2 当 S_1 的圈长为奇数时

若 $|x_{w_2}| > |x_{u_k}|$, 则有 $|x_{w_2}| > |x_{u_k}| \geq |x_{w_1}|$, $|x_{u_{k-1}}| > |x_{u_k}| \geq |x_{w_1}|$, 令 $S_1 = S - w_1w_2 - u_{k-1}u_k + w_2u_{k-1} + w_1u_k$, 易知 $S_1 \in S_n^\Delta$, 利用引理3可知 $\mu(S_1) > \mu(S)$ 成立。

若 $|x_{w_2}| \leq |x_{u_k}|$, 取 $w_3 \in N_C(w_2) \setminus \{w_1\}$, 令 $S_1 = S - w_2w_3 + w_3u_k$, 易知 $S_1 \in S_n^\Delta$, 利用引理2可知 $\mu(S_1) > \mu(S)$ 成立。

综上所述情形, 可知引理7成立。

定理2 设 S^* 是 S_n^Δ 中的一个极大拉普拉斯谱单圈偶图, C 是 S^* 中的唯一圈, X 是 S^* 的一个规范拉普拉斯谱向量。则 X 中绝对值最大的分量对应的顶点的位置均在圈上。

证明 反证法。假设 X 中绝对值最大的分量对应的顶点中存在一个顶点 u_0 的位置在圈外。则可知在 S^* 中存在一条长度为 k 的路 $u_0u_1 \cdots u_k$ 使得顶点 $u_0, u_1, \cdots, u_k$ 均不在圈上且 u_k 为叶子顶点, 由引理7的逆否命题可知在 S^* 中对任意 $v \in V(C)$ 均有 $|x_v| > |x_{u_k}|$ 成立。由定理1可知 $|x_{u_0}| = \max\{|x_v| | v \in V(S^*)\}$, 则 $d(u_0) = \Delta$ 。设圈上的顶点按顺时针排列为 $v_1, v_2, \cdots, v_{2l-1}, v_{2l}, \cdots, v_{2m}, v_1 (1 \leq t \leq m, 2 \leq m, t, m \in \mathbb{N}^+)$, 且 v_{2m} 是圈中离 u_0 最近的顶点(见图3), 记 $l = d(u_0, v_{2m})$, 则 $d(u_{k-1}, v_{2m}) = k - 1 + l$, 其 $l \geq 1, k \geq 1, l, k \in \mathbb{N}^+$ 。下面对 k 的大小分以下三种情形讨论。

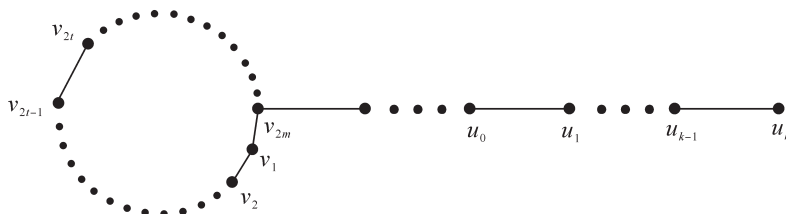


图3 顶点 v_{2m} 是圈中离圈外顶点 u_0 最近的一顶点

Fig.3 Vertex v_{2m} on the circle is closest to vertex u_0 outside the circle

情形1 当 $k = 1$ 时

则 $d(u_{k-1}, v_{2m}) = l$, 下面对 l 的奇偶性进行讨论。

情形1.1 当 l 为奇数时

显然 $|x_{v_2}| > |x_{u_1}|, |x_{u_0}| \geq |x_{v_1}|$, 令 $S_1 = S^* - v_1v_2 - u_0u_1 + u_0v_2 + u_1v_1$, 易知 $S_1 \in S_n^\Delta$, 利用引理3可知 $\mu(S_1) > \mu(S^*)$, 与

S^* 的定义矛盾。

情形1.2 当 l 为偶数时

显然 $|x_{v_1}| > |x_{u_1}|, |x_{v_2}| \leq |x_{u_0}|$, 令 $S_2 = S^* - v_1v_2 - u_0u_1 + u_0v_1 + u_1v_2$, 易知 $S_2 \in S_n^\Delta$, 利用引理3可知 $\mu(S_2) > \mu(S^*)$, 与 S^* 的定义矛盾。

情形2 当 $k=2$ 时

则 $d(u_{k-1}, v_{2m}) = l+1$, 下面对 $l+1$ 的奇偶性进行讨论。

情形2.1 当 $l+1$ 为奇数时

首先可证对任意的 t 均有 $|x_{v_{2t-1}}| > |x_{u_t}|$ 成立。不然, 存在自然数 $t_0 (1 \leq t_0 \leq m)$, 使得 $|x_{v_{2t_0-1}}| \leq |x_{u_{t_0}}|$, 又因 $|x_{v_{2t_0}}| > |x_{u_{t_0}}|$, 令 $S_3 = S^* - v_{2t_0-1}v_{2t_0} - u_1u_2 + u_2v_{2t_0-1} + u_1v_{2t_0}$, 易知 $S_3 \in S_n^\Delta$, 利用引理3可知 $\mu(S_3) > \mu(S^*)$, 与 S^* 的定义矛盾。

其次由 u_0 的定义可知对任意的 t 均有 $|x_{u_0}| \geq |x_{v_{2t}}|$ 成立。所以存在自然数 $t_1 (1 \leq t_1 \leq m)$, 使得 $|x_{v_{2t_1-1}}| > |x_{u_{t_1}}|$, $|x_{u_0}| \geq |x_{v_{2t_1}}|$, 令 $S_4 = S^* - v_{2t_1-1}v_{2t_1} - u_0u_1 + u_0v_{2t_1-1} + u_1v_{2t_1}$, 易知 $S_4 \in S_n^\Delta$, 利用引理3可知 $\mu(S_4) > \mu(S^*)$, 与 S^* 的定义矛盾。

情形2.2 当 $l+1$ 为偶数时

首先可证对任意的 t 均有 $|x_{v_{2t}}| > |x_{u_t}|$ 成立。不然, 存在自然数 $t_2 (1 \leq t_2 \leq m)$, 使得 $|x_{v_{2t_2}}| \leq |x_{u_{t_2}}|$, 又因 $|x_{v_{2t_2-1}}| > |x_{u_{t_2}}|$, 令 $S_5 = S^* - v_{2t_2-1}v_{2t_2} - u_1u_2 + u_1v_{2t_2-1} + u_2v_{2t_2}$, 易知 $S_5 \in S_n^\Delta$, 利用引理3可知 $\mu(S_5) > \mu(S^*)$, 与 S^* 的定义矛盾。

其次由 u_0 的定义可知对任意的 t 均有 $|x_{u_0}| \geq |x_{v_{2t-1}}|$ 成立。所以存在自然数 $t_3 (1 \leq t_3 < m)$, 使得 $|x_{v_{2t_3}}| > |x_{u_{t_3}}|$, $|x_{u_0}| \geq |x_{v_{2t_3-1}}|$, 令 $S_6 = S^* - v_{2t_3-1}v_{2t_3} - u_0u_1 + u_0v_{2t_3-1} + u_1v_{2t_3}$, 易知 $S_6 \in S_n^\Delta$, 利用引理3可知 $\mu(S_6) > \mu(S^*)$, 与 S^* 的定义矛盾。

情形3 当 $k \geq 3$ 时

则 $d(u_{k-1}, v_{2m}) = k-1+l$, 下面对 $k-1+l$ 的奇偶性进行讨论。

情形3.1 当 $k-1+l$ 为奇数时

对于情形3.1, 根据 k 的奇偶性进行讨论。

情形3.1.1 当 k 为偶数时, 设 $k=2i, i \geq 2, i, j, p \in \mathbb{N}^+$ 。

1) 当 $j=1$ 时, 可证对任意的 t 均有 $|x_{v_{2t-1}}| > |x_{u_{k-1}}|$ 与 $|x_{v_{2t}}| > |x_{u_{k-2}}|$ 成立。

首先可证对任意的 t 均有 $|x_{v_{2t-1}}| > |x_{u_{k-1}}|$ 成立。不然, 存在自然数 $t_4 (1 \leq t_4 \leq m)$, 使得 $|x_{v_{2t_4-1}}| \leq |x_{u_{k-1}}|$, 又因 $|x_{v_{2t_4}}| > |x_{u_{k-1}}|$, 令 $S_7 = S^* - v_{2t_4-1}v_{2t_4} - u_ku_{k-1} + u_{k-1}v_{2t_4} + u_kv_{2t_4-1}$, 易知 $S_7 \in S_n^\Delta$, 利用引理3可知 $\mu(S_7) > \mu(S^*)$, 与 S^* 的定义矛盾。

其次可证对任意的 t 均有 $|x_{v_{2t}}| > |x_{u_{k-2}}|$ 成立。不然, 存在自然数 $t_5 (1 \leq t_5 \leq m)$, 使得 $|x_{v_{2t_5}}| \leq |x_{u_{k-2}}|$, 又因 $|x_{v_{2t_5-1}}| > |x_{u_{k-1}}|$, 令 $S_8 = S^* - v_{2t_5-1}v_{2t_5} - u_{k-1}u_{k-2} + u_{k-2}v_{2t_5-1} + u_{k-1}v_{2t_5}$, 易知 $S_8 \in S_n^\Delta$, 利用引理3可知 $\mu(S_8) > \mu(S^*)$, 与 S^* 的定义矛盾。

2) 假设 $p < i$, 且对任意 $j \leq p$ 及任意的 t 均有 $|x_{v_{2t-1}}| > |x_{u_{k-(2j-1)}}|$ 与 $|x_{v_{2t}}| > |x_{u_{k-2j}}|$ 成立。

3) 则可证当 $j=p+1$ 时, 对任意的 t 均有 $|x_{v_{2t-1}}| > |x_{u_{k-(2p+1)}}|$ 与 $|x_{v_{2t}}| > |x_{u_{k-(2p+2)}}|$ 成立。

首先可证对任意的 t 均有 $|x_{v_{2t-1}}| > |x_{u_{k-(2p+1)}}|$ 成立。不然, 存在自然数 $t_6 (1 \leq t_6 \leq m)$, 使得 $|x_{v_{2t_6-1}}| \leq |x_{u_{k-(2p+1)}}|$, 又

因 $|x_{v_{2l_6}}| > |x_{u_{k-2p}}|$, 令 $S_9 = S^* - v_{2l_6-1}v_{2l_6} - u_{k-2p}u_{k-(2p+1)} + u_{k-2p}v_{2l_6-1} + u_{k-(2p+1)}v_{2l_6}$, 易知 $S_9 \in S_n^\Delta$, 利用引理 3 可知 $\mu(S_9) > \mu(S^*)$, 与 S^* 的定义矛盾。

其次可证对任意的 t 均有 $|x_{v_{2l_7}}| > |x_{u_{k-(2p+2)}}|$ 成立。不然, 存在自然数 $t_7 (1 \leq t_7 \leq m)$, 使得 $|x_{v_{2l_7}}| \leq |x_{u_{k-(2p+2)}}|$, 又因 $|x_{v_{2l_7-1}}| > |x_{u_{k-(2p+1)}}|$, 令 $S_{10} = S^* - v_{2l_7-1}v_{2l_7} - u_{k-(2p+1)}u_{k-(2p+2)} + u_{k-(2p+1)}v_{2l_7-1} + u_{k-(2p+2)}v_{2l_7}$, 易知 $S_{10} \in S_n^\Delta$, 利用引理 3 可知 $\mu(S_{10}) > \mu(S^*)$, 与 S^* 的定义矛盾。

由数学归纳法可知, 对任意的 t 均有 $|x_{v_{2l_t}}| > |x_{u_{k-2l_t}}|$ 成立, 即有 $|x_{v_{2l_t}}| > |x_{u_0}|$ 成立, 与 u_0 的定义矛盾。

情形 3.1.2 当 k 为奇数时, 设 $k = 2i - 1, i \geq 2, i, j, p \in N^+$ 。

1) 当 $j = 1$ 时, 类似情形 3.1.1 可证对任意的 t 均有 $|x_{v_{2l_{t-1}}}| > |x_{u_{k-1}}|$ 与 $|x_{v_{2l_t}}| > |x_{u_{k-2}}|$ 成立。

2) 假设 $p < i$, 且对任意 $j \leq p$ 及任意的 t 均有 $|x_{v_{2l_{t-1}}}| > |x_{u_{k-(2j-1)}}|$ 与 $|x_{v_{2l_t}}| > |x_{u_{k-2j}}|$ 成立。

3) 当 $j = p + 1$ 时, 则与情形 3.1.1 类似可证任意的 t 均有 $|x_{v_{2l_{t-1}}}| > |x_{u_{k-(2p+1)}}|$ 成立, 且若 $k > 2p + 2$, 对任意的 t 均有 $|x_{v_{2l_t}}| > |x_{u_{k-(2p+2)}}|$ 成立。

由数学归纳法可知, 对任意的 t 均有 $|x_{v_{2l_{t-1}}}| > |x_{u_{k-(2l_t-1)}}|$ 成立, 即有 $|x_{v_{2l_{t-1}}}| > |x_{u_0}|$ 成立, 与 u_0 的定义矛盾。

情形 3.2 当 $k - 1 + l$ 为偶数时

当 k 为偶数时, 则与情形 3.1.1 类似可证对任意的 t 均有 $|x_{v_{2l_t}}| > |x_{u_0}|$ 成立; 当 k 为奇数时, 则与情形 3.1.2 类似可证对任意的 t 均有 $|x_{v_{2l_t}}| > |x_{u_0}|$ 成立。但这都与 u_0 的定义矛盾。

综上所述情形讨论, 可知假设不成立, 故定理 2 成立。

参考文献:

- [1] CVETKOVI D, DOOB M, SACHS H. Spectra of Graphs—Theory and Applications[M]. New York: Academic Press, 1980:58–75.
- [2] BRUALDI R A, SOLHEID E S. On the spectral radius of complementary acyclic matrices of zeros and ones[J]. SIAM J Algebra Discrete Methods, 1986(7):265–272.
- [3] GUO J M, SHAO J Y. On the spectral radius of trees with fixed diameter[J]. Linear Algebra and its Applications, 2006, 413(1): 131–147.
- [4] LIU H Q, LU M, TIAN F. On the spectral radius of unicyclic graphs with fixed diameter[J]. Linear Algebra and its Applications, 2007, 420(2/3):449–457.
- [5] ZHANG X D. The Laplacian spectral radii of trees with degree sequences[J]. Discrete Mathematics, 2008, 308(15):3143–3150.
- [6] ZHANG X D. The signless Laplacian spectral radius of graphs with given degree sequences[J]. Discrete Applied Mathematics, 2009, 157(13):2928–2937.
- [7] 冯琳, 姚艳红, 郭继明, 等. 具有固定围长的单圈图的无符号拉普拉斯谱半径[J]. 高校应用数学学报, 2011, 26(1):121–126.
- [8] 汪秋分, 宋海洲. 图的拉普拉斯谱半径对应的特征向量的性质及应用[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2014, 35(1):107–111.
- [9] GUO J M. The effect on the Laplacian spectral radius of a graph by adding or grafting edges[J]. Linear Algebra and its Applications, 2006, 413(1):59–71.
- [10] MERRIS R. Laplacian matrices of graphs: a survey[J]. Linear Algebra and its Applications, 1994(197/198):143–176.

On the Unicyclic Bipartite Graphs of Maximal Laplacian Spectrum with Given Maximum Degree

Lin Guoguang, Song Haizhou

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: By considering the effect of adding and grafting edges to a graph on the Laplacian spectral radius, this paper studies the properties of maximal Laplacian spectrum unicyclic bipartite graphs with order n and the given maximum degree $\Delta > 2$, and concludes that the component of the normalized Laplacian vector which has the largest absolute value is corresponding to a vertex of degree Δ , and this vertex is on the circle.

Key words: unicyclic bipartite graph; maximal degree; Laplacian spectral radius; grafting; vector

(责任编辑 姜红贵)

(上接第 107 页)

Electromagnetic Wave Absorption Performance of the Cement-based Composites with Graphite

Qiu Jingjing¹, Guan Bowen², Ding Donghai³, Zhang Hongchao¹

(1.Key Laboratory of Road and Traffic Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 201800, China; 2. School of Materials Science and Engineering, Chang'an University, Xi'an 710061, China; 3.College of Materials and Mineral Resources, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, China)

Abstract: In this study, the cement-based composites were prepared with cement paste as matrix and graphite powders as electromagnetic wave absorbent material. The electromagnetic parameters of composites with different graphite contents were tested through the rectangular waveguide method. And the reflection loss was obtained on the basis of the transmission and impedance theory. In addition, the loss factor $\tan\delta$ was also defined. Finally, the M value was given based on the generalized matching law. Results show that the cement-based composites with 15% graphite by weight possess higher permittivity in low frequency. And it is found that two absorption peaks which are -34.9 dB and -53.75 dB respectively appear in the curve of the reflection loss when the electromagnetic wave absorbing layer thickness of the sample above is 5mm. Moreover, the bandwidth of reflection loss less than -10 dB is 0.43 GHz (ranging from 3.62 GHz to 3.95 GHz). However, the effective absorption frequency band of it is still relatively narrow. Furthermore, the particle size of graphite powders also exerts an effect on electromagnetic wave absorption performance of the graphite-filled cement composites.

Key words: graphite; cement-based composites; electromagnetic wave absorption performance; deicing

(责任编辑 刘棉玲)