

文章编号:1005-0523(2015)04-0073-05

一端外伸梁置换法挠度转角方程关系的完备性

喻晓今

(华东交通大学土木建筑学院,江西 南昌 330013)

摘要:介绍一端外伸梁置换法位移方程,其主要由自变量梁长、中间变量左置换梁自由端挠度、中间变量右置换梁自由端挠度等等构成。作其相应的置换法图像,即让所述变量几何关系图形化。对挠度方程求关于自变量梁长的一阶导数。对求导过程中出现的一个新的变量组合进行几何分析,指出它为置换梁挠度导数的协和,证明此协和的值为零。用归纳的方法证明向左、向右外伸梁置换法位移方程的完备性,即证实其挠度方程与转角方程的一阶导数的关系性质。置换法位移方程建立的条件宽松,结果精确,保存挠曲线原有特性,故可应用于理论分析和工程实践。

关键词:梁挠度和转角;约束反力;置换法;悬臂梁;外伸梁

中图分类号:TU321;TU323.3

文献标志码:A

以简单的挠曲线来替代较为复杂者,文献[1]通过分析简支梁、悬臂梁和外伸梁在集中力、集中力偶、分布载荷作用下的最大挠度,发现了简支梁和外伸梁绝对值最大挠度与对应的悬臂梁(置换梁)自由端挠度的同一性,找到了以简代繁的可能性。文献[2]给出了简支梁的比拟梁法(置换法)的转角位移方程和挠度位移方程,适用于简支梁,并以实例应用。文献[3]推导出简支梁和悬臂梁的置换法的转角位移方程和挠度位移方程。文献[4]则以置换法解超静定连续梁,以置换法位移方程直接列写变形协调关系,各型实例说明其良好的适应性。完成导出置换法解一端外伸梁的转角位移方程和挠度位移方程的是文献[5]的工作,这样,置换法求解梁挠度和转角的问题向另一类简单支承梁扩展。在文献[6]中,置换法用于解静定刚架位移。对于铰支承 Γ 形刚架的位移,文献[7]作了讨论。 Γ 形刚架支承的进一步增加,在文献[8]里提出了解法。文献[9]对一个方向无外力的刚架进行了置换法讨论。而在置换法与它法结合运用上,文献[10]有探讨。为深化置换法的研究,其位移方程本身性质似待揭示。

从梁的挠曲线在其面内的几何图形的观察出发,在任一位置上对挠曲线加入切线作辅助线,并且,一般地作切线的垂线——将该垂线引向梁的有关边界点,此边界点包括支承点和端点等等,构成直线、曲线组成的图形,权且称为置换法图像。对置换法图像进行分析,以平面几何关系和挠曲线所表达的挠度以及其转角为基本变量,建立起它们的等量关系,是置换法寻求位移方程的方法。前研究所找到的位移方程有挠度方程和转角方程,为了进一步落实它们的关系,需要对其性质进行深入研究,以下证明一端外伸梁的挠度方程与转角方程的导数关系。

1 右端外伸梁置换法位移方程之间关系

根据梁的位移的讨论,梁的对称弯曲中,在小变形条件下,梁的挠度与转角是一阶导数的关系,即有 $w'(x) = \theta(x)$,其中: $w(x)$ 是挠度; $\theta(x)$ 是转角; x 是梁的横截面在变形前的轴向位置坐标。当已经求出挠度方程(挠曲线方程)后,只要对挠度方程求关于自变量 x 一阶导数,所得函数便是转角方程。置换法所获得的

收稿日期:2015-01-31

基金项目:江西省高等学校教学改革研究课题(JXJG-14-5-31)

作者简介:喻晓今(1959—),男,教授,主要从事各种结构、构件的力学性质研究。

位移方程,包括挠度方程和转角方程皆是关于自变量 x 的、并存在中间变量的复合函数,就是以置换梁自由端挠度、梁长、跨长、外伸端挠度和 x 等参数为变量的复合函数,此情况提示应以复合函数的求导法则来验证其包含的挠度方程和转角方程的一阶导数关系。右端外伸梁见图1。

1.1 右端外伸梁置换法图像

作任一右端外伸梁置换法图像见图2,点划线 ABC 代表梁的变形前轴线位置,其与 x 轴重合,点划线 ABD 为梁轴线变形以后的位置——为明晰而夸大,仍然是浅坦的弹性曲线。 x 轴原点在梁的左端 A 处。现于梁的任一位置、离点 A 为 x 处的 G 点处,向下方引一与 y 轴平行的线段 GH ,交挠曲线为 H 点,其即是梁在 x 位置的挠度(小变形假设)。作 H 点的切线 JK ,连接 J 、 A 两点,并使线段 AJ 正交于线 JK ;同样,连接 K 、 D 两点,并使线段 DK 正交于线 JK 。显然,线段 AJ 、 DK 分别是梁在 G 处的左、右置换梁自由端的挠度 $w_l(x)$ 、 $w_r(x)$ (小变形假设)。同理,离梁的 A 点为 $x+\Delta x$ 处的 N 点处,向下方引一与 y 轴平行的线段 NQ ,交挠曲线为 Q 点,其即是梁在 $x+\Delta x$ 位置的挠度。作 Q 点的切线 RS ,连接 R 、 A 两点,并使线段 AR 正交于线 RS ;同样,连接 S 、 D 两点,并使线段 DS 正交于线 RS 。显然,线段 AR 、 DS 分别是梁在 N 处的左、右置换梁自由端的挠度 $w_l(x+\Delta x)$ 、 $w_r(x+\Delta x)$ 。

另外,切线 JK 、 RS 的交点为 T ;线段 AR 与切线 JK 的交点为 U ;线段 DK 与切线 RS 的交点为 V 。

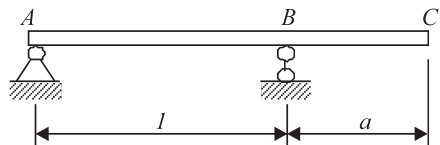


图1 右端外伸梁

Fig.1 Right end overhanging beam

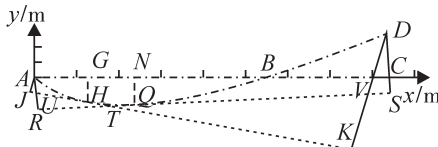


图2 右端外伸梁置换法图像

Fig.2 Conversion method graph of right end overhanging beam

1.2 右端外伸梁挠度方程、转角方程

在结构一定、荷载一定的条件下,参考文献[5]给出的右端外伸梁转角方程、挠度方程分别如下

$$\theta(x) = \frac{w_l(x) - w_r(x) + w_c}{l+a} \quad (1)$$

$$w(x) = -w_l(x) + \theta(x)x \quad (2)$$

式中: $w_l(x)$ 表示左置换梁自由端挠度; $w_r(x)$ 表示右置换梁自由端挠度; l 表示跨度; a 表示梁外伸部分长度; w_c 表示外伸端挠度。

式(1)代入式(2)有:

$$w(x) = -w_l(x) + \frac{1}{l+a} [w_l(x) - w_r(x) + w_c]x \quad (3)$$

1.3 挠度方程的一阶导数

对式(3)求关于自变量 x 一阶导数,得

$$\frac{dw(x)}{dx} = -\frac{dw_l(x)}{dx} + \frac{1}{l+a} \left[\frac{dw_l(x)}{dx} - \frac{dw_r(x)}{dx} \right]x + \frac{1}{l+a} [w_l(x) - w_r(x) + w_c]$$

若令: $\Omega = -\frac{dw_l(x)}{dx} + \frac{1}{l+a} \left[\frac{dw_l(x)}{dx} - \frac{dw_r(x)}{dx} \right]x$, 权且称之为置换梁挠度导数的协和,则可得挠度的一阶导数

$$\frac{dw(x)}{dx} = \Omega + \theta(x) \quad (4)$$

1.4 左右置换梁挠度关系的几何特征

对式(4)中的 Ω 进行分析。借助于置换法图像,研究 $\frac{dw_l(x)}{dx}$ 、 $\frac{dw_r(x)}{dx}$ 的内涵。

研读图2,看直角三角形 TUR 、 TKV ,由于 $\angle RTU = \angle VTK$ (对顶角),故它们相似(三角形中两角分别相

等)。根据相似三角形的性质,得到等式: $\frac{UR}{RT} = \frac{VK}{TK}$ 。

由此可得

$$TK \cdot UR = RT \cdot VK \quad (5)$$

因为小变形假设,所有转角都是微小量,并且考虑挠曲线的连续光滑性质,当 Δx 趋近于零时,也即 N 点无限地靠近 G 点时, Q 点无限靠近 H 点,并与 T 点逐渐合为一点。与此同时, U 点趋近于 J 点; V 点趋近于 S 点。 $AJ \approx AU$, $DV \approx DS$ (等价无穷小),就是

$$UR \approx AR - AJ \quad (6)$$

$$VK \approx DK - DS \quad (7)$$

将式(6)、(7)代入式(5),得: $TK(AR - AJ) \approx RT(DK - DS)$ 。

再顾及这些线段的物理意义,上式即是

$$(l+a-x)[w_l(x+\Delta x) - w_l(x)] \approx x[w_r(x) - w_r(x+\Delta x)] \quad (8)$$

1.5 挠度转角方程的关系

式(8)约等号两边同除以 $(l+a)\Delta x$ 因子,得:

$$\begin{aligned} \frac{l+a-x}{l+a} \times \frac{w_l(x+\Delta x) - w_l(x)}{\Delta x} &\approx \frac{x}{l+a} \times \frac{w_r(x) - w_r(x+\Delta x)}{\Delta x} \\ \frac{l+a-x}{l+a} \times \frac{w_l(x+\Delta x) - w_l(x)}{\Delta x} &\approx -\frac{x}{l+a} \times \frac{w_r(x+\Delta x) - w_r(x)}{\Delta x} \end{aligned} \quad (9)$$

显然,式(9)中约等号两边的各自第二个因子是各自函数增量与自变量的比值,依照导数定义,当 Δx 趋于零时下式成立:

$$\frac{l+a-x}{l+a} \times \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{w_l(x+\Delta x) - w_l(x)}{\Delta x} = -\frac{x}{l+a} \times \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{w_r(x+\Delta x) - w_r(x)}{\Delta x}$$

就是:

$$\frac{l+a-x}{l+a} \times \frac{dw_l(x)}{dx} = -\frac{x}{l+a} \times \frac{dw_r(x)}{dx}$$

移项得:

$$\frac{x-l-a}{l+a} \times \frac{dw_l(x)}{dx} - \frac{x}{l+a} \times \frac{dw_r(x)}{dx} = 0$$

则得: $\frac{x}{l+a} \times \frac{dw_l(x)}{dx} - \frac{dw_l(x)}{dx} - \frac{x}{l+a} \times \frac{dw_r(x)}{dx} = 0$, 就是 $\Omega = 0$, 即置换梁挠度导数的协和为零,将此结果

代入式(4),即得: $\frac{dw(x)}{dx} = \theta(x)$ 。证明右端外伸梁挠度与转角方程的一阶导数关系成立。

2 左端外伸梁置换法位移方程之间关系

左端外伸梁见图3。以下讨论步骤完全与右端外伸梁的相同,为节省篇幅,采用缩略型语汇,详细逻辑关系参看上述内容。

2.1 左端外伸梁置换法图像

作左端外伸梁置换法图像,见图4。不失一般性,点划线 ABC 代表梁的变形前轴线位置,其与 x 轴重合,点划线 ABD 为梁轴线变形以后的位置,仍然是浅坦的弹性曲线。 x 轴原点在梁的左端 C 处。现于梁的任一位置、离点 C 为 x 处的 G 点处,向上方引一与 y 轴平行的线段 GH ,交挠曲线为 H 点,其即是梁在 x 位置的挠

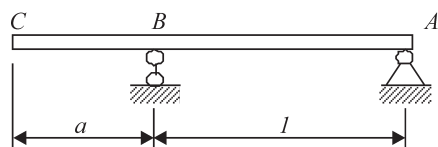


图3 左端外伸梁

Fig.3 Left end overhanging beam

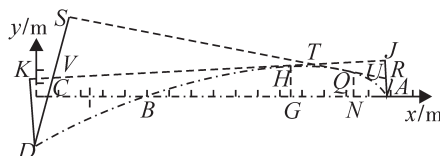


图4 左端外伸梁置换法图像

Fig.4 Conversion method graph of right end overhanging beam

度。作 H 点的切线 JK , 连接 J, A 两点, 并使线段 AJ 正交于线 JK ; 同样, 连接 K, D 两点, 并使线段 DK 正交于线 JK 。显然, 线段 DK, AJ 分别是梁在 G 处的左、右置换梁自由端的挠度 $w_l(x), w_r(x)$ 。同理, 离梁的 C 点为 $x + \Delta x$ 处的 N 点处, 向上方引一与 y 轴平行的线段 NQ , 交挠曲线为 Q 点, 其即是梁在 $x + \Delta x$ 位置的挠度。作 Q 点的切线 RS , 连接 R, A 两点, 并使线段 AR 正交于线 RS ; 同样, 连接 S, D 两点, 并使线段 DS 正交于线 RS 。显然, 线段 DS, AR 分别是梁在 N 处的左、右置换梁自由端的挠度 $w_l(x + \Delta x), w_r(x + \Delta x)$ 。

另外, 切线 JK, RS 的交点为 T ; 线段 AJ 与切线 RS 的交点为 U ; 线段 DS 与切线 JK 的交点为 V 。

2.2 左端外伸梁挠度方程、转角方程

参考文献[5]给出的左端外伸梁转角方程、挠度方程分别如下:

$$\theta(x) = \frac{w_l(x) - w_r(x) - w_c}{l + a} \quad (10)$$

$$w(x) = w_c - w_l(x) + \theta(x)x \quad (11)$$

式中符号意义同前。

2.3 挠度方程的一阶导数

将式(10)代入式(11), 再对式中变量求关于 x 一阶导数, 得:

$$\frac{dw(x)}{dx} = -\frac{dw_l(x)}{dx} + \frac{1}{l+a} \left[\frac{dw_l(x)}{dx} - \frac{dw_r(x)}{dx} \right] x + \frac{1}{l+a} [w_l(x) - w_r(x) - w_c]$$

若令

$$\Omega = -\frac{dw_l(x)}{dx} + \frac{1}{l+a} \left[\frac{dw_l(x)}{dx} - \frac{dw_r(x)}{dx} \right] x$$

$$\frac{dw(x)}{dx} = \Omega + \theta(x) \quad (12)$$

2.4 左右置换梁挠度关系的几何特征

对式(12)中的 Ω 进行分析。研读图4, 看直角三角形 TUJ, TSV , 由于 $\angle J TU = \angle V TS$, 故它们相似。得到等式:

$$\frac{JU}{TJ} = \frac{SV}{ST}$$

由此可得:

$$ST \times JU = TJ \times SV \quad (13)$$

当 Δx 趋近于零时, 也即 N 点无限地靠近 G 点时, Q 点无限靠近 H 点, 并与 T 点逐渐合为一点。与此同时, U 点趋近于 R 点; V 点趋近于 K 点。 $AR \approx AU$, $DV \approx DK$, 就是

$$SV \approx SD - KD \quad (14)$$

$$JU \approx JA - RA \quad (15)$$

将式(14), (15)代入式(13), 得:

$$ST \times (JA - RA) \approx TJ \times (SD - KD)$$

上式即是:

$$x[w_r(x) - w_l(x + \Delta x)] \approx (l + a - x)[w_l(x + \Delta x) - w_l(x)] \quad (16)$$

2.5 挠度转角方程的关系

式(16)约等号两边同除以 $(l + a)\Delta x$ 因子, 得:

$$\frac{l+a-x}{l+a} \times \frac{w_l(x + \Delta x) - w_l(x)}{\Delta x} \approx \frac{x}{l+a} \times \frac{w_r(x) - w_r(x + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$\frac{l+a-x}{l+a} \times \frac{w_l(x + \Delta x) - w_l(x)}{\Delta x} \approx -\frac{x}{l+a} \times \frac{w_r(x + \Delta x) - w_r(x)}{\Delta x} \quad (17)$$

显然, 式(17)当 Δx 趋于零时使下式成立

$$\frac{l+a-x}{l+a} \times \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{w_l(x + \Delta x) - w_l(x)}{\Delta x} = -\frac{x}{l+a} \times \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{w_r(x + \Delta x) - w_r(x)}{\Delta x}$$

则得: $\frac{x}{l+a} \times \frac{dw_l(x)}{dx} - \frac{dw_l(x)}{dx} - \frac{x}{l+a} \times \frac{dw_r(x)}{dx} = 0$, 就是 $\Omega = 0$, 即置换梁挠度导数的协和为零, 将此结果

代入式(12), 即得: $\frac{dw(x)}{dx} = \theta(x)$ 。证实左端外伸梁挠度与转角方程的一阶导数关系成立。

3 结论

置换法位移方程由自变量 x 、中间变量 $w_l(x)$ 和中间变量 $w_r(x)$ 等等构成,是一组关于 x 的复合函数。所述复合函数完全适应导数运算的条件和要求。

1) 定义的置换梁挠度导数的协和为零。

2) 一端外伸梁的置换法挠度方程、转角方程完全符合一阶导数的关系,即 $w'=\theta$,故它们也完全保有原梁挠曲线方程和转角方程的关系性质。一端外伸梁的置换法位移方程准确可靠,可以应用于理论分析和工程实践。

参考文献:

- [1] 喻晓今.几种荷载下的梁绝对值最大挠度的同一性[J]. 华东交通大学学报,2000,17(2):40-45.
- [2] 喻晓今.以比拟梁法求梁的位移[J]. 华东交通大学学报,2002,19(4):35-36,40.
- [3] 喻晓今.求梁位移的比拟梁法[J]. 东华理工学院学报,2004,27(4):398-400.
- [4] 喻晓今.求超静定等直梁的置换法[J]. 工程力学,2007,24(S1):66-69.
- [5] 喻晓今.一端外伸梁对称弯曲弹性位移的置换法确定[J]. 力学与实践,2014,36(4):478-482.
- [6] 喻晓今.以置换法求静定刚架的位移[J]. 江西理工大学学报,2007,12.28(6):50-52.
- [7] 喻晓今.以置换法求铰支T型刚架的位移[J]. 江西理工大学学报,2008,8.29(4):36-38.
- [8] 喻晓今.超静定T型刚架的置换原理解答[J]. 华东交通大学学报,2008,12.25(6):1-5.
- [9] XIAOJIN YU. Solution of slope of simple frame without force in one direction by principle of conversion method[J]. Advanced Materials Research, 2012:3141-3144.
- [10] XIAOJIN YU. Solution of slope of a frame based on simple support beam coming from method of changing to rigidity by step combined with conversion method [J]. Advanced Materials Research, 2013:1889-1892.

Relational Integrity between Deflection and Slope Equations of One End Overhanging Beam Based on Conversion Method

Yu Xiaojin

(School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: This study presents the displacement equations of the beam with one end overhanging through conversion method. The equations consist of the argument of longitudinal size and intermediate variables of the deflection of the left conversion beam, the deflection of the right conversion beam, etc. The relevant pictures of the conversion method are made, which reveal the geometric relations of those variables. Then, it gives the derivatives of the deflection equation of conversion method with respect to the longitudinal size. A new component of variables in geometry is analyzed, which refers to the harmony sum of the derivative of deflection of conversion method beam. And it proves the sum has the value 0. The relational integrity of displacement equations of beam with one end overhanging (at left or at right) through conversion method is verified and the property of the derivative relation of equations of deflection and slope is proved. Owing to the loose and comfortable condition, the accurate outcome and the preservation of the original nature of deflection curve, the displacement equation of conversion method could be used in theoretical analysis and engineering practice.

Key words: deflection and slope of a beam; constraint force; conversion method; cantilever; overhanging beam

(责任编辑 王建华)