文章编号:1005-0523(2015)06-0106-04

图的 Fractional 边全控制

徐保根,赵丽鑫,邹 妍

(华东交通大学理学院,江西 南昌 330013)

摘要:设 $G=(V,E)$是一个无孤立边的图,一个实值函数 $f:E(G)\to[0,1]$若对所有的边 $e\in E(G)$,均有 $\sum_{e\in N(e)} f(e)\geqslant 1$ 成立,则称 f 为图 G 的一个 Fractional 边全控制函数。图 G 的 Fractional 边全控制数定义为 $\gamma_{ft}'(G)=\min\{\sum_{e\in E} f(e)|f$ 为图 G 的一个 Fractional 边全控制函数}。确定了一般图的 Fractional 边全控制数若干界限,同时也研究了几类特殊图 Fractional 边全控制问题,给出了一些特殊图的 Fractional 边全控制数。

关键词:Fractional 边全控制函数;Fractional 边全控制数;Fractional 边全包装函数;Fractional 边全包装数

中图分类号:O157.5 **文献标志码**:A

DOI:10.16749/j.cnki.jecjtu.2015.06.017

1 引言及定义

本文中所指的图均为无向简单图,符号和术语同于文献[1-2]。

图的控制理论是图论中很重要的一个分支。在图的控制理论的发展和完善过程中,Hedetniemi S M 等人首次提出并研究了图的 Fractional 控制概念和性质, 在当 MITCHELL S 和 HEDETNIEMI S T 引入了图的一般边控制的概念之后,自然产生了图的 Fractional 边控制概念,并对其进行了大量研究[3-4]。 而文献[5]首先提出并研究了图的符号边控制,由此衍生到边上的多种控制概念,如 Fractional 边控制等[6]等,从而使得控制理论的研究内容和研究成果越来越丰富,本文主要给出了图的 Fractional 边全控制概念和一些主要结果。

设 $G=(V,E)$是一个连通图,用 $V(G)$和 $E(G)$分别表示 G 的顶点集和边集。对于任意一条边 $e\in E(G)$,定义 e 在 G 中的邻域 $N_G[e]$,表示 G 中与边 e 相关联的边的集合。闭边邻域 $N_G[e]=N_G(e)\cup\{e\}$。$N_G(e)$和 $N_G[e]$分别简记为 $N_G(e)$和 $N_G[e]$。v 点 G 在中的度记为 $d(V)=|N(v)|$,并且$\triangle=\triangle(G)$和 $\delta=\delta(G)$分别表示图 G 中点的最大度和最小度,边 e 在图 G 中的边度是指与其相连的边的条数,记为 $d(e)=|N(e)|$。若 $e=uv\in E(G)$,则有 $d(e)=d(u)+d(v)-2$。$\triangle'=\triangle'(G)$和 $\delta'=\delta'(G)$和分别表示图 G 中边的最大度和最小度。

为了方便,设 $G=(V,E)$若 $S\subseteq E(G)$, $f:E\to R$ 为一个实值函数,则记

$$f(S)=\sum_{e\in s} f(e) \tag{1}$$

定义 1[7] 设 $G=(V,E)$是一个无孤立边的图,如果一个实值函数 $f:E\to[0,1]$对任意的 $e\in E$(G)均有 $f(N(e))\geqslant 1$ 成立,则称 f 为图 G 的一个 Fractional 边全控制函数(简称为 F-边全控制函数)。图 G 的 F-边全控制数定义为

$$\gamma'_{ft}(G)=\min\{f(E)\mid f \text{ 为图 } G \text{ 的一个 } F\text{-边全控制函数}\} \tag{2}$$

并且称满足 $\gamma'_{ft}(G)=\min\{f(E)$的 F 边全控制函数 f 为一个最小 F-边全控制函数。

定义 2[7] 设 $G=(V,E)$是一个无孤立边的图,如果一个实值函数 $f:E\to[0,1]$对任意的 $e\in E$(G)均有 $f(N$

收稿日期:2015-05-03

基金项目:国家自然科学基金项目(11361024);江西省高校科技落地计划项目(KJLD12067)

作者简介:徐保根(1963—),男,教授,主要研究方向为图论及其应用。

$(e))\geqslant 1$ 成立,则称 f 为图 G 的一个 F-边全包装函数。图 G 的一个 F-边全包装数定义为

$$P'_{ft}(G)=\min\{f(E)\mid f\text{为图 }G\text{ 的一个 }F\text{-边全包装函数}\} \tag{3}$$

并且称满足 $P'_{ft}(G)=f(E)$的 F-边全包装函数 f 为一个最大 F-边全包装函数。

在上述两个定义中,如果将边邻域“$N(e)$”改为闭边邻域“$N[e]$”,则对应定义为 F-边控制数和 F-边包装数。类似地,可分别定义 F-点控制函数 $\gamma'_{ft}(G)$ 和 F-点包装数 $P_f(G)$。Domke G S[8]等证明了 $\gamma_f(G)=P_{ft}(G)$ 对任意图成立,这表明 $\gamma'_{ft}(G)=P'_{ft}(G)$ 对任何无孤立边的图成立。特殊地,如果一个实值函数 $f:E\to[0,1]$满足 $f(N(e))=1$ 对任意 $e\in E(G)$成立,则 f 为 G 的一个最小 F-边全控制函数,同时 f 也是图 G 的一个 F-边全包装函数,因此有下面的引理成立。

引理 1　设 G 为一个图,若存在一个实值函数 $f:E(G)\to[0,1]$,使得对任意的 $e\in E(G)$均有 $f(N(e))=1$ 成立,则有 $\gamma'_{ft}(G)=f(E(G))$。

2　主要结果及证明

定理 1　对于任意具有 m 条边的图 G,δ'和$\triangle'$分别为图 G 的最小边度和最大边度,则有

$$\frac{m}{\triangle'}\leqslant\gamma'_{ft}(G)\leqslant\frac{m}{\delta'} \tag{4}$$

证明　记 $G=(V,E)$,f 为图 G 的一个最小 F-边全控制函数,即有 $\gamma'_{ft}(G)=f(E)$。由于对任意的边 $e\in E(G)$均有 $f(N(e))\geqslant 1$ 成立。于是有

$$m\leqslant\sum_{e\in E}f(N(e))=\sum_{e\in E}d'(e)f(e)\leqslant\triangle'\cdot f(E)=\triangle'\cdot\gamma'_{ft}(G) \tag{5}$$

故可得 $\gamma'_{ft}(G)\geqslant\dfrac{m}{\triangle'}$。

另一方面,在 $E(G)$上定义一个实值函数 f 如下:$\forall e\in E(G)$,令 $f(e)=\dfrac{1}{\delta'}$。此时对所有的边 $e\in E$,均有 $f(N(e))\geqslant 1$ 成立,可知 f 为图 G 的一个 F-边全控制函数,此时

$$\gamma'_{ft}(G)\leqslant f(E)=\sum_{e\in E(G)}f(e)=\frac{m}{\delta'} \tag{6}$$

综上所述,可得 $\dfrac{m}{\triangle'}\leqslant\gamma'_{ft}(G)\leqslant\dfrac{m}{\delta'}$。定理 1 证毕。

由定理 1 可得,当图 G 为 n 阶 r-正则图时,$\forall e\in E$, $d(e)=2r-2$ 且 $m=\dfrac{nr}{2}$,此时可以得到下面推论。

推论 1　对任意的 n 阶 r-正则图 $G(r\geqslant 2)$,有 $\gamma'_{ft}(G)=\dfrac{nr}{4(r-1)}$。

特殊地,当 $G=K_n$ 或者 $G=C_n$ 或者 $G=K_t$ 为完全 n-等部图时,由推论 1 可得下面的推论 2。

推论 2　对于任意整数 $n\geqslant 2$ 和 $t\geqslant 2$,则有

$$\begin{cases}\gamma'_{ft}(K_n)=\dfrac{n(n-1)}{4(r-1)}\\[2mm]\gamma'_{ft}(C_n)=\dfrac{n}{2}\\[2mm]\gamma'_{ft}(K_t)=\dfrac{n(n-1)t^2}{4t(n-1)-4}\end{cases} \tag{7}$$

如果一个图 G 的每条边的度均为 k,则称 G 为一个 k-边正则图(即$\triangle'=\delta'=k$),例如,完全偶数 $K_{s,t}$ 为一个$(s+t-2)$-边正则图,由定理 1 可得下面推论 3。

推论 3　对任何正整数 $s\geqslant t\geqslant 2$,则有 $\gamma'_{ft}(K_{t,s})=\dfrac{rs}{r+s-2}$。

由于 $2\triangle-2\geqslant\triangle'\geqslant\delta'\geqslant 2\delta-2$ 对任意简单图均成立,由定理 1 可得下面的推论 4。

推论 4　对任意的 m 条边的简单图 G,若最小度 $\delta\geqslant 2$,则有

$$\frac{m}{2\triangle-2}\leqslant\gamma'_{ft}(G)\leqslant\frac{m}{2\delta-2} \tag{8}$$

下面确定路和轮图的 F**–边全控制数。**

定理2 **对于** $n+1$ **阶轮图** W_{n+1}**,则有** $\gamma'_{ft}(W_{n+1})=\frac{n}{2}$。

证明 **记轮图** $W_{n+1}=C_n\vee K_1$**,在** $E(W_{n+1})$**上定义一个实值函数** f **如下**

$$f(e)=\begin{cases}0, & e\in E(W_n)/E(C_n)\\ \frac{1}{2}, & e\in(C_n)\end{cases} \tag{9}$$

此时对所有的边 $e\in E(W_{n+1})$**,均有** $f(N(e))=1$ **成立,可知** f **为图** G **的一个** F**–边全控制函数,由引理1可知**

$$\gamma'_{ft}(W_{n+1})=f(E)=\sum_{e\in E(G_n)}f(e)+\sum_{e\in E(W_n)/E(C_n)}f(e)=\frac{n}{2}+0=\frac{n}{2} \tag{10}$$

即有 $\gamma'_{ft}(W_{n+1})=\frac{n}{2}$。**定理2证毕。**

定理3 **对于** n **阶路** $P_n(n\geqslant4)$**,则有**

$$\gamma'_{ft}(P_n)=\begin{cases}\frac{n}{2}, & n\equiv0(\bmod 4)\\ \frac{n-1}{2}, & n\equiv1(\bmod 4)\\ \frac{n}{2}, & n\equiv2(\bmod 4)\\ \frac{n+1}{2}, & n\equiv3(\bmod 4)\end{cases} \tag{11}$$

证明 **记** $G=P_n$**,其中** $V(G)=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$**,**$E(G)=(e_1,e_2,\cdots,e_{n-1})$**,且** $e_i=v_i,v_{i+1}$。

下面分4种情形分别定义图 G **上的一个实值函数** f:$E(G)\to[0,1]$**如下:**

1)**当** $n=4t$ **时,即** $n\equiv0(\bmod 4)$。**令** $f(e_{4i-3})=f(e_{4i-2})=1(1\leqslant i\leqslant t)$,$f(e_{4i-1})=f(e_{4i})=f(e_{4t})=0(1\leqslant i\leqslant t-1)$。**此时对任意的** $e\in E(G)$**,均有** $f(N(e))=1$ **成立。由引理1可知** f **为图** G **的一个最小** F**–边全控制函数,则**

$$\gamma'_{ft}(G)=\sum_{i=1}^{n-1}f(e_i)=t(f(e_1)+f(e_2))=2t=\frac{n}{2} \tag{12}$$

即有 $\gamma'_{ft}(G)=\frac{n}{2}$。

2)**当** $n=4t+1$ **时,即** $n\equiv1(\bmod 4)$。**令** $f(e_{4i-2})=f(e_{4i-1})=1(1\leqslant i\leqslant t)$,$f(e_{4i-3})=f(e_{4i})=0(1\leqslant i\leqslant t)$**,此时对任意的** $e\in E(G)$**,均有** $f(N(e))=1$ **成立。由引理1可知** f **为图** G **的一个最小** F**–边全控制函数,则**

$$\gamma'_{ft}(G)=\sum_{i=1}^{n-1}f(e_i)=t(f(e_2)+f(e_3))=2t=\frac{n-1}{2} \tag{13}$$

即当 $n\equiv1(\bmod 4)$**时,**$\gamma'_{ft}(G)=\frac{n-1}{2}$。

3)**当** $n=4t+2$**,即** $n\equiv2(\bmod 4)$**时。令** $f(e_{4i-2})=f(e_{4i-1})=f(e_{4i})=1(1\leqslant i\leqslant t)$,$f(e_{4i-3})=f(e_{4i})=0(1\leqslant i\leqslant t)$**,此时对任意的** $e\in E(G)$**,均有** $f(N(e))\geqslant1$ **成立。可知** f **为图** G **的一个** F**–边全控制函数,则** $\gamma'_{ft}(G)\leqslant f(E)=\sum_{e\in E(G)}f(e)=\frac{n}{2}$。

又因为对任意的 $e\in E(G)$**,均有** $f(N(e))\geqslant1$ **成立,则可得** $f(e_2)=1$。

且当 $1\leqslant i\leqslant t$ **时,**$\begin{cases}f(e_{4i-1})+f(e_{4i+1})\geqslant1\\ f(e_{4i})+f(e_{4i+2})\geqslant1\end{cases}$;**当** $i=t$ **时,**$\begin{cases}f(e_{4i-1})+f(e_{4i+1})\geqslant1\\ f(e_{4i})=1\end{cases}$。**此时**

$$\gamma'_{ft}(G)=f(e_1)+f(e_2)+\cdots+f(e_{n-1})=f(e_1)+f(e_2)+\cdots+f(e_{4t})+f(e_{4t+1})\geqslant f(e_2)+f(e_3)+\cdots+f(e_{4t})+f(e_{4t+1})$$

$$=f(e_2)+\sum_{i=1}^{t-1}(f(e_{4t-1})+f(e_{4t+1})+f(e_{4t})+f(e_{4t+2}))+f(e_{4t-1})+f(e_{4t})+f(e_{4t+1})\geqslant1+2(t-1)+1+1=2t+1=\frac{n}{2} \tag{14}$$

即 $\gamma'_{ft}(G)\geqslant\frac{n}{2}$。综上所示，当 $n\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$时，$\gamma'_{ft}(G)=\frac{n}{2}$。

4）当 $n=4t+3$，即 $n\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$时。令 $f(e_{4i-3})=f(e_{4i-2})=1(1\leqslant i\leqslant t+1)$，$f(e_{4i-1})=f(e_{4i})=0(1\leqslant i\leqslant t)$，此时对任意的 $e\in E(G)$，均有 $f(N(e))=1$ 成立。由引理 1 可知 f 为图 G 的一个最小 F-边全控制函数，则

$$\gamma'_{ft}(G)=f(e_1)+f(e_2)+\cdots+f(e_{n-1})=(t+1)f(e_1)+f(e_2)=2(t+1)=\frac{n+1}{2} \tag{15}$$

即当 $n\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$时，$\gamma'_{ft}(G)=\frac{n+1}{2}$。至此定理 3 证毕。

参考文献：

[1] BONDYJ A，MURTY V S R. Graph Theory with Application[M]. Elsevier，Amsterdam，1976.

[2] HAYNES T W，HEDETNIEMI S T，SLATER P J. Domination in Graph[M].Marcel Dekker，Inc New York，1998.

[3] HEDETNIEMI S M，HEDETNIEMI S T, WIMER T V. Linear time resource allocation algorithms for trees. Technical report URI-014, Department of Mathematics[R]. Clems on University，1987.

[4] MITCHELL S，HEDETNIEMI S T. Edge domination in trees[J]. Congr Numer，1977(19)：489-509.

[5] BAOGEN XU. On signed edge domination numbers of graphs[J]. Discrete Math，2001(239)：179-189.

[6] ARUMUGAM S. Fractional edge domination in graphs[J]. APPL ANAL Discrete Math，2009(3)：359-370.

[7] 徐保根，图的控制与染色理论[M]. 武汉，华中科技大学出版社，2013.

[8] DOMKE G S，HEDETNIEMI S T，LASKAR R C. Fractional packings，coverings and irredundance in graphs[J]. Congr Numer，1988(66)：227-238.

Fractional Edge Total Domination Numbers in Graphs

Xu Baogen, Zhao Lixin, Zou Yan

(School of Science，East China Jiaotong University，Nanchang 330013，China)

Abstract：Let $G=(V,E)$ be a graph without isolated edges, a real function $f:E(G)\to[0,1]$ is said to be a fractional edge total domination function (FETDF) of G if $\sum_{e\in N(e)} f(e)\geq 1$ holds for every $e\in E(G)$ edge ，then the fractional edge total domination number $\gamma_{ft}'(G)$ of G is defined as $\gamma_{ft}'(G)=\min\{\sum_{e\in E} f(e) \mid f$ is a FETDF of $G\}$. This paper determines bounds for the fractional edge total domination numbers of a graph. Meanwhile, it discusses some questions on the fractional edge total domination and gives the fractional edge total domination numbers of some special graphs.

Key words：fractional edge total dominating function; fractional edge total domination number; fractional edge total packing function; fractional edge total packing number

(责任编辑　姜红贵)